

Conceptions des TAD Collections

Structures statiques, dynamiques et mixtes

Nicolas Delestre

1 Introduction

2 Conception préliminaire

- Les opérations → fonctions/procédures
- Utilisation

3 Conception détaillée

- Représentation à l'aide de tableaux
- Représentation à l'aide de structures de données dynamiques
 - Utilisation de la SDD ListeChainee
 - Utilisation de la SDD ArbreBinaire
 - Utilisation de la SDD Table de hachage

Rappels

On a vu un certain nombre de TAD collections :

- les listes
- les listes ordonnées
- les piles
- les files
- les dictionnaires
- ...

Comment les représenter ?

Contraintes informatiques

- Les TAD sont des représentations mathématiques des types
 - les éléments existent en nombre fini ou infini
 - les opérations (fonctions mathématiques) permettent d'accéder aux éléments et de passer d'un élément à un autre
- La mémoire d'un ordinateur n'est pas infini. Dans le paradigme de la programmation structurée, les opérations :
 - modifient les valeurs des paramètres : procédure avec passage de paramètre en entrée/sortie ou en sortie
 - créent de nouvelles valeurs : fonction ou procédure avec passage de paramètre en sortie
- Il faut faire le bon choix de façon à être efficient

muabilité ou immuabilité

Attention

Une fois que l'on a déterminé comment les représenter on obtient non plus un TAD mais un type de données (l'aspect *abstrait* disparaît)

Pile

- **fonction** pile () : Pile
- **fonction** estVide (unePile : Pile) : **Booleen**
- **procédure** empiler (**E/S** unePile : Pile, **E** element : Element)
- **procédure** dépiler (**E/S** unePile : Pile)
 |précondition(s) non(estVide(unePile))
- **fonction** obtenirElement (unePile : Pile) : Element
 |précondition(s) non(estVide(unePile))

File

- **fonction** file () : File
- **fonction** estVide (uneFile : File) : **Booleen**
- **procédure** enfiler (**E/S** uneFile : File, **E** element : Element)
- **procédure** défiler (**E/S** uneFile : File)
 - └ **précondition(s)** *non(estVide(uneFile))*
- **fonction** obtenirElement (uneFile : File) : Element
 - └ **précondition(s)** *non(estVide(uneFile))*

Liste

- **fonction** liste () : Liste
- **fonction** estVide (uneListe : Liste) : **Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** uneListe : Liste, **E** position : **Naturel**, element : Element)
 |précondition(s) $1 \leq position \leq longueur(uneListe) + 1$
- **procédure** supprimer (**E/S** uneListe : Liste, **E** position : **Naturel**)
 |précondition(s) $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** obtenirElement (uneListe : Liste, position : **Naturel**) : Element
 |précondition(s) $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** longueur (uneListe : Liste) : **Naturel**

ListeOrdonnee

- **fonction** listeOrdonnee () : ListeOrdonnee
- **fonction** estVide (uneListe : ListeOrdonnee) : **Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** uneListe : ListeOrdonnee, **E** element : Element)
- **procédure** supprimer (**E/S** uneListe : ListeOrdonnee, **E** position : **Naturel**)
 | **précondition(s)** $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** obtenirElement (uneListe : ListeOrdonnee, position : **Naturel**) :
 Element
 | **précondition(s)** $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** longueur (uneListe : ListeOrdonnee) : **Naturel**

Ensemble

- **fonction** ensemble () : Ensemble
- **procédure** ajouter (**E/S** unEnsemble : Ensemble, **E** element : Element)
- **procédure** retirer (**E/S** unEnsemble : Ensemble, **E** element : Element)
- **fonction** estPrésent (unEnsemble : Ensemble, element : Element) : **Booleen**
- **fonction** cardinalite (unEnsemble : Ensemble) : **Naturel**
- **fonction** union (e1, e2 : Ensemble) : Ensemble
- **fonction** intersection (e1, e2 : Ensemble) : Ensemble
- **fonction** soustraction (e1, e2 : Ensemble) : Ensemble

Dictionnaire

- **fonction** dictionnaire () : Dictionnaire
- **procédure** ajouter (**E/S** unDictionnaire : Dictionnaire, **E** clef : Clef, element : Valeur)
- **procédure** retirer (**E/S** unDictionnaire : Dictionnaire, **E** clef : Clef)
- **fonction** estPresent (unDictionnaire : Dictionnaire, clef : Clef) : **Booleen**
- **fonction** obtenirValeur (unDictionnaire : Dictionnaire, clef : Clef) : Valeur
 |_précondition(s) estPresent(unDictionnaire, clef)
- **fonction** obtenirClefs (unDictionnaire : Dictionnaire) : Ensemble<Clef>
- **fonction** obtenirValeurs (unDictionnaire : Dictionnaire) : Liste<Valeur>

Tas

- **fonction** tas () : Tas
- **fonction** estVide (unArbre : Tas) : **Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** unArbre : Tas, **E** element : Element)
- **procédure** supprimer (**E/S** unArbre : Tas, **E** element : Element)
- **fonction** estPrésent (unArbre : Tas, element : Element) : **Booleen**
- **fonction** obtenirElement (unArbre : Tas) : Element
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsGauche (unArbre : Tas) : Tas
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsDroit (unArbre : Tas) : Tas
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)

Arbre binaire de recherche

- **fonction** aBR () : ABR
- **fonction** estVide (unArbre : ABR) : **Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** unArbre : ABR, **E** element : Element)
- **procédure** supprimer (**E/S** unArbre : ABR, **E** element : Element)
- **fonction** estPrésent (unArbre : ABR, element : Element) : **Booleen**
- **fonction** obtenirElement (unArbre : ABR) : Element
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsGauche (unArbre : ABR) : ABR
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsDroit (unArbre : ABR) : ABR
 - | **précondition(s)** non estVide(unArbre)

Utilisation

- Lorsque l'on déclare une variable de type collection, on suffixe le nom du type par le type réel des éléments
- Dans les algorithmes de la conception détaillée, si il y a ambiguïté sur les fonctions ou procédures utilisées, on préfixe le nom de la fonction ou de la procédure par le nom du TAD s'y rattachant (utilisation du "." pour séparer ces deux noms)

Exemple

```
a : ArbreBinaire<Entier>
l : Liste<Entier>
...
si ArbreBinaire.estVide(a) alors
    ...
finsi
...
```

Trois types de représentation

Objectif

- L'objectif est de décrire comment sont représentés les TAD collection (Pile, File, Liste, ListeOrdonnée, etc.), c'est-à-dire :
 - **Type** NomType = Représentation
 - Définir les algorithmes des fonctions et procédures vu dans la conception détaillée

Les collections sont des types de données qui “stockent” des éléments de même type

- ① On peut utiliser des tableaux : structures de données statiques (SDS)
- ② On peut utiliser les SDD : structures de données dynamiques
- ③ On peut utiliser à la fois des SDS et SDD

Représentation à l'aide de tableaux

- Très souvent ne fonctionne bien qu'avec les TAD collection non hiérarchique (sinon que signifie obtenirFilsGauche?)
- Besoin de stocker les éléments, donc besoin d'un tableau, et donc besoin de savoir combien d'éléments sont significatifs
- Les collections (linéaires) sont donc représentées avec une structure (au sens algorithmique) composée :
 - d'un tableau d'éléments
 - du nombre d'éléments significatifs (un nombre d'éléments significatifs nul représente un ensemble vide)

Attention

Il se peut quelque fois que l'on veuille donner une structure d'arbre à l'organisation des éléments d'un tableau (par exemple pour représenter un tas).

Un premier exemple : la Pile 1 / 2

Type Pile = Structure

lesElements : **Tableau**[1..MAX] de Element

nbElements : **Naturel**

finstructure

fonction pile () : Pile

Déclaration resultat : Pile

debut

resultat.nbElements ← 0

retourner resultat

fin

fonction estVide (unePile : Pile) : **Booleen**

debut

retourner unePile.nbElements=0

fin

Un premier exemple : la Pile 2 / 2

procédure empiler (E/S unePile : Pile, E e : Element)

debut

unePile.nbElements \leftarrow unePile.nbElements+1

unePile.lesElements[unePile.nbElements] \leftarrow e

fin

procédure depiler (E/S unePile : Pile)

|précondition(s) non estVide(unePile)

debut

unePile.nbElements \leftarrow unePile.nbElements-1

fin

fonction obtenirElement (unePile : Pile) : Element

|précondition(s) non estVide(unePile)

debut

retourner unePile.lesElements[unePile.nbElements]

fin

Un deuxième exemple : la Liste 1 / 3

```
Type Liste = Structure  
  lesElements : Tableau[1..MAX] de Element  
  nbElements : Naturel  
finstructure  
fonction liste () : Liste  
  Déclaration resultat : Liste  
debut  
  resultat.nbElements ← 0  
  retourner resultat  
fin  
fonction estVide (uneListe : Liste) : Booleen  
debut  
  retourner uneListe.nbElements=0  
fin
```

Un deuxième exemple : la Liste 2 / 3

procédure insérer (**E/S** uneListe : Liste, **E** indice : **Naturel**, e : Element)

|**précondition(s)** $1 \leq \text{indice} \leq \text{longueur}(\text{uneListe}) + 1$

debut

decalerVersLaDroite(uneListe, indice)

uneListe.nbElements \leftarrow uneListe.nbElements+1

uneListe.lesElements[indice] \leftarrow e

fin

procédure supprimer (**E/S** uneListe : Liste, **E** indice : **Naturel**)

|**précondition(s)** $1 \leq \text{indice} \leq \text{longueur}(\text{uneListe})$

debut

decalerVersLaGauche(uneListe, indice+1)

uneListe.nbElements \leftarrow uneListe.nbElements-1

fin

fonction obtenirElement (uneListe : Liste, indice : **Naturel**) : Element

|**précondition(s)** $1 \leq \text{indice} \leq \text{longueur}(\text{uneListe})$

debut

retourner uneListe.lesElements[indice]

fin

Un deuxième exemple : la Liste 3 / 3

```
fonction longueur (uneListe : Liste) : Naturel
debut
  retourner uneListe.nbElements
fin
procédure decalerVersLaDroite (E/S uneListe : Liste, E indice : Naturel)
  Déclaration i : Naturel
debut
  pour i ← uneListe.nbElements à indice pas de -1 faire
    uneListe.lesElements[i+1] ← uneListe.lesElements[i]
  finpour
fin
procédure decalerVersLaGauche (E/S uneListe : Liste, E indice : Naturel)
  Déclaration i : Naturel
debut
  pour i ← indice à uneListe.nbElements faire
    uneListe.lesElements[i-1] ← uneListe.lesElements[i]
  finpour
fin
```

Avantage / Inconvénient

Avantage

- Simple à programmer

Inconvénients

- Structure statique :
 - Limitée par un nombre d'éléments maximal (MAX)
 - Même si très peu d'éléments stockés, MAX éléments réservés
 - Problème des collections définies récursivement

Utilisation de la SDD ListeChaine 1 / 6

- Les types Pile, File, Liste, ListeOrdonnee peuvent être représentés à l'aide de la SDD ListeChaine ou d'une structure contenant une ListeChaine :
 - Type** XX = ListeChaine
 - Type** XX = **Structure**
 - lesElements : ListeChaine
 - ...
 - finstructure**
- Les fonctions/procédures de ces types utilisent donc les fonctions/procédures de la SDD ListeChaine

Utilisation de la SDD ListeChainee 2 / 6

Pile

Type Pile = ListeChainee

Le sommet de la pile est représenté par le premier élément de la liste chaînée :

- estVide → estVide
- empiler → ajouter
- dépiler → supprimerTete
- obtenirElement → obtenirElement

Utilisation de la SDD ListeChainee 3 / 6

File

Type File = Structure

debut : ListeChainee

fin : ListeChainee

finstructure

debut référence la tête de la liste chaînée et *fin* le dernier élément :

- estVide → estVide
- enfiler → une opération qui permet d'« ajouter » un élément au niveau du champ *fin*
- défiler → supprimerTete
- obtenirElement → obtenirElement

Utilisation de la SDD ListeChainee 4 / 6

Liste

Type Liste = Structure

lesElements : ListeChainee

nbElements : **Naturel****finstructure**

Les éléments de la liste sont stockés dans le même ordre que celui de la liste chaînée

- estVide → estVide
- insérer → *une opération qui insère un élément à la ième place de la liste chaînée et incrémentation du champ nbElements*
- supprimer → *une opération qui supprime le ième élément et décrémentation du champ nbElements*
- obtenirElement → *une opération qui permet d'obtenir le ième élément de la liste chaînée*
- longueur → *accès au champ nbElements*

Utilisation de la SDD ListeChainee 5 / 6

ListeOrdonnee

Type ListeOrdonnee = **Structure**

lesElements : ListeChainee

nbElements : **Naturel**

finstructure

Les éléments de la liste ordonnée sont stockés dans le même ordre que celui de la liste chaînée

- estVide → estVide
- insérer → *une opération qui insère un élément et incrémentation du champ nbElements*
- supprimer → *une opération qui supprime le ième élément et décrémentation du champ nbElements*
- obtenirElement → *une opération qui permet d'obtenir le ième élément de la liste chaînée*
- longueur → *accès au champ nbElements*

Utilisation de la SDD ListeChainee 6 / 6

Ensemble

Type Ensemble = Structure

lesElements : ListeChainee

nbElements : **Naturel**

finstructure

Les éléments de l'ensemble sont stockés dans le même ordre que celui de la liste chaînée

- ajouter → ajouter (en vérifiant au préalable que l'élément n'est pas présent)
- retirer → *une opération qui supprime un élément et décremente le champ nbElements si l'élément a bien été supprimé*
- estPrésent → *une opération qui permet de savoir si un élément est présent dans la liste*
- cardinalité → *accès au champ nbElements*
- union → *une opération qui crée un nouvel ensemble en ajoutant les éléments des deux ensembles*
- soustraction → *une opération qui crée un nouvel ensemble ou sera ajouté les éléments du premier ensemble qui ne sont pas dans l'autre (opération privée)*
- intersection → *une opération qui crée un nouvel ensemble et qui appelle deux fois une opération qui ajoutera les éléments d'un ensemble qui sont aussi présent dans un autre*

Arbre Binaire de recherche : ABR

Type ABR = ArbreBinaire

- estVide → estVide
- insérer → *une opération qui insère un élément*
- supprimer → *une opération qui supprimer un élément*
- estPresent → *une opération qui recherche un élément*
- obtenirElement → obtenirElement
- obtenirFilsGauche → obtenirFilsGauche
- obtenirFilsDroit → obtenirFilsDroit

ABR 2 / 6

estPresent

```
fonction estPresent (a : ABR, e : Element) : Booleen
```

```
  Déclaration  temp : ABR
```

```
debut
```

```
  si estVide(a) alors  
    retourner FAUX
```

```
  sinon
```

```
    si e==obtenirElement(a) alors  
      retourner VRAI
```

```
    sinon
```

```
      si e<obtenirElement(a) alors  
        retourner estPresent(obtenirFilsGauche(a),e)
```

```
      sinon
```

```
        retourner estPresent(obtenirFilsDroit(a),e)
```

```
      finsi ‘
```

```
    finsi
```

```
  finsi
```

```
fin
```

ABR 3 / 6

insertion

Principe : parcours l'arbre jusqu'à arriver sur un arbre vide

procédure insérer (**E/S** a : ABR, **E** e : Element)

Déclaration temp : ABR

debut

si estVide(a) **alors**

a ← ajouterRacine(arbreBinaireRecherche(), arbreBinaireRecherche(), e)

sinon

si e ≤ obtenirElementRacine(a) **alors**

temp ← obtenirFilsGauche(a)

insérer(temp, e)

fixerFilsGauche(a, temp)

sinon

temp ← obtenirFilsDroit(a)

insérer(temp, e)

fixerFilsDroit(a, temp)

finsi

finsi

fin

ABR 4 / 6

suppression (début)

Principe : Lorsque l'on a trouvé l'élément à supprimer, il y a trois cas :

- 1 L'arbre est une feuille : suppression de l'arbre
- 2 L'arbre a un seul fils : l'arbre devient le fils (et suppression du nœud)
- 3 L'arbre a deux fils : la nouvelle racine devient le plus grand des plus petits (ou le plus petit des plus grand)

fonction lePlusGrand (a : ABR) : ABR

 | **précondition(s)** non estVide(a)

debut

si estVide(obtenirFilsDroit(a)) **alors**

retourner a

sinon

retourner lePlusGrand(obtenirFilsDroit(a))

finsi

fin

ABR 5 / 6

suppression (suite)

procédure supprimer (**E/S** a : ABR; **E** e : Element)

Déclaration nelleValeurRacine : Element
 temp,tempG,tempD : ABR

debut

si non estVide(a) **alors**

si e < obtenirElement(a) **alors**
 temp ← obtenirFilsGauche(a)
 supprimer(temp,e)
 fixerFilsGauche(a,temp)

sinon

si e > obtenirElement(a) **alors**
 temp ← obtenirFilsDroit(a)
 supprimer(temp,e)
 fixerFilsDroit(a,temp)

sinon

si estVide(obtenirFilsGauche(a)) et estVide(obtenirFilsDroit(a)) **alors**
 voir cas 1

sinon

si estVide(obtenirFilsGauche(a)) ou estVide(obtenirFilsDroit(a)) **alors**
 voir cas 2

sinon

voir cas 3

finsi

finsi

finsi

finsi

fin

fin

ABR 6 / 6

suppression (fin)

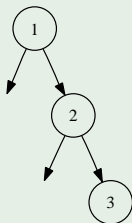
- Cas 1 :
ArbreBinaire.supprimerRacine(a,tempG,tempD)
- Cas 2 :
ArbreBinaire.supprimerRacine(a,tempG,tempD)
si estVide(tempG) **alors**
 a ← tempD
sinon
 a ← tempG
finsi
- Cas 3 :
ArbreBinaire.supprimerRacine(a,tempG,tempD)
nelleValeurRacine ← obtenirElement(lePlusGrand(tempG))
supprimer(tempG,nelleValeurRacine)
a ← ArbreBinaire.ajouterRacine(nelleValeurRacine,tempG,tempD)

Constats

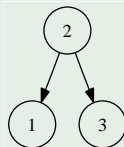
Résultat de l'insertion successive de . . .

- 1, 2 et 3
- 2, 1 et 3

Cas 1



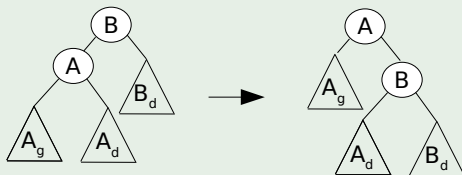
Cas 2



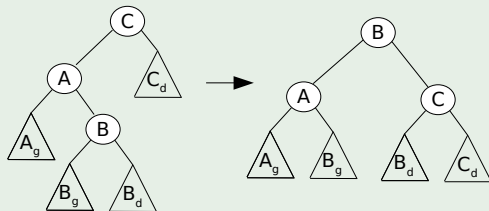
Il faudrait un algorithme qui laisse après insertion l'arbre équilibré :
⇒ Utilisation des algorithmes de simple et double rotations

AVL 1 / 4

Simple Rotation À Droite



Double Rotation À Droite



AVL 2 / 4

insérer (début)

procédure insérer (**E/S** a : ABR, **E** e : Element)

Déclaration temp : ABR

debut

si estVide(a) **alors**

a ← ajouterRacine(arbreBinaireRecherche(), arbreBinaireRecherche(), e)

sinon

si e ≤ obtenirElementRacine(a) **alors**

temp ← obtenirFilsGauche(a)

insérer(temp, e)

fixerFilsGauche(a, temp)

voir cas 1

sinon

temp ← obtenirFilsDroit(a)

insérer(temp, e)

fixerFilsDroit(a, temp)

voir cas 2

finsi

finsi

fin

AVL 3 / 4

insérer (fin)

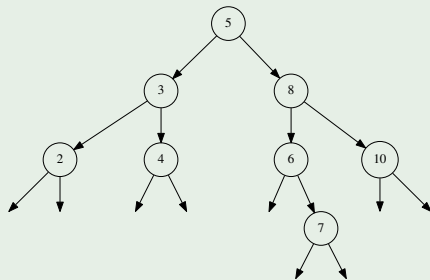
- Cas 1 :
si hauteur(obtenirFilsGauche(a)) > hauteur(obtenirFilsDroit(a)) + 1 alors
 si hauteur(obtenirFilsGauche(obtenirFilsGauche(a))) \geq
 hauteur(obtenirFilsDroit(obtenirFilsGauche(a))) alors
 faireSimpleRotationDroite(a)
 sinon
 faireDoubleRotationDroite(a)
 finsi
finsi
- Cas 2 :
si hauteur(obtenirFilsDroit(a)) > hauteur(obtenirFilsGauche(a)) + 1 alors
 si hauteur(obtenirFilsGauche(obtenirFilsDroit(a))) \leq
 hauteur(obtenirFilsDroit(obtenirFilsDroit(a))) alors
 faireSimpleRotationGauche(a)
 sinon
 faireDoubleRotationGauche(a)
 finsi
finsi

AVL 4 / 4

Exercice

Donner l'algorithme de la procédure supprimer.

Principe : « La suppression dans un arbre AVL peut se faire par rotations successives du nœud à supprimer jusqu'à une feuille (en choisissant ces rotations de sorte que l'arbre reste équilibré), et ensuite en supprimant cette feuille directement. » (Wikipedia)



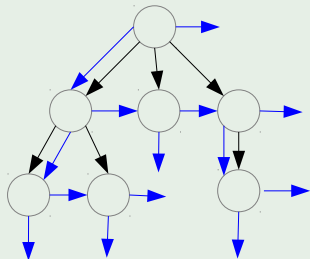
Les arbres n-aires

Deuxième conception

Type Arbre = ArbreBinaire

avec :

- le fils gauche d'un nœud de l'arbre binaire pour représenter le premier fils d'un nœud de l'arbre
- le fils droit d'un nœud de l'arbre binaire pour représenter le prochain frère fils d'un nœud de l'arbre



Exercice

Donnez les algorithmes des fonctions et procédures avec cette représentation

Utilisation des tables de hachages

Rappels

- SDD associative (clé, valeur)
- Accès aux éléments en $O(n/k)$ avec
 - k taille de la table
 - si la fonction de hachage est « bonne » (limite les collisions)

Utilisation

- TAD Dictionnaire : représentation naturelle
- TAD Ensemble : clés et valeurs sont les éléments de l'ensemble

Conclusion 1 / 2

		Conceptions				
		Tableau	Liste chaînée	Arbre binaire	Table de hachage	
TAD	Pile	obtenirElement	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
		empiler	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
		depiler	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
	File	obtenirElement	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
		enfiler	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
		defiler	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(1)$		
	Liste	obtenirElement	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(n)$		
		insérer	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$		
		supprimer	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$		
	Liste Ordonnée	obtenirElement	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	
		insérer	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$	
		supprimer	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$	
Ensemble	estPresent	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n/K)$	
	ajouter	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$	$\Omega(1) O(n/K)$	
	supprimer	$\Omega(1) O(1)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$	$\Omega(1) O(n/K)$	

Utilisation des algorithmes d'insertions et suppressions AVL ou Rouge et Noir. Le type des éléments doit donc avoir un ordre total

Les éléments (ou une partie des éléments) doivent être hachable. K représente la taille de la table. On considère la complexité dans le pire des cas de la fonction de hachage en $O(1)$.

Conclusion 2 / 2

		Conceptions			
		Tableau	Liste chaînée	Arbre binaire	Table de hachage
TAD	Dictionnaire	obtenirElement	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$ $\Omega(1) O(n/K)$
		ajouter	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$ $\Omega(1) O(n/K)$
		supprimer	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(n)$	$\Omega(1) O(\log_2(n))$ $\Omega(1) O(n/K)$
	Tas	obtenirMax	$\Omega(1) O(1)$		$\Omega(1) O(1)$
		ajouter	$\Omega(1) O(\log_2(n))$		$\Omega(1) O(\log_2(n))$
		supprimer	$\Omega(1) O(\log_2(n))$		$\Omega(1) O(\log_2(n))$
	Arbre binaire	obtenirElement (racine)			$\Omega(1) O(1)$
		ajouter (racine)			$\Omega(1) O(1)$
		supprimer (racine)			$\Omega(1) O(1)$
	Arbre binaire de recherche	rechercher			$\Omega(1) O(\log_2(n))$
		insérer			$\Omega(1) O(\log_2(n))$
		supprimer			$\Omega(1) O(\log_2(n))$
	Arbre n-aire	obtenirElement (racine)			$\Omega(1) O(1)$
		ajouter (racine)			$\Omega(1) O(1)$
		supprimer (racine)			$\Omega(1) O(1)$

Utilisation des algorithmes d'insertions et suppressions AVL ou Rouge et Noir. Le type des éléments doit donc avoir un ordre total

Les éléments (ou une partie des éléments) doivent être hachable. K représente la taille du tableau. On considère la complexité dans le pire des cas de la fonction de hachage en $O(1)$.