Exercice 1 — PL en nombres entiers — 4 points

Un architecte doit concevoir le plan d'un immeuble de 30 étages. La surface maximale autorisée est de 615 m^2 par étage. L'architecte doit déterminer le nombre d'appartements avec une chambre, avec deux chambres et avec trois chambres à coucher. Un appartement avec une seule chambre peut avoir au plus deux occupants, il occupe 35 m^2 et est évalué à 130.000 €. Les spécifications de chaque type d'appartement sont répertoriés dans cet ordre dans le tableau ci-dessous :

nombre de chambres	nombre d'occupants	surface	prix
1	2	35 m^2	130.000 €
2	5	55 m^2	220.000 €
3	8	80 m^2	290.000 €

1. En intégrant les contraintes suivantes, quelle configuration (plan) permet de maximiser la valeur totale de l'immeuble :
   - il doit y avoir au moins autant d'appartements à trois chambres que la somme des appartements à une et deux chambres,
   - le nombre d'appartements à une chambre à coucher ne peut pas être plus de deux fois le nombre d'appartements à deux chambres,
   - le nombre total d'occupants de l'immeuble ne doit pas dépasser 1680 (soit 56 personnes par étage).
2. Reformuler le problème sous la forme d'un programme linéaire standard.
3. Refaites les calculs en supposant que le prix d'un appartement à une chambre est de 150.000 €. Que pensez vous du résultat ?

Exercice 2 — Quand ils régresseront — 6 points

Le but de cet exercice est d'écrire la fonction matlab `a = mon_enveloppe(X,ya)` permettant d'estimer l'enveloppe inférieure d'un ensemble de point à l'aide d'un polynôme de degré sept. Il s'agit, à partir d'un ensemble de couples $(x_i, y_i), i = 1, n$ (en rouge sur la figure ci-jointe) d'estimer les coefficients $a \in \mathbb{R}^8$ d'un polynôme $p(x) = \sum_{i=0}^{7} a_j x^j$ (en vert sur la figure) au plus prêt des observations mais toujours en dessous.

Afin de tester votre procédure vous pourrez utiliser le code suivant (vu en TP).

```
clear
clf
rand('seed',8);
n = 100;
x = sort(rand(n,1));
nt = 1000;
xt = linspace(0,1,nt)';
y = cos(pi*x);
yt = cos(pi*xt);
figure(1);
plot(x,y); hold on;
sig = 0.5;
ya = y+sig*rand(size(y));
plot(x,ya,'xr');
X = [ones(size(x)) x x.^2 x.^3 x.^4 x.^5 x.^6 x.^7];
Xt = [ones(size(xt)) xt xt.^2 xt.^3 xt.^4 xt.^5 xt.^6 xt.^7 ];

[a] = mon_enveloppe(X,ya)

plot(xt,Xt*a,'g');
plot(x,X*a,'og');
```

1. L'enveloppe étant définie par la solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{a\in\mathbb{R}^8} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i| \\ \text{avec} & f(x_i) \leq y_i \qquad i = 1, n \\ \text{et} & f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{7} a_j x^j \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Donner un code matlab permettant de le résoudre et reformuler ce problème comme un programme linéaire standard (on pourra effectuer des simplifications).

2. Il s'agit maintenant de modifier le programme précédent pour traiter le cas des points aberrants et notamment le cas où $y_1 = -1$ (figure suivante à droite). Dans ce cas, deux modifications sont à introduire. La première consiste à changer de fonction cout et d'utiliser le cout suivant :

$$\varphi_\rho(t) = \left\{\begin{array}{ll} \rho\, t & \text{si } t \leq 0 \\ (1-\rho)\, t & \text{si } t > 0 \end{array}\right.$$

Dans ce cas, le problème à résoudre dévient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{a\in\mathbb{R}^8} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_\rho(f(x_i) - y_i) \\ \text{avec} & f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{7} a_j x^j \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Résoudre ce problème avec $\rho = 0,6$.

3. Pour obtenir une enveloppe inférieure il faut ajouter un terme de régularisation de la forme $\|a\|^2$ à la fonction cout. Le problème s'écrit alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{a\in\mathbb{R}^8} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_\rho(f(x_i) - y_i) \ + \ \lambda \sum_{j=0}^{7} a_i^2 \\ \text{avec} & f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{7} a_j x^j \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Résoudre ce problème avec $\rho = 0,95$ et $\lambda = 0,01$ (ce qui devrait donner l'estimation de la figure de droite).