Algorithmique avancée et programmation C

Remise à Niveau

v2.3

avec solution

N. Delestre

Table des matières

Le pseudo code

Vous écrirez vos algorithmes avec le pseudo code utilisé dans la plupart des cours d'algorithmique de l'INSA Rouen Normandie. Voici la syntaxe des instructions disponibles :

Type de données

Les types de base sont : **Entier**, **Naturel**, **NaturelNonNul**, **Reel**, **ReelPositif**, **ReelPositifNonNul**, **ReelNegatif**, **ReelNegatifNonNul**, **Booleen**, **Caractere**, **Chaine de caracteres**.

On définit un nouveau type de la façon suivante :
Type Identifiant_nouveau_type **=** Identifiant_type_existant

On déclare un tableau de la façon suivante :
— Tableau à une dimension : **Tableau[**borne_de_début. . .borne_de_fin**] de** type_des_éléments
— Tableau à deux dimensions : **Tableau[**borne_de_début. . .borne_de_fin**][**borne_de_début. . .borne_de_fin**] de** type_des_éléments
— . . .

On définit une structure de la façon suivante :
Type Identifiant **= Structure**
identifiant_attribut_1 : Type_1
. . .
finstructure

Affectation

Le symbole d'affectation est ←.

Conditionnelles

Il y a trois instructions conditionnelles :

si condition **alors**
instruction(s)
finsi

si condition **alors**
instruction(s)
sinon
instruction(s)
finsi

cas où identifiant_variable **vaut**
valeur_1:
instruction(s)_1
. . .
autre :
instruction(s)
fincas

Itérations

L'instruction de base pour les itérations déterministes est le **pour** :
pour identifiant ←borne_de_début **à** borne_de_fin **faire**
instruction(s)
finpour

On peut itérer sur les éléments d'une liste, d'une liste ordonnée ou d'un ensemble grâce à l'instruction **pour chaque** :
pour chaque élément **de** collection
instruction(s)

finpour

Pour les itérations indéterministes nous avons deux instructions :

tant que condition **faire**
instruction(s)
fintantque

repeter
instruction(s)
jusqu'a ce que condition

Sous-programmes

Les fonctions permettent de calculer un résultat :
fonction identifiant (paramètre(s)_formel(s)) **:** Type(s) de retour

⌊**précondition(s)** expression(s) booléenne(s)

Déclaration variable(s) locale(s)

debut
instruction(s) avec au moins une fois l'instruction **retourner**
fin

Les procédures permettent de créer de nouvelles instructions :
procédure identifiant (paramètre(s)_formel(s)_avec_passage_de_paramètres)

⌊**précondition(s)** expression(s) booléenne(s)

Déclaration variable(s) locale(s)

debut
instruction(s)
fin

Les passages de paramètre sont : entrée (**E**), sortie (**S**) et entrée/sortie (**E/S**).

1 Affectation et schéma conditionnel

1.1 Échanger

Ecrire une procédure, échangerDeuxEntiers, qui permet d'échanger les valeurs de deux entiers.

Solution proposée:
procédure échangerDeuxEntiers **(E/S** a,b : **Entier)**

Déclaration temp : **Entier**

debut
temp ← a
a ← b
b ← temp
fin

1.2 Parité

Écrire une fonction booléenne, estPair, qui à partir d'un nombre entier strictement positif retourne VRAI si ce nombre est pair et FAUX sinon.

Solution proposée:

fonction estPair (a : **NaturelNonNul) : Booleen**
debut
  retourner a mod 2 = 0
fin

Ici, une contrainte apparait sur le paramètre qui doit être un entier strictement positif. Le type associé est alors **NaturelNonNul**.

1.3 Tri de trois entiers

Écrire une procédure, trierTroisEntiers, qui prend en entrée trois paramètres a, b et c contenant chacun un entier et qui les retourne triés par ordre croissant : a contient la valeur minimum, et c contient la valeur maximum.

Solution proposée:

```
procédure echanger (E/S a,b : Entier)
  Déclaration  temp : Entier
debut
  temp ← a
  a ← b
  b ← temp
fin

procédure trierDeuxEntiers (E/S a,b : Entier)
debut
  si a>b alors
    echanger(a,b)
  finsi
fin

procédure trierTroisEntiers (E/S a,b,c : Entier)
debut
  trierDeuxEntiers(a,b)
  trierDeuxEntiers(b,c)
  trierDeuxEntiers(a,b)
fin
```

1.4 Nombre de jours de congés

Dans une entreprise, le calcul des jours de congés payés s'effectue de la manière suivante : si une personne est entrée dans l'entreprise depuis moins d'un an, elle a droit à deux jours de congés par mois de présence (au minimum 1 mois), sinon à 28 jours au moins. Si cette personne est un cadre et si elle est âgée d'au moins 35 ans et si son ancienneté est supérieure à 3 ans, il lui est accordé 2 jours supplémentaires. Si elle est cadre et si elle est âgée d'au moins 45 ans et si son ancienneté est supérieure à 5 ans, il lui est accordé 4 jours supplémentaires, en plus des 2 accordés pour plus de 35 ans.

Écrire une fonction, nbJoursDeConges, qui calcule le nombre de jours de congés à partir de l'âge exprimé en année, l'ancienneté exprimée en mois et l'appartenance (booléenne) au collège cadre d'une personne.

Solution proposée:

```
fonction nbJoursDeConges (age : 16..65 ; ancienneteEnMois : NaturelNonNul ; cadre : Booleen)
: Naturel
   Déclaration  nbJours : Naturel
debut
   si ancienneteEnMois<12 alors
      nbJours ← ancienneteEnMois*2
   sinon
      nbJours ← 28
   finsi
   si cadre alors
      si age ≥ 35 et ancienneteEnMois ≥ 3*12 alors
         nbJours ← nbJours + 2
      finsi
      si age ≥ 45 et ancienneteEnMois ≥ 5*12 alors
         nbJours ← nbJours + 4
      finsi
   finsi
   retourner nbJours
fin
```

2 Schéma itératif

2.1 La multiplication

Écrire une fonction, multiplication, qui effectue la multiplication de deux entiers positifs (notés x et y) donnés en utilisant uniquement l'addition entière.

Solution proposée:

```
fonction multiplication (x,y : Naturel) : Naturel
   Déclaration  i, produit : Naturel
debut
   produit ← 0
   pour i ←1 à x faire
      produit ← produit + y
   finpour
   retourner produit
fin
```

2.2 Calcul de factorielle n

Écrire une fonction, factorielle, qui calcule pour un entier positif donné n la valeur de n !.

Solution proposée:

```
fonction factorielle (n : Naturel) : Naturel
   Déclaration  i, valeur : Naturel
debut
```

```
    valeur ← 1
    pour i ←1 à n faire
        valeur ← valeur * i
    finpour
    retourner valeur
fin
```

2.3 Partie entière inférieure de la racine carrée d'un nombre

Écrire une fonction, racineEntiere, qui retourne la partie entière de la racine carrée d'un entier positif donné n (sans utiliser racineCarree).

Solution proposée:

```
fonction racineEntiere (n : Naturel) : Naturel
    Déclaration   racine : Naturel
debut
    racine ← 1
    tant que racine * racine ≤ n faire
        racine ← racine + 1
    fintantque
    retourner racine - 1
fin
```

2.4 Multiplication égyptienne

Les égyptiens de l'antiquité savaient :

— additionner deux entiers strictement positifs,
— soustraire 1 à un entier strictement positif,
— multiplier par 1 et 2 tout entier strictement positif,
— diviser par 2 un entier strictement positif pair.

Voici un exemple qui multiplie 14 par 13 en utilisant uniquement ces opérations :

14×13	$= 14 + \mathbf{14} \times \mathbf{(13 - 1)}$	$= 14 + \mathbf{14} \times \mathbf{12}$
	$= 14 + \mathbf{(14} \times \mathbf{2)} \times \mathbf{(12 / 2)}$	$= 14 + \mathbf{28} \times \mathbf{6}$
	$= 14 + \mathbf{(28} \times \mathbf{2)} \times \mathbf{(6 / 2)}$	$= 14 + \mathbf{56} \times \mathbf{3}$
	$= 14 + 56 + \mathbf{56} \times \mathbf{(3 - 1)}$	$= 70 + \mathbf{56} \times \mathbf{2}$
	$= 70 + \mathbf{(56} \times \mathbf{2)} \times \mathbf{(2 / 2)}$	$= 70 + \mathbf{112} \times \mathbf{1}$
	$= 70 + 112$	$= 182$

Donner le corps de la fonction suivante :

```
fonction multiplicationEgyptienne (a,b : Naturel) : Naturel
```

Solution proposée:

```
fonction multiplicationEgyptienne (a,b : Naturel) : Naturel
    Déclaration   resultat : Naturel
debut
    resultat ← 0
    tant que b>0 faire
        si b mod 2=0 alors
            a ← 2*a
```

```
        b ← b div 2
      sinon
        resultat ← resultat+a
        b ← b-1
      finsi
   fintantque
   retourner resultat
fin
```

2.5 Intégration par la méthode des trapèzes

Écrire une fonction, integrale, qui retourne la valeur de l'intégrale d'une fonction f(x) réelle continue sur l'intervalle réel $[a, b]$. L'intégration consiste à découper cet intervalle, en n sous-intervalles de longueur Δ. L'intégrale d'un sous-intervalle [x, x + Δ] est approximée au trapèze de base Δ et de côtés f(x) et f(x + Δ). a, b et n vous sont donnés.

Remarque : la communication de f entre l'appelant et la fonction appelée, est réalisée de manière implicite (opération transparente pour vous). Cette remarque est valide pour tous les exercices numériques de ce type.

Solution proposée:

```
fonction integrale (a,b : Reel ; n : NaturelNonNul) : Reel
   |précondition(s)  a ≤ b
   Déclaration  x1, x2, Δ, somme : Reel
debut
   somme ← 0
   x1 ← a
   Δ ← (b - a)/n
   pour i ←1 à n faire
      x2 ← x1 + Δ
      somme ← somme + (f(x1) + f(x2))
      x1 ← x2
   finpour
   somme ← somme * Δ / 2
   retourner somme
fin
```

Soit vous introduisez une pré-condition sur (a, b) soit vous devez tenir compte dans l'algorithme pour le calcul de Δ et utiliser valeurAbsolue(b-a).

Version un peu optimisée :

```
fonction integrale (a,b : Reel ; n : NaturelNonNul) : Reel
   |précondition(s)  a ≤ b
   Déclaration  x1, x2, Δ, somme : Reel
debut
   somme ← 0
   x ← a
   Δ ← (b - a)/n
   pour i ←2 à n-1 faire
      x ← x + Δ
```

```
        somme ← somme + f(x)
    finpour
    somme ← Δ*(somme+((f(a)+f(b)) / 2))
    retourner somme
fin
```

2.6 Nombres premiers

Écrire une fonction booléenne, estPremier, qui à partir d'un entier strictement positif donné, retourne le résultat VRAI ou FAUX selon que le nombre est premier ou non. Pour mémoire, voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Solution proposée:

```
fonction estPremier (n : NaturelNonNul) : Booleen
    Déclaration  i : NaturelNonNul,
                 premier : Booleen
debut
    premier ← VRAI
    i ← 2
    tant que premier et i ≤ racineCarree(n) faire
        si n mod i = 0 alors
            premier ← FAUX
        finsi
        i ← i + 1
    fintantque
    retourner premier
fin
```

2.7 Recherche du zéro d'une fonction par dichotomie

Écrire une fonction, zeroFonction, qui calcule le zéro d'une fonction réelle f(x) sur l'intervalle réel [a, b], avec une précision epsilon. La fonction f ne s'annule qu'une seule et unique fois sur [a, b]. Pour trouver ce zéro, la recherche procède par dichotomie, c'est-à-dire divise l'intervalle de recherche par deux à chaque étape. Soit m le milieu de [a, b]. Si f(m) et f(a) sont de même signe, le zéro recherché est dans l'intervalle [m, b], sinon il est dans l'intervalle [a, m]. a, b et epsilon vous sont donnés.

Solution proposée:

```
fonction estMemeSigne (a,b : Reel) : Booleen
debut
    retourner a * b ≥ 0
fin

fonction zeroFonction (a,b, epsilon : Reel) : Reel
    ⌊précondition(s)  a ≤ b
    Déclaration  borneMin, milieu, borneMax : Reel
debut
```

```
    borneMin ← a
    borneMax ← b
    tant que (borneMax - borneMin) > epsilon faire
        milieu ← (borneMin + borneMax) / 2
        si estMemeSigne(f(borneMin), f(milieu)) alors
            borneMin ← milieu
        sinon
            borneMax ← milieu
        finsi
    fintantque
    retourner borneMin
fin
```

3 Analyse descendante

3.1 Nombre de chiffres pairs dans un nombre

On se propose de calculer le nombre de chiffres pairs d'un nombre donné. On suit pour cela l'analyse descendante présentée par la figure 1, tel que :

nbChiffresPairs résoud le problème demandé. Par exemple pour le nombre 821, on obtient 2.

nbChiffres permet d'obtenir le nombre de chiffres d'un nombre. Par exemple pour le nombre 821, on obtient 3.

iemeChiffre permet d'obtenir le ième chiffre d'un nombre. Par exemple pour 821, le premier chiffre est 1, le second 2 et le troisième est 8 (on ne traite pas les erreurs).

estPair permet de savoir si un nombre est pair.

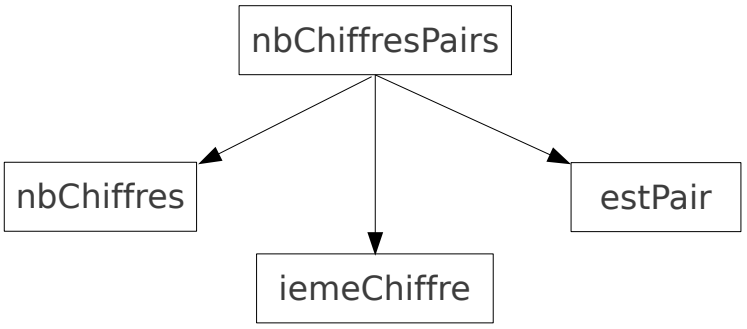
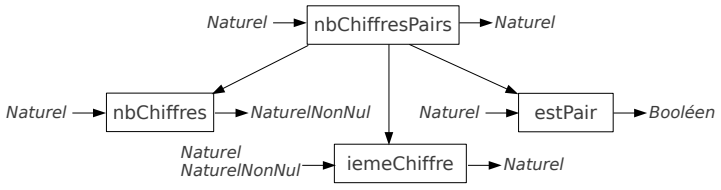


FIGURE 1 – Analyse descendante

1. Reprenez le schéma donné et complétez le (tel que nous l'avons vu en cours).
2. Donnez la signature des fonctions ou procédures des opérations données par l'analyse descendante.
3. Donnez le corps de la fonction ou procédure `nbChiffresPairs`.

Solution proposée:

1. 

2.
— **fonction** nbChiffresPairs (nb : **Naturel) : Naturel**
— **fonction** nbChiffres (nb : **Naturel) : Naturel**
— **fonction** iemeChiffre (nb : **Naturel**,) **: Naturel**
— **fonction** estPair (nb : **Naturel**,) **: Booleen**

3.
fonction nbChiffresPairs (nb : **Naturel) : Naturel**

Déclaration i : **Naturel**
resultat : **Naturel**

debut
resultat ← 0
pour i ←1 **à** nbChiffres(nb) **faire**
si estPair(iemeChiffre(nb,i)) **alors**
resultat ← resultat+1
finsi
finpour
retourner resultat
fin

3.2 Majuscule

La fonction $majuscule$ permet de calculer à partir d'une chaîne de caractères ch une chaîne de caractères ch' tel que tous les caractères minuscules, et uniquement eux, de ch soient transformés en majuscule dans ch'. La signature de cette est fonction est :
— **fonction** majuscule (uneChaine : **Chaine de caracteres) : Chaine de caracteres**
Ainsi $majuscule(" abc, ?ABC")$ donne la valeur $" ABC, ?ABC"$.

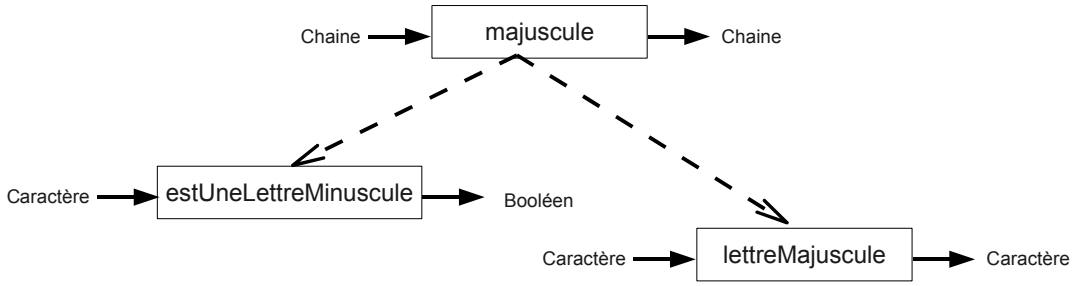
L'objectif de cet exercice est de donner l'algorithme de cette fonction en considérant que nous avons les trois fonctions suivantes :
— **fonction** longueur (uneChaine : **Chaine de caracteres) : Naturel**
— **fonction** iemeCaractere (uneChaine : **Chaine de caracteres**, position : **Naturel) : Caractere**
— **fonction** caractereEnChaine (unCaractere : **Caractere) : Chaine de caracteres**

3.2.1 Analyse

Pour calculer la version majuscule d'une chaîne de caractères ch, on a besoin de savoir calculer la majuscule d'un caractère c de ch lorsque c représente une lettre minuscule. Nous n'avons aucun a priori concernant la table de codage de ces caractères, si ce n'est que :
— le caractère 'a' précède le caractère 'b', qui précède le caractère 'c', etc.
— le caractère 'A' précède le caractère 'B', qui précède le caractère 'C', etc.

Proposez une analyse descendante de ce problème à l'aide du formalisme vu en cours.

Solution proposée:



3.2.2 Conception préliminaire

Déterminez la signature des fonctions ou procédures correspondant aux opérations de votre analyse descendante.

Solution proposée:
— **fonction** majuscule (ch : **Chaine de caracteres) : Chaine de caracteres**
— **fonction** estUneLettreMinuscule (c : **Caractere) : Booleen**
— **fonction** lettreMajuscule (c : **Caractere) : Caractere**

3.2.3 Conception détaillée

Donnez le corps de chacune de ces fonctions ou procédures.
Solution proposée:

```
fonction majuscule (ch : Chaine de caracteres) : Chaine de caracteres
   Déclaration  i : Naturel
                c : Caractere
                resultat : Chaine de caracteres
debut
   resultat ← ""
   pour i ←1 à longueur(ch) faire
      c ← iemeCaractere(ch,i)
      si estUneLettreMinuscule(c) alors
         resultat ← resultat+ caractereEnChaine(lettreMajuscule(c))
      sinon
         resultat ← resultat+ caractereEnChaine(c)
      finsi
   finpour
   retourner resultat
fin
fonction estUneLettreMinuscule (c : Caractere) : Booleen
debut
   retourner c≥'a' et c≤'z'
fin
fonction lettreMajuscule (c : Caractere) : Caractere
debut
   retourner chr(ord('A')+ord(c)-ord('a'))
```

fin
ou

fonction lettreMajuscule (c : **Caractere**) **: Caractere**

Déclaration i : **Caractere**
resultat : **Caractere**

debut
resultat ← 'A'
pour i ←'b' **à** c **faire**
resultat ← succ(resultat)
finpour
fin

3.3 Approximation de π par la méthode de Monte-Carlo

≪ Le terme méthode de Monte-Carlo, ou méthode Monte-Carlo, désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Si on tire aléatoirement un point $M(x, y)$ tel que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, la probabilité que le point M appartienne au disque de centre O et de rayon 1 est de $\frac{\pi}{4}$.

En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre $\frac{\pi}{4}$, donc de π, si le nombre de tirages est grand. (Cf. la figure 2) ≫(wikipédia)

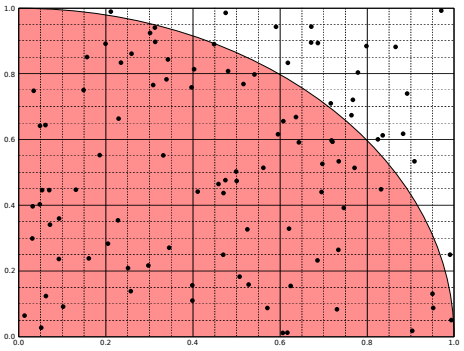


FIGURE 2 – Approximation de $\frac{\pi}{4}$ (wikipédia)

3.3.1 Analyse

On considère posséder le type `Point2D` avec les opérations `point2D`, `abscisse`, `ordonnee`. On considère posséder aussi une opération `reelAleatoire` permettant d'obtenir un nombre réel aléatoire compris entre deux bornes réelles.

Complétez l'analyse descendante proposée par la figure 3, sachant que :

— chaque point du diagramme (en entrée et en sortie des opérations) représente un type à définir ;
— vous ne pouvez pas modifier le nombre d'entrées et de sorties de chaque opération ;
— l'opération `pointAleatoire` permet d'obtenir un point aléatoire dans une zone rectangulaire d'un plan ;
— l'opération `estDansCercle` permet de savoir si un point est à l'intérieur d'un cercle (défini par son centre et son rayon).

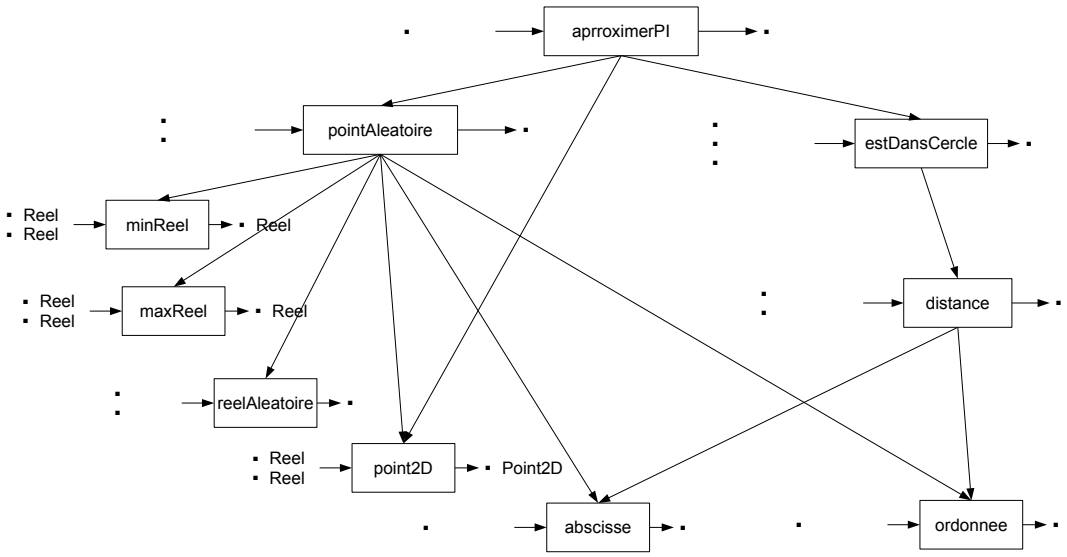
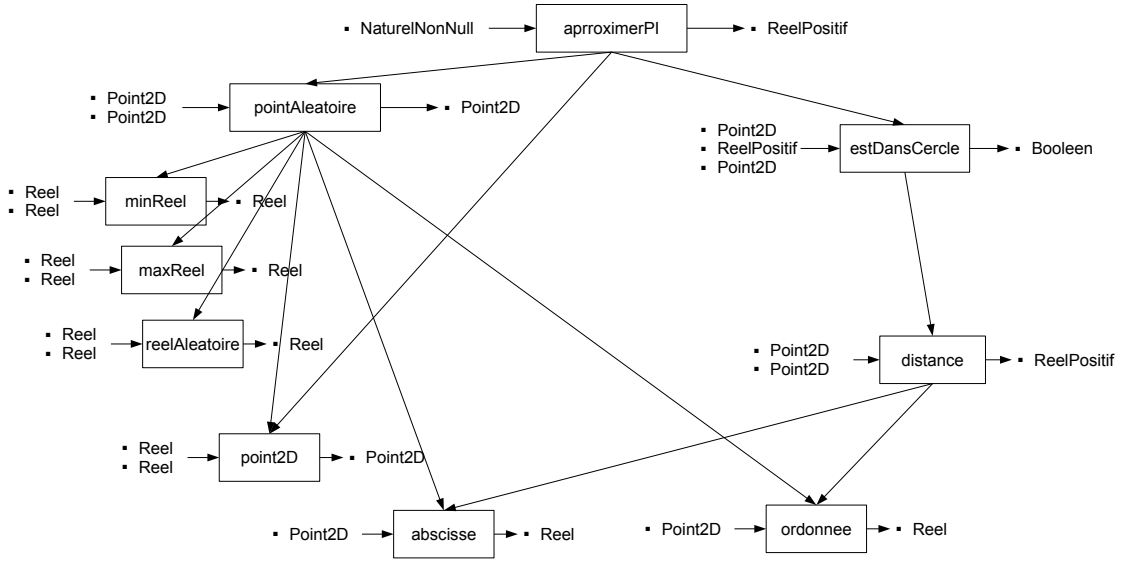


FIGURE 3 – Analyse descendante

Solution proposée:



3.3.2 Conception préliminaire

Donnez les signatures des fonctions et procédures issues de l'analyse descendante.

Solution proposée:

fonction aproximerPI (nb : **NaturelNonNul) : ReelPositif**

fonction pointAleatoire (pt1, pt2 : Point2D) **:** Point2D

⌊**précondition(s)** pt1≠pt2

fonction estDansCercle (ptC : Point2D, r : **ReelPositif**, pt : Point2D) **: Booleen**

fonction reelAleatoire (min, max : **Reel) : Reel**

⌊**précondition(s)** min<max

fonction minReel (min, max : **Reel) : Reel**
fonction maxReel (min, max : **Reel) : Reel**
fonction abscisse (pt : Point2D) **: Reel**
fonction ordonnee (pt : Point2D) **: Reel**
fonction distance (pt1,pt2 : Point2D) **: ReelPositif**

3.3.3 Conception détaillée

On représente le type `Point2D` de la façon suivante :
Type Point2D **= Structure**
x : Reel
y : Reel
finstructure
Donnez les algorithmes de toutes les fonctions et procédures de la conception préliminaire exceptées ceux des opérations `reelAleatoire`, `minReel` et `maxReel`.

Solution proposée:
fonction aproximerPI (nb : **NaturelNonNul) : ReelPositif**
debut
nbIn ← 0
pt0 ← point2D(0,0)
pt1 ← point2D(1,1)
pour i ←1 **à** nb **faire**
si estDansCercle(pt0,1,pointAleatoire(pt0,pt1)) **alors**
nbIn ← nbIn+1
finsi
finpour
retourner 4*nbIn/nb
fin
fonction pointAleatoire (pt1, pt2 : Point2D) **:** Point2D

⌊**précondition(s)** pt1≠pt2

debut
retourner point2D(reelAleatoire(minReel(abscisse(pt1),abscisse(pt2)), maxReel(abscisse(pt1),abscisse(pt2))),
reelAleatoire(minReel(ordonnee(pt1),ordonnee(pt2)), maxReel(ordonnee(pt1),ordonnee(pt2))))

fin
fonction estDansCercle (ptC : Point2D, r : **ReelPositif**, pt : Point2D) **: Booleen**
debut
retourner distance(ptC,pt)≤r
fin
fonction point2D (x,y : **Reel) :** Point2D

Déclaration resultat : Point2D

debut
resultat.x ← x
resultat.y ← y
retourner resultat

```
fin
fonction abscisse (pt : Point2D) : Reel
debut
   retourner pt.x
fin
fonction ordonnee (pt : Point2D) : Reel
debut
   retourner pt.y
fin
fonction distance (pt1, pt2 : Point2D) : ReelPositif
   Déclaration   diffx,diffy : Reel
debut
   diffx ← abscisse(pt1)-abscisse(pt2)
   diffy ← ordonnee(pt1)-ordonnee(pt2)
   retourner sqrt(diffx*diffx+diffy*diffy)
fin
```

4 Tableaux

Dans tous les exercices qui vont suivre, le tableau d'entiers t est défini comme étant de type **Tableau[**1..MAX**] d'Entier**.

4.1 Plus petit élément d'un tableau d'entiers

Écrire une fonction, minTableau, qui à partir d'un tableau d'entiers t non trié de n éléments significatifs retourne le plus petit élément du tableau.

Solution proposée:

```
fonction minTableau (t : Tableau[1..MAX] d'Entier ; n : Naturel) : Entier
   |précondition(s)   n ≥ 1 et n≤MAX
   Déclaration   i : Naturel,
                 min : Entier
debut
   min ← t[1]
   pour i ←2 à n faire
      si t[i]<min alors
         min ← t[i]
      finsi
   finpour
   retourner min
fin
```

4.2 Indice du plus petit élément d'un tableau d'entiers

Écrire une fonction, indiceMin, qui retourne l'indice du plus petit élément d'un tableau d'entiers t non trié de n éléments significatifs.

Solution proposée:

fonction indiceMin (t : **Tableau[**1..MAX**] d'Entier** ; n : **Naturel) : Naturel**

⌊**précondition(s)** n $\geq$ 1 et n$\leq$MAX

Déclaration i, indiceDuMin : **Naturel**

debut
```
indiceDuMin ← 1
pour i ←2 à n faire
    si t[i]<t[indiceDuMin] alors
        indiceDuMin ← i
    finsi
finpour
retourner indiceDuMin
```
fin

4.3 Nombre d'occurrences d'un élément

Écrire une fonction, nbOccurences, qui indique le nombre de fois où un élément apparaît dans un tableau d'entiers t non trié de n éléments.

Solution proposée:

fonction nbOccurences (t : **Tableau[**1..MAX**] d'Entier** ; n : **Naturel** ; element : **Entier) : Naturel**

Déclaration i, nb : **Naturel**

debut
```
nb ← 0
pour i ←1 à n faire
    si t[i] = element alors
        nb ← nb + 1
    finsi
finpour
retourner nb
```
fin

Ici, il n'est pas nécessaire d'introduire des préconditions sur la valeur de n. La sémantique de la fonction s'accorde très bien d'un tableau vide. La boucle sur n ne sera pas effectuée si le tableau est vide et le retour sera cohérent puisqu'égal à 0.

4.4 Recherche dichotomique

Écrire une fonction, rechercheDichotomique, qui détermine par dichotomie le plus petit indice d'un élément, (dont on est sûr de l'existence) dans un tableau d'entiers t trié dans l'ordre croissant de n éléments significatifs. Il peut y avoir des doubles (ou plus) dans le tableau.

Solution proposée:

fonction rechercheDichotomique (t : **Tableau[**1..MAX**] d'Entier** ; n : **Naturel** ; element : **Entier) : Naturel**

⌊**précondition(s)** estPresent(t,n,element)

Déclaration g,d,m : **Naturel**

debut

```
    g ← 1
    d ← n
    tant que g ≠ d faire
        m ← (g + d) div 2
        si t[m] > element alors
            d ← m-1
        sinon
            si t[m] = element alors
                d ← m
            sinon
                g ← m + 1
            finsi
        finsi
    fintantque
    retourner g
fin
```

5 Récursivité

5.1 Calcul de C(n,p)

Écrire une fonction `cnp`, qui en fonction des entiers positifs n et p, retourne le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.

Pour rappel :

$$C_p^n = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \text{ ou } n = p \\ C_p^{n-1} + C_{p-1}^{n-1} & \end{cases}$$

Solution proposée:

```
fonction cnp (n,p : naturel) : NaturelNonNul
    |précondition(s)  n≥p
debut
    si p=0 ou n=p alors
        retourner 1
    sinon
        retourner cnp(n-1,p)+cnp(n-1,p-1)
    finsi
fin
```

5.2 Multiplication égyptienne

Soit la multiplication égyptienne définie dans l'exercice 2.4. On se propose cette fois d'écrire cet algorithme de manière récursive.

1. Déterminer le ou les cas d'arrêt (particuliers). Déterminer le ou les cas généraux.
2. Donner le corps de la fonction suivante en utilisant un algorithme récursif :

   fonction multiplicationEgyptienne (a,b : **Naturel) : Naturel**

Solution proposée:

— Cas particuliers :
  — Si b=0 ou a=0 alors $a * b = 0$
  — Si $b = 1$ alors $a * b = a$
— Cas général, Si $b > 1$
  — Si b est paire alors $a * b = 2a * b/2$
  — Si b est impaire alors $a * b = a + a * (b - 1)$

```
fonction multiplicationEgyptienne (a,b :Naturel) : Naturel
debut
   si a=0 ou b=0 alors
      retourner 0
   sinon
      si b=1 alors
         retourner a
      sinon
         si b mod 2=0 alors
            retourner multiplicationEgyptienne(2*a,b div 2)
         sinon
            retourner a+multiplicationEgyptienne(a,b-1)
         finsi
      finsi
   finsi
fin
```

5.3 Des cercles

Supposons que la procédure suivante permette de dessiner un cercle sur un graphique (variable de type `Graphique`) :

— **procédure** cercle **(E/S** g : Graphique,**E** xCentre,yCentre,rayon : **Reel)**

5.3.1 Compréhension

Soit l'algorithme suivant [1] :

```
procédure cercles (E/S g : Graphique,E x,y,r : Reel, n : Naturel)
   Déclaration  rTemp : Reel
debut
   si n>0 alors
      rTemp ← r/(1+racineCarree(2))
      cercles(g,x,y+rTemp*racineCarree(2),rTemp,n-1)
      cercles(g,x,y-rTemp*racineCarree(2),rTemp,n-1)
      cercle(g,x,y,r)
      cercles(g,x+rTemp*racineCarree(2),y,rTemp,n-1)
      cercles(g,x-rTemp*racineCarree(2),y,rTemp,n-1)
   finsi
fin
```

L'instruction `cercles(g,1.0,1.0,1.0,3)` permet d'obtenir le graphique de la figure 4.

1. Pour comprendre les formules mathématiques de cet algorithme, il faut considérer le carré définit par les 4 centres des cercles, de rayon r', intérieurs au cercle courant, de rayon r. Son côté est de $2r'$. Les centres sont donc a une distance de $r'\sqrt{2}$ du centre du cercle courant et donc $r = r'\sqrt{2} + r'$

Numérotez les cercles (numéro à mettre au centre du cercle) suivant leur ordre d'apparition sur le graphique.

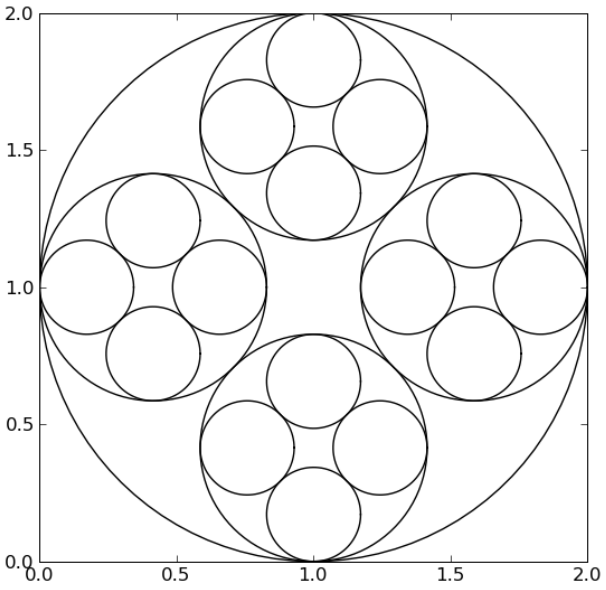
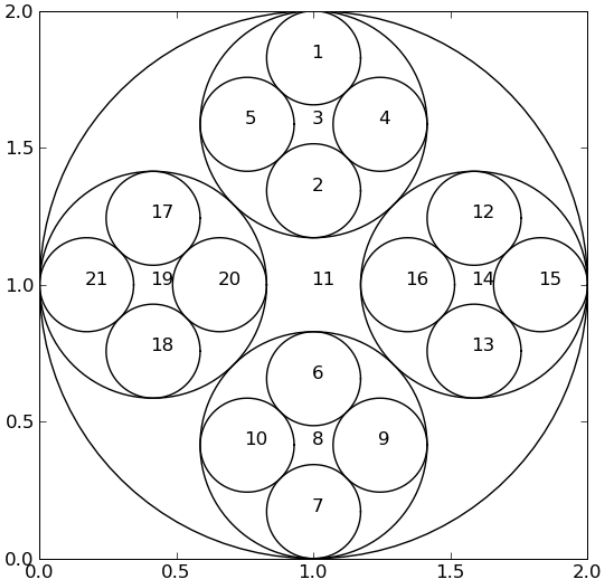


FIGURE 4 – Résultat d'un autre algorithme pour `cercles`

Solution proposée:



5.3.2 Construction

Proposez un autre algorithme de la procédure `cercles` qui, pour la même instruction `cercles(g,1.0, 1.0,1.0,3)`, affiche les cercles dans l'ordre proposé par la figure 5.

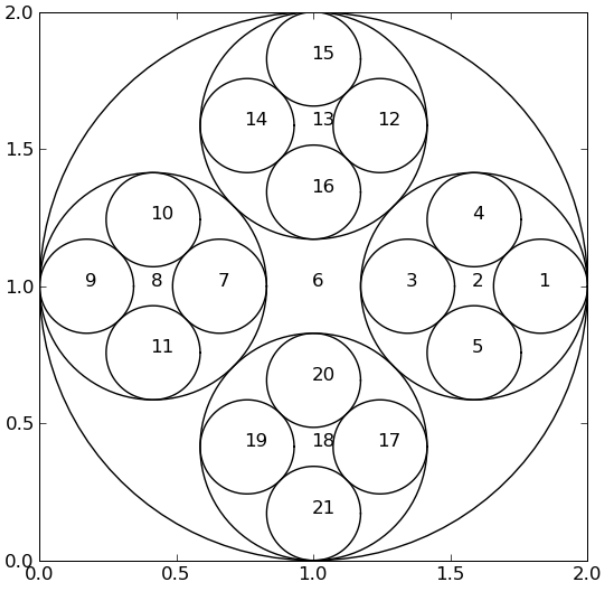


FIGURE 5 – Résultat d'un autre algorithme pour `cercles`

Solution proposée:

procédure cercles (**E/S** g : Graphique,**E** x,y,r : **Reel**, n : **Naturel)**

Déclaration rTemp : **Reel**

debut

si n>0 **alors**

rTemp ← r/(1+racineCarree(2))

cercles(g,x+rTemp*racineCarree(2),y,rTemp,n-1)

cercle(g,x,y,r)

cercles(g,x-rTemp*racineCarree(2),y,rTemp,n-1)

cercles(g,x,y-rTemp*racineCarree(2),rTemp,n-1)

cercles(g,x,y+rTemp*racineCarree(2),rTemp,n-1)

finsi

fin

5.4 Des étoiles

Rappels mathématiques

Les trois sommets d'un triangle équilatéral, dont l'un des côté est parallèle à l'axe des abscisses, de centre x_c, y_c de base b ont les coordonnées suivantes :

— $x_c, y_c + 2 * h/3$

— $x_c - b/2, y_c - h/3$

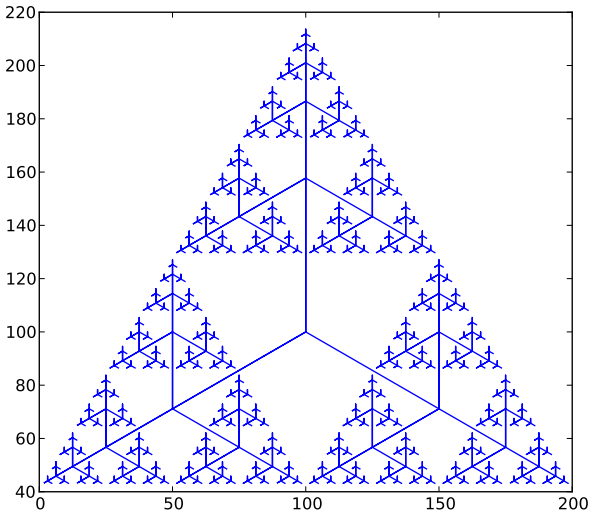


FIGURE 6 – Dessin récursif

— $x_c + b/2, y_c - h/3$
avec $h = \sqrt{b^2 - (b/2)^2}$

Questions

Supposons que la procédure suivante permette de dessiner un segment sur un graphique (variable de type `Graphique`) :

— **procédure** ligne **(E/S** g : Graphique,**E** x1,y1,x2,y2 : **Reel)**

L'objectif est de concevoir une procédure `dessinerCroix` qui permet de dessiner sur un graphique des dessins récursifs tels que présentés par la figure 6. La signature de cette procédure est :

— **procédure** dessinerCroix **(E/S** g : Graphique,**E** xCentre,yCentre,base : **Reel**, niveauRecursion : **Naturel)**

1. Lors du premier appel de cette procédure, donnez la valeur des quatre derniers paramètres effectifs afin d'obtenir le graphique de la figure 6.
2. Donnez le corps de cette procédure.

Solution proposée:

1. dessinerCroix(g,100,100,100,5)
2. Algo

   procédure dessinerCroix **(E/S** g : Graphique,**E** xCentre,yCentre,base : **Reel**, niveauRecursion : **Naturel)**

   Déclaration x1,y1,x2,y2,x3,y3,h : **Reel**

   debut

   si n>0 **alors**

   h ← racineCarree(b*b-(b/2)*(b/2))

   x1 ← xc

```
        y1 ← yc+2*h/3
        x2 ← xc-b/2
        y2 ← yc-h/3
        x3 ← xc+b/2
        y3 ← yc-h/3
        ligne(g,xc,yc,x1,y1)
        ligne(g,xc,yc,x2,y2)
        ligne(g,xc,yc,x3,y3)
        dessinerCroix(g,x1,y1,b/2,niveauRecursion-1)
        dessinerCroix(g,x2,y2,b/2,niveauRecursion-1)
        dessinerCroix(g,x3,y3,b/2,niveauRecursion-1)
    finsi
fin
```

6 Tris

6.1 Tri par insertion

Nous avons vu en cours que l'algorithme du tri par insertion est :

```
procédure triParInsertion (E/S t :Tableau[1..MAX] d'Entier,E nb :Naturel)
  Déclaration  i,j : Naturel
               temp : Entier
debut
  pour i ←2 à nb faire
    j ← obtenirIndiceDInsertion(t,i,t[i])
    temp ← t[i]
    decaler(t,j,i)
    t[j] ← temp
  finpour
fin
```

Donnez l'algorithme de la fonction obtenirIndiceDInsertion tout d'abord de manière séquentielle, puis de manière dichotomique. Démontrez que la complexité de ce dernier est-il en $O(log_2(n))$.

Solution proposée:

— Version séquentielle

```
fonction obtenirIndiceDInsertion (t : Tableau[1..MAX] d'Entier ; rang : Naturel ; entierAInserer : Entier) : Naturel
  |précondition(s)  rang > 1 et rang≤MAX
  Déclaration  i : Naturel
debut
  i ← 1
  tant que t[i]≤entierAInserer et i<rang faire
    i ← i+1
  fintantque
  retourner i
fin
```

— Version dichotomique

fonction obtenirIndiceDInsertion (t : **Tableau[**1..MAX**] d'Entier** ; rang : **Naturel** ; entierAInserer : **Entier) : Naturel**

⌊**précondition(s)** rang $>$ 1 et rang$\leq$MAX

Déclaration g, d, m : **Naturel**

debut
g $\leftarrow$ 1
d $\leftarrow$ rang
tant que g $\neq$ d **faire**
m $\leftarrow$ (g+d) div 2
si t[m] $>$ entierAInserer **alors**
d $\leftarrow$ m // l'intervalle $g..m$ contient alors l'indice recherché
sinon
g $\leftarrow$ m+1
finsi
fintantque
retourner g
fin

6.2 Tri shaker

La tri shaker est une amélioration du tri à bulles où les itérations permettant de savoir si le tableau et trié (et qui inverse deux éléments successifs $t[i]$ et $t[i+1]$ lorsque $t[i] > t[i+1]$) se font successivement de gauche à droite puis de droite à gauche.

Donnez l'algorithme du tri shaker.

Solution proposée:

procédure triShaker **(E/S** t :**Tableau[**1..MAX**] d'Entier**,**E** nb :**Naturel)**

Déclaration estTrie : **Booleen**
nbIteration,i,j : **Naturel**
sens : **Entier**

debut
sens $\leftarrow$ 1
j $\leftarrow$ 1
nbIteration $\leftarrow$ nb-1
repeter
estTrie $\leftarrow$ VRAI
pour i $\leftarrow$1 **à** nbIteration **faire**
si t[j]$>$t[j+1] **alors**
echanger(t[j],t[j+1])
estTrie $\leftarrow$ FAUX
finsi
j $\leftarrow$ j+sens
finpour
sens $\leftarrow$ -sens
j $\leftarrow$ j+sens
nbIteration $\leftarrow$ nbIteration-1
jusqu'a ce que estTrie
fin

7 Structure dynamique de données `ListeChaineeDEntiers`

Soit le type `ListeChaineeDEntiers` défini de la façon suivante :
Type ListeChaineeDEntiers **=** ^ NoeudDEntier
Type NoeudDEntier **= Structure**
entier : **Entier**
listeSuivante : ListeChaineeDEntiers
finstructure
Le principe d'encapsultation nous incite à utiliser ce type à l'aide des fonctions et procédures :

— **fonction** listeVide **() :** ListeChaineeDEntiers
— **fonction** estVide **(**uneListe : ListeChaineeDEntiers**) : Booleen**
— **procédure** ajouter **(E/S** uneListe : ListeChaineeDEntiers,**E** element : Entier**)**
— **fonction** obtenirEntier **(**uneListe : ListeChaineeDEntiers**) :** Entier
⌊**précondition(s)** $non(estVide(uneListe))$
— **fonction** obtenirListeSuivante **(**uneListe : ListeChaineeDEntiers**) :** ListeChaineeDEntiers
⌊**précondition(s)** $non(estVide(uneListe))$
— **procédure** fixerListeSuivante **(E/S** uneListe : ListeChaineeDEntiers,**E** nelleSuite : ListeChaineeDEntiers**)**
⌊**précondition(s)** $non(estVide(uneListe))$
— **procédure** supprimerTete **(E/S** l :ListeChaineeDEntiers**)**
⌊**précondition(s)** non estVide(l)
— **procédure** supprimer **(E/S** uneListe : ListeChaineeDEntiers**)**

7.1 Conception

Donnez le corps de la procédure `ajouter`.

Solution proposée:
procédure ajouter **(E/S** l :ListeChaineeDEntiers,**E** e :**Entier)**
Déclaration temp : ListeChaineeDEntiers
debut
temp ← l
allouer(l)
l^.entier ← e
fixerListeSuivante(l,temp)
fin

7.2 Utilisation

1. Proposez une procédure qui affiche tous les entiers d'une liste chaînées d'entier.
2. Proposez une fonction itérative qui permet de savoir si un entier est présent dans une liste chaînées d'entiers.
3. Proposez une fonction récursive qui permet de savoir si un entier est présent dans une liste chaînées d'entiers.

Solution proposée:

1. `afficher`

```
procédure afficher (E l :ListeChaineeDEntiers)
debut
    tant que non estVide(l) faire
        ecrire(obtenirEntier(l))
        l ← obtenirListeSuivante(l)
    fintantque
fin
```

2. `estPresent` iteratif

```
fonction estPresent (liste : ListeChaineeDEntiers ; cherche : Entier) : Booleen
    Déclaration   trouve : FAUX
debut
    trouve ← FAUX
    tant que non estVide(liste) et non trouve faire
        si obtenirEntier(liste) = cherche alors
            trouve ← VRAI
        sinon
            liste ← obtenirListeSuivante(liste)
        finsi
    fintantque
    retourner trouve
fin
```

3. `estPresent` récursif

```
fonction estPresent (liste : ListeChaineeDEntiers ; cherche : Entier) : Booleen
debut
    si estVide(liste) alors
        retourner FAUX
    sinon
        si obtenirEntier(liste) = cherche alors
            retourner VRAI
        sinon
            retourner estPresent(obtenirListeSuivante(liste),cherche)
        finsi
    finsi
fin
```