

Recherche et étude des moyens de réductions des traumatismes osseux liés à la chute chez les personnes âgées



Enseignant responsable
Didier VUILLAMY

Étudiants :

Liana ANDRIAMANGA

Siting LIANG

Manon PLAGNOL

Aï-lin BLAISE

Sharon POUPEL

Remerciements

Nous tenons à remercier tout particulièrement Didier Vuillamy de nous avoir proposé un sujet original liant la mécanique au corps humain. En tant que responsable du projet, il s'est toujours montré très disponible et à l'écoute de nos propositions. Nous remercions également sa femme d'avoir consacré du temps à la réalisation des boudins de sable présents sur le mannequin.

Nous tenons également à remercier Christophe Gautrelet, chercheur au département Mécanique, de nous avoir prêté de son temps, ainsi que les accéléromètres nous permettant de faire la partie pratique du projet.

Merci également à Cléante Langrée et à Pierre Gadeceau de nous avoir aidé à transporter le mannequin.

Date de remise du rapport : 16/06/2014

Référence du projet : STPI¹/P6/2013 – 2014

Intitulé du projet : Recherche et étude des moyens de réductions des traumatismes osseux liés à la chute chez les personnes âgées

Type de projet : *simulation et expérimentation*

Objectifs du projet : *A travers ce projet, nous cherchons à comprendre quelles sont les chutes qui affectent le plus les personnes âgées et à mettre en évidence les différents traumatismes liés à ces chutes. A partir de nos recherche, nous étudierons un système de protection de façon théorique mais également pratique. Pour cela, nous mettrons en place des équations traduisant la chute et nous réaliserons un mannequin pour observer le choc produit lors de celle-ci.*

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN
DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR
685 AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP 08- 76801 SAINT-ÉTIENNE-DU-ROUVRAY
TÉL : 33 2 32 95 66 21 - FAX : 33 2 32 95 66 31

Table des matières

Introduction	6
1 Méthodologie, organisation du travail	7
2 Travail réalisé et résultats	9
2.1 Les informations à savoir	9
2.1.1 Recherches des blessures les plus courantes	9
2.1.2 Systèmes à l'étude	9
2.1.3 Interview de spécialistes	13
2.2 Le système Airbag - Étude théorique	15
2.2.1 Modélisation et bilan des forces	15
2.2.2 Quand $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \theta_{lim}]$	16
2.2.3 Quand $\theta \in [\theta_{lim}, 0]$	17
2.2.4 Résolution des équations : interprétation	17
2.3 Étude expérimentale	20
2.3.1 Description du mannequin	20
2.3.2 Protocole expérimental	22
2.3.3 Les chutes	22
2.3.4 Difficultés pratiques	23
Conclusion et perspectives	25
Bibliographie	26
A Sondage	27
B Programme Exel : modèle linéaire à 3 masses, non articulé	30
C Modèle à 3 masses, équations essentielles	36
C.1 Description	36
C.2 Résolution des équations	37

D Programme Exel : modèle articulé à 3 masses	39
D.1 Programme principal	39
D.2 Unité	51

Table des figures

2.1	Sense-u, trackeur sportif	10
2.2	La B-Shoes	11
2.3	Les systèmes de gilet Airbag	12
2.4	Schéma théorique - Modèle	15
2.5	Bilan des forces	16
2.6	Le mannequin à nu : Eddy	21
2.7	Le mannequin après manipulation : Eddy	22
2.8	Choc lors d'une chute sur les fesses	22
2.9	Choc lors d'une chute "bâton"	23
A.2	Sondage en maison de repos - Partie 2	28
A.1	Sondage en maison de repos - Partie 1	29
C.1	Schéma du modèle à trois tiges articulées	36

Introduction

De nos jours, le principal danger pour les personnes âgées est le risque de chute. Les chutes représentent 80 % des accidents domestiques chez les plus de soixante cinq ans. Chuter entraîne le plus souvent des blessures plus ou moins sérieuses, allant de simples bleus aux fractures mortelles, et s'accompagne d'un traumatisme psychique qui n'est rien d'autre que la peur de rechuter. Cela est d'autant plus vrai qu'une fois que l'on commence à tomber, la probabilité de rechuter augmente, ce qui est un véritable problème. C'est ainsi que la chute s'est placée en tête des causes de décès par accidents chez les seniors.

Nous connaissons tous dans notre entourage des personnes victimes de ce fléau et nous sommes tous amenés à faire partie de la catégorie des "personnes âgées". Ainsi, du fait de l'allongement de la durée de vie et du vieillissement de la population, ce sujet nous concerne tous. La curiosité pour ce secteur d'avenir et l'envie de comprendre et de proposer quelques solutions au problème nous ont poussé à choisir ce sujet.

Nous allons dans un premier temps présenter nos recherches sur les chutes et les solutions existantes ainsi que l'avis de deux spécialistes. Puis nous allons bâtir l'étude théorique de la chute et nous finirons par exposer l'étude expérimentale comparative que nous avons réalisé à l'aide d'un mannequin.

Nous avons choisi d'étudier un système amortisseur de chute basé sur le principe d'un airbag et nous souhaitons savoir si ce système est viable et si nous pouvons suggérer des améliorations grâce à notre étude.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

- Nous nous sommes dans un premier temps répartis les informations à trouver.
 - Manon :
 - Mise en page du rapport - Rédactions
 - Interviews des professionnels
 - Sondage dans une maison de retraite
 - Analyse des résultats Excel
 - Ai-Lin :
 - Recherches sur les poids moyens de chaque partie du corps
 - Sondage dans une maison de retraite
 - Analyse des résultats Excel
 - Siting :
 - Recherches sur les systèmes de protection des chutes déjà existants
 - Liana :
 - Recherches sur les matériaux utilisables et les plus appropriés pour l'étude de la chute (argile, sable)
 - Regroupement de la bibliographie
 - Sharon :
 - Recherches sur les blessures, les causes et les conséquences des chutes
 - Rédaction du rapport
- Calendrier de travail

Dates	Travail effectué
7 Février	Découverte des objectifs à atteindre Echange d'idées avec l'enseignant responsable
14 Février	Pistes de recherches (bibliographiques + centres d'informations) Répartition des recherches bibliographiques à effectuer Recherches précises et échanges sur les systèmes déjà existants

Dates	Travail effectué
21 Février	Bilan sur les recherches bibliographiques et les démarches de sondage Echange avec l'enseignant responsable sur les systèmes déjà existant
14 Mars	Echange avec l'enseignant responsable sur la modélisation d'un airbag (quelles parties du corps protéger, grosseur, viabilité du projet ...)
21 Mars	Début de l'étude mécanique théorique de la chute : compréhension des détails à prendre en compte, séparation de la chute en deux phases, mise en place de certaines équations
28 Mars	Suite de l'étude mécanique de la chute : mise en place de toutes les équations nécessaires à la résolution théorique Parallèle entre les contraintes du problème et le mannequin à réaliser => Proposition de matériaux à utiliser
11 Avril	Suite de l'étude mécanique de la chute : mise en place de toutes les équations nécessaires à la résolution théorique Parallèle entre les contraintes du problème et le mannequin à réaliser => Proposition de matériaux à utiliser
18 Avril	Réception des matériaux pour le mannequin Mise en place d'une première ébauche de la structure principale mannequin suivant un modèle Décision de la proportion et du poids des boudins de sable (d'après les recherches effectuées)
16 Mai	Amélioration du mannequin Ajustement des mesures de la structure bois afin de coller le plus possible à la réalité Ajustement de la conception des boudins après avoir eu un premier aperçu fini
23 Mai	Montage des boudins de sables sur le mannequin
6 Juin	Amélioration du système de maintien des boudins sur le mannequin Acquisition des accéléromètres Début des tests pratiques sur le mannequin => Acquisition des résultats pratiques
13 Juin	Ajustement et correction du rapport écrit (formules, orthographe, grammaire)

Chapitre 2

Travail réalisé et résultats

2.1 Les informations à savoir

2.1.1 Recherches des blessures les plus courantes

Afin de savoir sur quoi centrer notre travail, nous nous sommes demandés quelles sont les chutes les plus couramment observées chez les personnes âgées. Il ressort de nos recherches que les chutes liées à des moments d'inattention et les chutes qui demandent des réflexes pour ne pas se blesser sont les plus nombreuses pour cette catégorie d'âge. Ces informations semblent tout à fait cohérentes sachant que les personnes âgées sont plus fragiles et ont des réflexes plus lents.

Toutefois, pour mieux se rendre compte de l'impact de ces chutes sur le corps humain, il est préférable de parler en terme de blessures et traumatismes causés. Ainsi, trois catégories de blessures sont à prendre en considération :

- Les fractures au niveau des articulations : poignet, cheville et coude, la fracture du poignet étant la plus courante
- Les fractures sur prothèses : hanche et genou
- Les traumatismes liés au tassement des os du dos notamment

Cependant, la recherche bibliographique, le sondage auprès de retraités et la prise de contact avec le Centre Local d'Information et de Coordination, centre réservé aux personnes âgées, se sont avérés décevants. La plupart des ouvrages disponibles sur le sujet traitent de la prévention des chutes et non de la chute en elle-même et peu de personnes ont accepté de répondre à nos questions.

2.1.2 Systèmes à l'étude

Nous allons exposer dans cette partie les différents systèmes "anti-chutes" que nous avons pu trouver sur internet et par l'intermédiaire des professionnels. Nous expliquerons leur fonctionnement ainsi que leurs limites.

Sense-u



FIGURE 2.1 – Sense-u, trackeur sportif

Sense-u est un trackeur sportif qui a pour objectif d’alerter les membres de la famille ou un prestataire de santé en cas de besoin. Il est léger, de petite taille et a une autonomie de 5 à 7 jours. Son prix est de 99,98 dollars.

Mais sense-u n’est pas un simple trackeur sportif. Le produit se distingue de ses semblables par sa capacité à s’adapter à toutes les catégories d’âge. En effet, le produit est équipé d’un capteur qui, selon les créateurs, est capable de distinguer les différentes activités pratiquées par l’homme : marcher, courir et dormir sont bien entendu les principales. Mais l’appareil serait également capable de détecter la pratique d’activités dangereuses, une situation de chute ou encore une mauvaise posture en position assise. Ainsi il peut être utilisé aussi bien par des personnes âgées que par des parents qui souhaitent suivre l’évolution des leurs enfants au quotidien.

La principale limite de ce produit est qu’il n’a pas la capacité d’agir directement sur une personne en cas de chute. C’est un collecteur de données. Le temps nécessaire pour venir en aide à une personne peut donc être long. Dans ce cas, le dispositif s’avère inutile.

B-shoes



FIGURE 2.2 – La B-Shoes

B-shoes (B pour balance) est une "chaussure intelligente" développée par la société israélienne qui porte le même nom. L'idée du produit est née à la suite d'une chute de l'un des parents des co-fondateurs. Ainsi, les créateurs ont étudié les résultats médicaux sur la bio-mécanique du corps humain, le centre de gravité et les mouvements dits "réflexes" que font les personnes en bonne santé lors d'un déséquilibre, dans l'espoir de trouver une solution technique au problème de la chute.

Le produit, qui a l'aspect d'une chaussure de marche classique, corrige la perte d'équilibre grâce à un "pas en arrière". Pour cela, la chaussure intègre des capteurs de pression, un dispositif de mouvement intégré et une batterie rechargeable. En utilisant un microprocesseur et des algorithmes intelligents brevetés, le dispositif fait rouler la chaussure doucement et légèrement vers l'arrière jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. La fiabilité des algorithmes garantit une utilisation optimale de la chaussure et une détection précoce du déséquilibre.

Alors que le produit est encore au stade du prototype, la société prévoit d'étendre sa performance en développant un capteur qui peut donner à l'utilisateur une alerte s'il s'approche d'un objet ou d'une situation qui pourrait lui faire perdre l'équilibre.

Cependant, le produit rencontre deux limites majeures :

- La chaussure se déplace uniquement vers l’arrière : on peut se demander si la chaussure est réellement efficace dans tous les cas de figure comme lors d’un déséquilibre latéral.
- La chaussure se déplace lentement : Dans le cas d’une chute rapide, le produit n’apporte rien de plus qu’une chaussure normale. La B-shoes n’est efficace que lors de légers déséquilibres.

Airbag humain



FIGURE 2.3 – Les systèmes de gilet Airbag

L’airbag humain, inventé et conçu par la société japonaise Prop, a la forme d’un gilet court. Il pèse 1,1 kg et se porte comme un habit classique. Il a été conçu spécialement pour les personnes âgées et plus particulièrement pour les personnes souffrant d’épilepsie.

Pour cela, le gilet est équipé de capteurs et de deux poches d’air séparées dont l’une se situe au niveau de la tête et l’autre au niveau du bas de la colonne vertébrale et autour des hanches. Le dispositif est capable de réagir en 0,1 seconde. Lorsque les capteurs détectent une situation de chute, les deux poches d’air se gonflent jusqu’à atteindre la taille de trois ballons de football chacun. Cependant, une certaine souplesse de l’airbag est conservée au niveau de la tête et des hanches pour limiter les micro traumatismes dus aux chocs.

Le prix et la garantie d'une protection en cas de chute arrière uniquement sont les deux défauts principaux de ce produit. En effet, l'airbag humain coûte 700€, soit 851,17 €, ce qui peut paraître excessif. De plus, le produit ne protège l'utilisateur que dans le cas d'une chute arrière et est inutile pour toutes les autres chutes.

2.1.3 Interview de spécialistes

Docteur Frédéric NICOLAU - Chirurgien orthopédiste

Quelles sont les fractures les plus fréquentes chez les personnages âgés et liées aux chutes ?

Les fractures les plus fréquentes chez la personne âgée sont :

- la fracture du poignet
- la fracture du col fémoral et pertrochantérienne ¹
- la fracture par tassement des corps vertébraux dorsolombaires

D'autres fractures peuvent survenir telles que la fracture de la cheville, de la tête humérale ², du coude, des prothèses de hanche et de genou etc

Quels sont les facteurs de risques selon vous ?

L'âge et l'ostéoporose sont les facteurs de risques, pourquoi ?

L'âge entraîne plus de chutes. La diminution sensorielle par l'âge fait qu'il y a plus d'accidents, la personne ne voit pas la marche, n'entend pas un chien qui arrive, peut avoir un vertige positionnel à cause de son oreille interne etc...

Les pathologies cardiovasculaires font des pertes de connaissance tels qu'un rétrécissement aortique, un trouble du rythme cardiaque, une hypotension orthostatique La iatrogénicité ³ des médicaments : médicaments à visée neurologique, les antihypertenseurs etc. L'altération simple de l'état général (fatigue).

Tous ces exemples font qu'une personne âgée chute plus souvent. Lorsque la chute débute, la personne ne peut pas se rattraper car elle a moins de réflexes, ses muscles sont moins puissants, et ses articulations raides et douloureuses l'empêchent de bien tomber. La chute est donc plus brutale sans être amortie par le corps.

Connaissez vous les systèmes proposés ? Lequel vous paraît le plus adapté ?

Je ne connais pas ces deux systèmes, mais je pense que le système d'airbag est plus ingénieux, car une fois la chute amorcée, elle devient presque inévitable pour les raisons décrites plus haut.

1. fracture complexe de l'extrémité supérieure du fémur

2. extrémité supérieure de l'humérus, os entre le coude et l'épaule

3. une observation clinique entre effets secondaires et intrication psycho-organique

Monsieur Frédéric PY - Kinésithérapeute - Ostéopathe

Quelles sont les fractures les plus fréquentes chez les personnages âgées et liées aux chutes ?

Les fractures les plus observées sont celles du poignet et du col du fémur. En tombant, le poids du corps se redirige sur une des jambes, le col du fémur étant fragile avec l'âge, il casse. Le poignet s'explique plus facilement : la personne essaie de se rattraper ou d'amortir la chute avec ses mains.

Quels sont les facteurs de risque selon vous ?

Il y en a énormément, cela va des médicaments à la marche que l'on ne voit pas, ou le trottoir. Par exemple une personne âgée qui se lève la nuit peut tomber à cause de somnolences dues à ses médicaments pour le cœur ou autres. Après quatre-vingt ans, l'espérance de vie après une chute avec fracture est d'un an. Il est dur de se remettre de ce type de blessure à cet âge, l'alitement provoque une baisse de moral et le corps est plus faible. La personne peut avoir peur de sortir à nouveau si la chute s'est produite en extérieur, elle s'isole.

Connaissez vous les deux systèmes proposés ? Lequel vous paraît le plus adapté ?

Je ne connaissais pas ces dispositifs. Le dispositif d'airbag semble intéressant mais est plus adapté pour les gros chuteurs que pour le grand public. Selon moi, l'effort doit être fait sur la prévention des chutes et non pas sur les moyens pour limiter les dégâts. Nous devons agir sur des détails du quotidien comme un système d'éclairage automatique dans les maisons, des sols adaptés, inciter les personnes âgées à faire du sport afin d'éviter qu'ils ne perdent leur agilité musculaire.

Analyse des réponses

Nous pouvons voir que les deux spécialistes s'accordent à dire que le problème des chutes est réellement important. Comme nous avons pu le voir avant, il n'existe pas une unique cause, ni une seule solution à cette question. Il apparaît que le système d'airbag est le plus apprécié, nous allons donc maintenant l'étudier plus en détail.

2.2 Le système Airbag - Étude théorique

2.2.1 Modélisation et bilan des forces

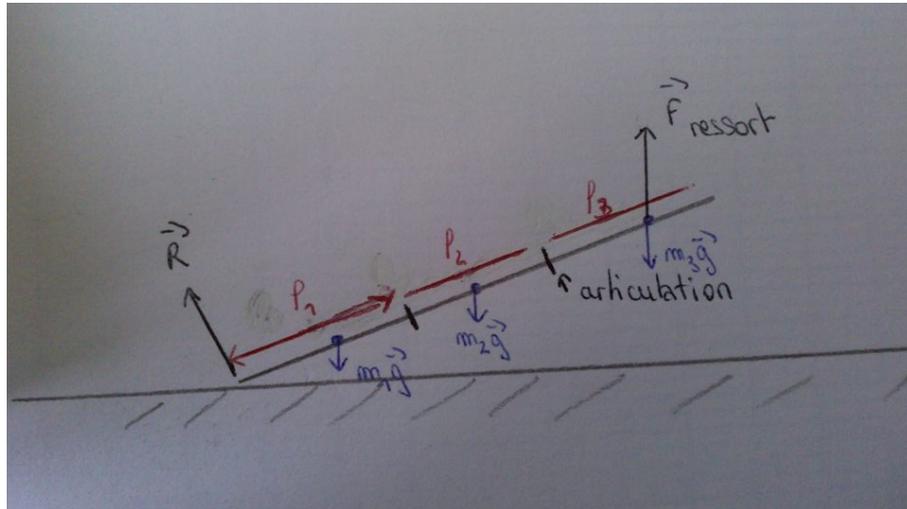


FIGURE 2.4 – Schéma théorique - Modèle

Nous avons choisi de modéliser une personne par une "poutre" rigide à laquelle on ajoute trois masses de poids m_1, m_2, m_3 . On fixe cette poutre au sol tel que θ soit l'angle entre le sol et cette dernière.

On sépare dès lors le problème en deux cas :

- 1^{er} cas : avant que l'airbag ne touche le sol, on assimile ce moment à une chute libre. Ce moment se déroule de l'angle $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \theta_{lim}]$
- 2^{ème} cas : le moment où l'airbag se déploie et touche le sol, à savoir quand $\theta \in [\theta_{lim}, 0]$. On assimile l'airbag à un ressort de constante de raideur k et de longueur initiale l_0 .

Pour la suite, on pose : $l = l_1 + l_2 + l_3$ et $m = m_1 + m_2 + m_3$

Procédons maintenant au bilan des forces :

- 1^{er} cas : seul le poids \vec{P} intervient, avec $\vec{P} = m * \vec{g}$
- 2^{ème} cas : au poids s'ajoute $\vec{F}_{ressort}$, la force du ressort telle que :

$$\vec{F}_{ressort} = k * \Delta l \vec{u}$$

On note maintenant O le point où est fixé la poutre dans le sol, tel que $O = (0, 0)$. Soient M_1, M_2 et M_3 les centres de gravité de chacune des parties du mannequin (tronc, cuisses, mollets).

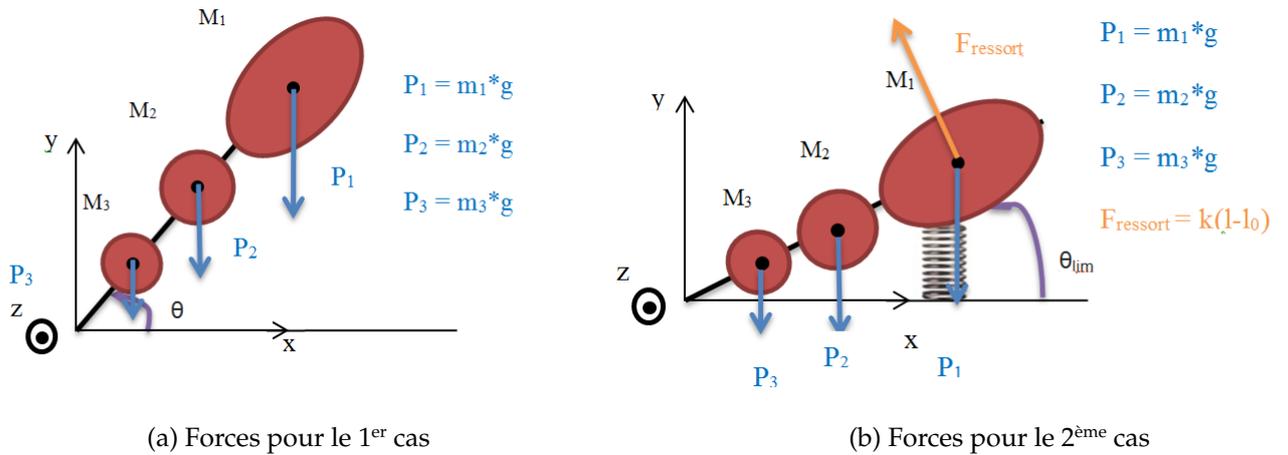


FIGURE 2.5 – Bilan des forces

2.2.2 Quand $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \theta_{lim}]$

Lorsque θ appartient à cet intervalle, on a l'inertie \mathcal{J} tel que :

$$\mathcal{J} = \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right)^2 * m_1 + \left(\frac{l_2}{2} + l_3\right)^2 * m_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 * m_3$$

$$\mathcal{J} * \ddot{\theta} = -\cos(\theta) \left(\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right)^2 * m_1 + \left(\frac{l_2}{2} + l_3\right)^2 * m_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 * m_3 \right) g$$

D'un point de vue dynamique, nous avons :

$$(m_1 + m_2 + m_3) * L_G = m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right) + m_3 \left(l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2} \right) \quad (2.1)$$

Plaçons nous dans un repère (O, x, y, z) tel que \vec{x} suit le sol, \vec{y} à la verticale et \vec{z} viens vers nous, tel que $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit une base orthonormée .

$$\text{On a alors : } \overrightarrow{OM} = l \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } m * \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dès lors : } \overrightarrow{OM} \wedge ml * \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne l'accélération, nous avons :

$$\vec{\ddot{\theta}}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \sin(\theta) - \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ \ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Avec les conditions initiales nous avons donc pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \theta_{lim}]$:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{-lmg}{\mathcal{J}} \cos(\theta) \\ \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ \dot{\theta}(t=0) = v_0 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.3 Quand $\theta \in [\theta_{lim}, 0]$

On doit ici prendre en compte $F_{ressort}$ car elle entraîne un moment cinétique.

$$F_{ressort} = k * \Delta l = k(l - l_0) = kl_*(\sin(\theta) - \sin(\theta_{lim}))$$

où :

$$l_0 = l_* \sin(\theta_{lim})$$

$$l = l_* \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \sigma = -\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) * F_{ressort} = -l\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) * k(\sin(\theta) - \sin(\theta_{lim}))$$

On a donc au final :

$$\ddot{\theta} = \frac{-lmg * \cos(\theta) - l\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) * k * (\sin(\theta) - \sin(\theta_{lim}))}{I} \sigma \quad (2.4)$$

Cette expression est positive car : $\theta_{lim} > \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta_{lim}) > \sin(\theta)$

$$\begin{cases} \sigma \ddot{\theta} = -lmg \cos(\theta) + kl\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) * (\sin(\theta_{lim}) - \sin(\theta)) \\ t = t_{lim} \begin{cases} \theta = \theta_{lim} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_{lim} \end{cases} \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.4 Résolution des équations : interprétation

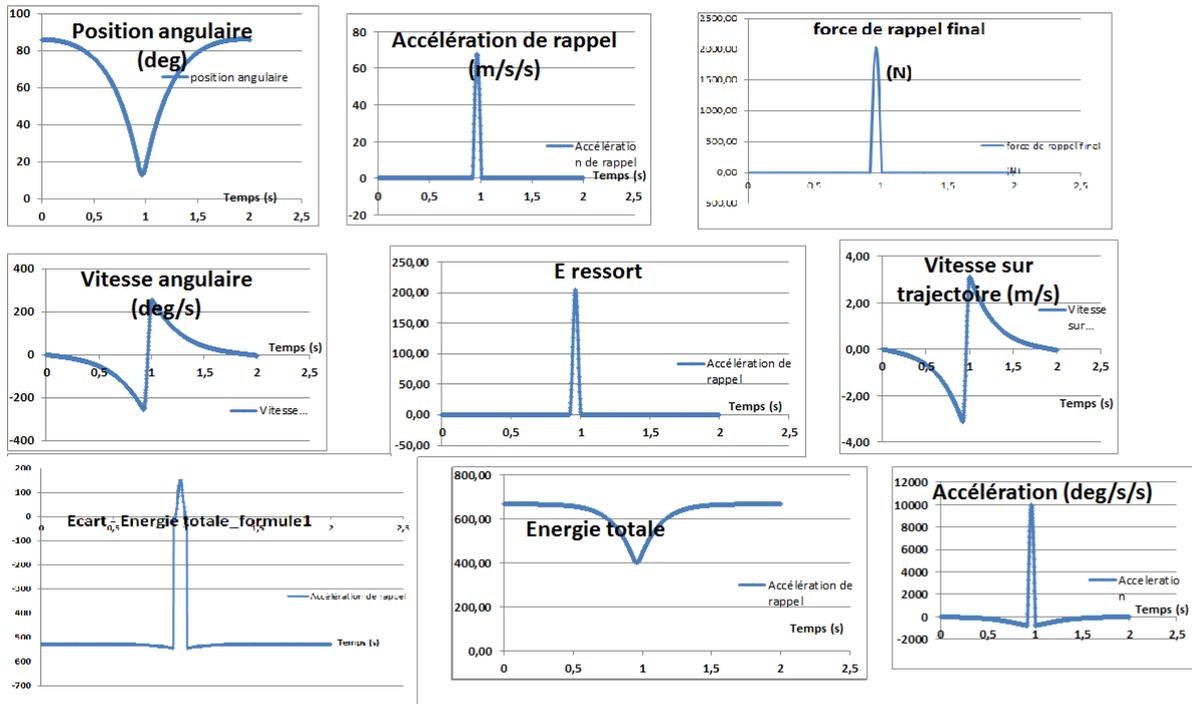
Monsieur Vuillamy nous a fourni un algorithme sur Excel permettant de résoudre les équations différentielles (2.3) et (2.5). Nous avons donc choisi d'interpréter les résultats observés pour le cas 1 et le cas 2 définis précédemment. Ainsi, nous avons différents facteurs d'influence que nous pouvons étudier, à savoir :

- les longueurs du point de fixation O aux centres de gravité M_1 , M_2 et M_3 : l_1 , l_2 et l_3
- les masses m_1 , m_2 et m_3 vues précédemment
- la longueur entre le point d'accrochage et le ressort
- la raideur k du ressort
- la vitesse initiale de chute v_0
- l'angle initial de la chute θ_0
- l'angle limite θ_{lim}

Nous partons d'un individu témoin de 1,70m ($l_1 = 70cm$, $l_2 = 50cm$ et $l_3 = 50cm$), pour 54 kilogrammes. $\theta_0 = 86^\circ$, $\theta_{lim} = 20^\circ$, $m_1 = 40$, $m_2 = 10$ et $m_3 = 6$, $k = 10000N.m^{-1}$ et $v_0 = -0.01rad.s^{-1}$.

Pour l'individu témoin, nous obtenons les graphiques suivants :

On note une inertie totale de $23.1kg.m^2$



Influence de l_1 , l_2 et l_3

Pour faire cela, nous allons modifier la taille globale de l'individu. Nous prendrons donc :

- 1.40 m
 - tronc : 0.5 m
 - cuisses : 0.45 m
 - mollets : 0.45 m
- 2.00 m
 - tronc : 0.8 m
 - cuisses : 0.6 m
 - mollets : 0.6 m

Dans le cas de la personne de 1.40 mètre, nous observons que le contact avec le ressort se fait plus tôt. Son énergie totale est plus faible, on passe de 230Joules (J) à 180J.

L'accélération de la victime lors de la chute est plus importante, ce qui semble logique dans la mesure où le contact avec le ressort se fait légèrement plus tôt que pour l'individu témoin.

Contrairement au graphique témoin de l'énergie totale, ici elle reste globalement stable autour de 200J. On observe un léger pic au moment du contact avec le ressort à 245 J.

La force de rappel du ressort diminue elle aussi. Son accélération de rappel diminue également, on passe en effet de 60 m.s^{-2} à 50 m.s^{-2} . L'énergie du ressort ($E_{ressort}$) baisse elle aussi, et passe donc de 260 J à 200 J.

Pour finir, l'inertie diminue à 12.8 kg.m^{-2} , ce qui est logique dans la mesure où elle

dépend de la taille.

Passons maintenant à notre deuxième victime, plus grande que le témoin.

Nous observons le strict contraire de ce que nous avons observé avant, la chute vient plus tard et ce qui avait diminué dans le cas de la personne petite se voit ici augmenter.

Nous pouvons donc voir que lors de la chute, la taille de la personne ne semble compter que relativement peu dans les calculs, nous sommes à quelques centaines de joules de différences à chaque fois. Cela joue essentiellement sur le temps de chute et donc l'accélération.

Influence de m_1 , m_2 et m_3

Pour faire cela, nous allons modifier la masse globale de l'individu. Nous prendrons donc :

- 100 kg
 - tronc : 70 kg
 - cuisses : 24 kg
 - mollets : 6 kg

La position angulaire, la vitesse sur trajectoire et la vitesse angulaire ne changent pas.

En revanche, l'écart d'énergie totale double quasiment. Passant de 240 J à presque 500 J. L'énergie totale varie peu comme pour le témoin, mais entre 500 et 600 J, ce qui est encore le double du témoin.

En ce qui concerne le ressort. Son énergie double. L'accélération de rappel diminue, ce qui semble logique puisque le poids est plus important. Mais la force de rappel augmente.

L'inertie a doublé.

Le poids de la personne ayant doublé, on peut observer que les personnes en surpoids devront supporter un choc beaucoup plus important et qui sera moins amorti par l'airbag ou un système similaire.

Influence de la longueur entre le point d'accrochage et le ressort

Cette grandeur nous donne l'endroit auquel est placé le système, nous avons pour le moment considéré qu'il était en haut. Nous le plaçons ici au niveau des hanches.

Nous voyons que tout reste identique, excepté l'accélération qui passe de 9000 $deg.s^{-2}$ à 5500 $deg.s^{-2}$. La force de rappel finale augmente légèrement de quelques centaines de newton.

Au final, cette grandeur n'intervient pas de manière significative dans la chute et son amortissement.

Influence de la raideur k du ressort

En diminuant très fortement la constante de raideur (on la met à l'ordre de 10, et non plus de 10^4 afin d'exagérer le modèle), on observe que le corps touche le sol avec une vitesse, et qu'il n'y a donc aucun amortissement. La force de rappel

du ressort est alors plus faibles.

Les énergies développées sont elles aussi plus faible. Néanmoins, quand la raideur k est trop importante, le choc que subit le corps est très grand, il faut donc choisir l'airbag tel qu'il ne soit pas trop dur ni trop mou.

Influence de la vitesse initiale de chute v_0

Nous partions du principe que le corps n'avait pas de vitesse initiale lors de la chute. Nous lui en appliquons maintenant une.

Il apparaît qu'il n'y a pas de modification de forces ou d'énergie, du moins pas significatives. Cependant, comme nous pouvions l'imaginer, la chute se produit plus rapidement et l'individu touche le sol bien plus rapidement ce qui rend la possibilité d'empêcher la chute impossible ou presque.

Influence de l'angle initial de la chute θ_0

Le témoin possédait un angle initial de chute à $86deg$. Nous allons le modifier. En effet, nous avons pu fréquemment observer dans la rue que les personnes très âgées se tiennent souvent courbées. Nous plaçons maintenant cet angle de départ à $65deg$.

En ayant un temps de chute de 2 secondes dans le modèle (temps observé de la modélisation, la chute dure moins d'une seconde), nous observons des graphiques représentant deux chutes à la suite! Nous pouvons donc dire qu'avec un angle plus faible la chute se produit bien plus vite. Les forces et énergies dépendants du ressort restent quant à elles plus ou moins les mêmes que celle du témoin.

Influence de l'angle limite θ_{lim}

Nous choisissons ici de diminuer cet angle, ce qui correspondrait à avoir un airbag de faible épaisseur. Nous n'observons pas dans ce cas de différences significatives avec le témoin. L'angle limite n'intervient que peu dans la violence de la chute.

2.3 Étude expérimentale

2.3.1 Description du mannequin

Nous allons simuler une chute afin d'obtenir une approximation du choc subi par la personne lors d'une chute.

Le mannequin, Eddy, fait environ 1m70 pour 60 kilos. Il est obtenu à partir d'une poutre de bois, découpée en trois parties qui sont reliées par des charnières. Chaque morceau représente une partie du corps (mollets, cuisse, ou tronc-tête). Nous les avons ensuite entouré de boudins de sables afin de lester le mannequin. La partie haute pèse 40kg, les cuisses 10kg et les mollets 4kg. Les pieds sont fixés à un support, lestés par nos poids respectifs lors des manipulations. Le mannequin tombe en arrière à une vitesse v et sa tête vient heurter le sol. On évalue la force grâce à

un accéléromètre.



FIGURE 2.6 – Le mannequin à nu : Eddy

Nous avons lors de ces essais pu obtenir les courbes d'accélération au centre de gravité. Ainsi, nous avons pu observer deux types de chutes :

- La chute sur les fesses. Son étude se justifie par l'étude de la fracture du col du fémur.
- La chute "bâton", c'est à dire, une chute en arrière où la personne ne met pas ses mains pour se rattraper, et chute de façon longiligne.

2.3.2 Protocole expérimental

Pour réaliser les expériences, nous avons embobiné Eddy dans des bâches afin d'éviter que les boudins de sable ne bougent lors des chutes. Puis nous avons placé deux accéléromètres de capacité 50 G⁴ au niveau du genou du mannequin et de sa tête afin d'observer les variations des chocs au moment du contact avec le sol. Nous l'avons ensuite fait tomber, sur les fesses ou non suivant les résultats voulus.



FIGURE 2.7 – Le mannequin après manipulation : Eddy

2.3.3 Les chutes

La chute sur les fesses

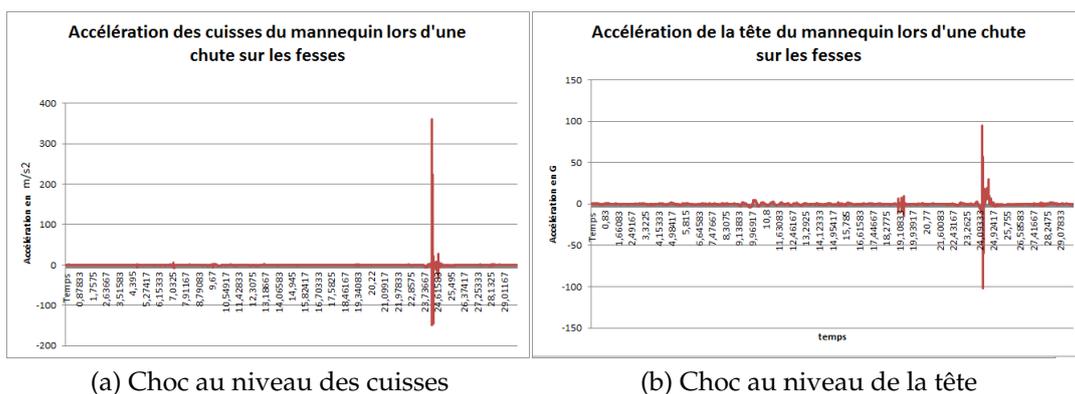


FIGURE 2.8 – Choc lors d'une chute sur les fesses

Comme nous pouvons le voir sur ces graphiques, le pic au moment de la chute est assez impressionnant, de l'ordre de 90G pour la tête et de 40G pour les cuisses.

4. $1G = 9.81m.s^{-2}$

Il apparaît donc ici que la masse en plus de la hauteur par rapport au sol joue un rôle. Il semblerait que le choc soit moins important pour un objet "léger" et petit, que grand et lourd. Cela vient en effet confirmer les hypothèses et les constatations que nous avons émises lors de l'observation du modèle Excel. De plus, les valeurs que nous trouvons, bien que très impressionnantes, sont en adéquation avec celles que nous avons dans le modèle théorique.

La chute "bâton"

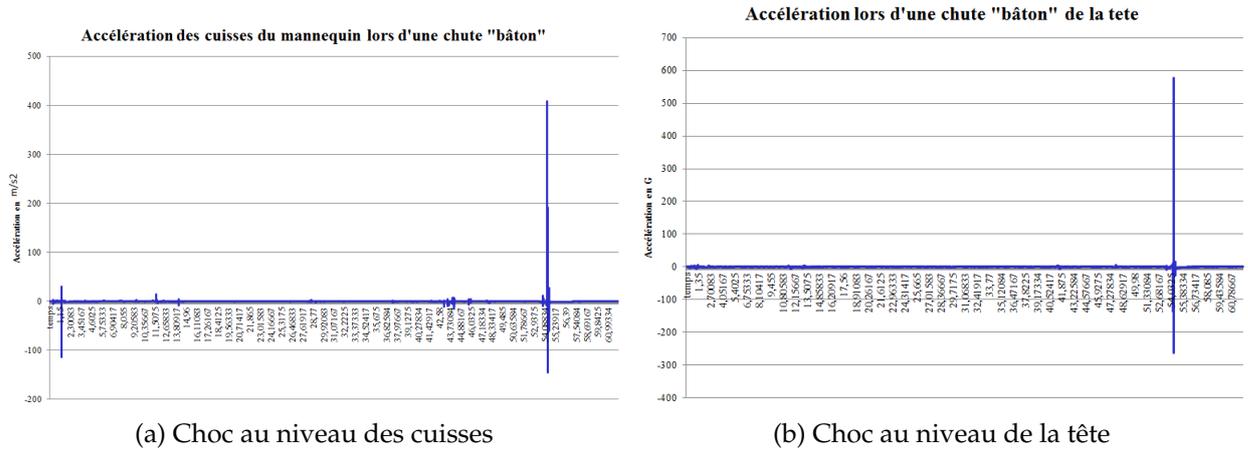


FIGURE 2.9 – Choc lors d'une chute "bâton"

Nous avons ici une accélération de 40G pour les cuisses et de 50-60G pour la tête au moment du choc. Le choc encaissé par les cuisses est donc le même que pour une chute sur les fesses. En revanche, la tête semble avoir beaucoup moins reçu de chocs dans ce cas de figure. Nous pouvons supposer que cela se justifie par l'absence de regain de vitesse après la prise du choc sur les fesses.

Ces expériences, dans tous les cas, justifient la nécessité absolue de s'intéresser aux chutes, et surtout à celles des personnes âgées qui possèdent une constitution plus fragile que les adultes et les plus jeunes. Comme vous avez pu le voir, le choc est d'une violence assez impressionnante. Ces expériences montrent le fait qu'amortir la chute est absolument indispensable !

2.3.4 Difficultés pratiques

Au bout de quelques essais, nous avons constaté que l'accéléromètre situé au niveau de la tête saturait. C'est à dire que sa capacité ne suffisait pas à contenir l'effet du choc. Nous l'avons donc changé avec un autre de capacité 500G afin d'être sûrs de nos mesures. Il n'a cependant pas été nécessaire de changer celui situé au genoux dans la mesure où les chocs qu'il subissait étaient plus faibles.

Il s'est également avéré difficile au début d'orienter le mannequin afin qu'il chute de la façon que nous voulions.

Les vibrations produites par le choc ont également légèrement perturbé les accéléromètres.

De plus, la violence des chocs répétés a fait que les charnières représentant les articulations d'Eddy se sont complètement tordues. Il s'est avéré impossible de le replacer en position assise parfaite à la fin des expériences (nous avons ainsi mis en évidence la fracture du col du fémur, l'articulation la plus abîmée étant celle de la hanche).

Il convient de noter que nous avons manqué de temps en ce qui concerne les manipulations.

Conclusion et perspectives

A travers ce projet, nous avons appris que les blessures les plus fréquentes chez les personnes âgées concernent les articulations, les prothèses et le tassement des os dû au vieillissement. Bien que la pratique régulière d'un sport, comme le taichi, reste le meilleur remède pour prévenir des chutes, trois systèmes de prévention existent déjà sur le marché : Sense-u le trackeur sportif, B-shoes la "chaussure intelligente" et l'airbag humain. Après la mise en place de différents modèles, nous arrivons à la conclusion que le corps humain ne suit pas le modèle mathématique/mécanique. En effet, des frottements opèrent au niveau des articulations et les équations mises en place ne sont pas soumises aux réflexes humains qui faussent la théorie. C'est pourquoi pour limiter les tensions qui s'exercent et ainsi les blessures, les personnes âgées devraient apprendre à se laisser tomber sur les fesses plutôt que d'essayer de se rattraper.

D'un point de vue personnel, l'EC projet nous a donné un réel aperçu de ce que sera notre quotidien post-diplôme. Ainsi, nous sommes partis de l'idée de base de trouver un moyen de réduire les traumatismes osseux liés à la chute chez les personnes âgées et nous avons essayé de la développer. Nous nous sommes vite rendu compte que le développement d'un projet est le fruit de nombreux changements et difficultés. Ce fut très enrichissant d'associer nos idées et nos savoir-faire pour palier aux difficultés rencontrées et terminer au mieux le projet.

Deux perspectives de poursuites principales sont envisageables pour le projet. La première concerne le mannequin. En effet, la réalisation d'un mannequin plus réaliste, qui respecte davantage les mouvements du corps humain pourrait être un plus pour l'étude pratique. La deuxième concerne l'airbag. Nous nous sommes basés sur l'airbag déjà existant, mais il serait intéressant de faire notre propre dimensionnement de l'airbag (épaisseur, parties du corps protégées) pour trouver une solution optimum et la comparer avec le modèle de base. Un modèle Excel prenant en compte les couples qu'une personne applique sans le vouloir sur ses articulations lors d'une chute peut également être une piste de poursuite.

Bibliographie

- [1] NOM, Prénom *Titre*, edition, date.
- [2] NOM DES AUTEURS, *Chutes des personnes âgées : quels chiffres ?*", Le Figaro santé
- [3] http://www.sfmu.org/documents/consensus/chutes_repetees_personnes_agees_-_recommandations.pdf (Valide à la date du 10/04/2014)
- [4] <http://www.cnr-sante.fr/2012/10/technologies-de-detection-de-chute-d> (Valide à la date du 11/04/2014)
- [5] <http://www.inpes.sante.fr/CFESBases/catalogue/pdf/830.pdf> (Valide à la date du 10/04/2014)
- [6] <http://www.b-shoe.com/> (Valide à la date du)
- [7] <http://www.timesofisrael.com/with-b-shoes-elderly-wont-fall-as-much-> (Valide à la date du 11/04/2014)
- [8] <http://www.journaldugeek.com/2013/10/28/sense-u-capteur-etat-sante/> (Valide à la date du 11/04/2014)

Annexe A

Sondage

Nous avons fait en tout début de projet un sondage dans une maison de repos pour personnes âgées, ci-dessous est exposé le tableau des résultats de notre enquête.

Sexe	F	F	F	M
Age	80	80	77	91
Taille	150	155	164	175
Poids	65	78	60	82
Nombre de chute	2	3	2-3	2
Quand ?	5-6 ans	l'année dernière	il y a 5 ans	il y a 30 ans et 3 ans
Pourquoi ?	sur une plaque d'égoût		à la descente du métro, pluie	glissé après un orage - à cause du diabète, étourdissement
Où ?	rue	dehors	dans la rue, gravié mouillé	rue
Blessures ?	non	poignet cassé deux fois (le même)	égratiné, le visage et les mains	jambe cassée - tete
Accompagné ou pas ?	seule	seule	seule	seul
ou pas ?				
Seriez-vous prêt à l'avoir toujours sur vous ?	non	non	non	non
Esthétique importante ?	oui	non	non	non
Avez-vous peur de retomber à l'avenir ?	non	oui	oui	oui

FIGURE A.2 – Sondage en maison de repos - Partie 2

Sexe	F	F	F	F	F
Age	46	61	81	87	86
Taille	170	159	165	163	150
Poids	70	74	53	65	NA
Nombre du chute	4	tous les jours	1	1	10
Quand ?	Janvier/Février (on compte depuis le début de l'année)			quelques années en arrière (10 ans)	Dans la vie, atteinte de polio
Pourquoi ?	Manque de force, passage d'un fauteuil à un autre, douche, toilettes à fauteuil, Chute due à un médicament	problèmes de hanche	trébuché	trottoir, poussette s'est coincée	Polio
Où ?	Logement	Logement, ou dehors	logement	Rue à rouen	Logement
Blessures ?	Contusions	Bleus	rien	cassé l'épaule (opération, 2 mois hopital)	Cassé le genou
Accompagné ou pas ?	Seule	Seule	seule	avec sa fille et sa petite fille	avec son mari
Seriez-vous prêt à l'avoir toujours sur vous ?	Oui	oui			pas vraiment
Esthétique importante ?	Non	Oui, les regards des autres importants			oui
Avez-vous peur de retomber à l'avenir ?	Oui, car je dépends de quelqu'un. Je dois réveiller les gens à 1h du matin, ce n'est pas facile.	Oui	non	oui, oui	non

FIGURE A.1 – Sondage en maison de repos - Partie 1

Annexe B

Programme Exel : modèle linéaire à 3 masses, non articulé

```

Option Explicit
Const pi As Double = 3.14159265358979
' *****
Sub calcul()
Dim ish1 As Integer, ish2 As Integer, jcol As Integer
Dim Long1 As Double, masse1 As Double, G0 As Double
Dim Long1a As Double, Raideur As Double, teta_lim_deg As Double

Dim V0_chute_init_deg As Double, Angle_init_deg As Double
Dim V0_chute_init_rad As Double, Angle_init_rad As Double

Dim T_init As Double, T_fin As Double
Dim dt As Double
Dim N_step As Long
Dim x1a As Double, x2a As Double
Dim k1(1 To 4) As Double, k2(1 To 4) As Double,
k3(1 To 4) As Double,
k4(1 To 4) As Double
Dim time_2 As Double, Teta_lim_rad As Double
Dim Inertie As Double,
Coef1 As Double, Coef2 As Double
Dim i As Long,
Acceleration_angulaire_final As Double
Dim Force_rappel As Double, E_potentielle As Double
Dim E_cinetique As Double,
E_ressort As Double, E_totale As Double
Dim E_totale_formule1 As Double
ipos As Integer
Dim A_E_totale_formule1 As Double,
B_E_totale_formule1 As Double
Dim x2a_s As Double, ishift As Integer
Dim masse2 As Double, masse3 As Double,

```

long2 As Double, long3 As Double
Dim masseTot As Double
Dim longTot As Double

ipos = 0

ish1 = rech_sh("data")
ish2 = rech_sh("result")
Call clear1(ish2)
Sheets(ish1).Activate
jcol = 2
Long1 = Sheets(ish1).Cells(1, jcol)
masse1 = Sheets(ish1).Cells(2, jcol)

long2 = Sheets(ish1).Cells(3, jcol)
masse2 = Sheets(ish1).Cells(4, jcol)

long3 = Sheets(ish1).Cells(5, jcol)
masse3 = Sheets(ish1).Cells(6, jcol)

ishift = 4
G0 = Sheets(ish1).Cells(3 + ishift, jcol)
Long1a = Sheets(ish1).Cells(4 + ishift, jcol)
Raideur = Sheets(ish1).Cells(5 + ishift, jcol)
teta_lim_deg = Sheets(ish1).Cells(6 + ishift, jcol)
V0_chute_init_deg = Sheets(ish1).Cells(7 + ishift, jcol)
Angle_init_deg = Sheets(ish1).Cells(8 + ishift, jcol)
T_init = Sheets(ish1).Cells(9 + ishift, jcol)
T_fin = Sheets(ish1).Cells(10 + ishift, jcol)
dt = Sheets(ish1).Cells(11 + ishift, jcol)

Angle_init_rad = Angle_init_deg * pi / 180
Teta_lim_rad = teta_lim_deg * pi / 180
V0_chute_init_rad = V0_chute_init_deg * pi / 180
Inertie = masse1 * (Long1 / 2) ^ 2
+ masse2 * (long2 / 2 + Long1) ^ 2
+ masse3 * (long3 / 2 + long2 + Long1) ^ 2

masseTot = masse1 + masse2 + masse3
longTot = Long1 + long2 + long3
Sheets(ish1).Cells(12 + ishift, 2) = Inertie
Coef1 = (Long1*masse1+long2*masse2 + long3*masse3) * G0 / Inertie
Coef2 = Long1a * Long1a * Raideur / Inertie

x1a = Angle_init_rad ' X1=teta
x2a = V0_chute_init_rad ' X2=d(teta)/dt

```

N_step = (T_fin - T_init) / dt
i = 1
time_2 = T_init
Sheets(ish2).Cells(i, 1) ="instant"
Sheets(ish2).Cells(i, 2) ="position angulaire" & vbCrLf & "(deg)"
Sheets(ish2).Cells(i, 3) ="vitesse angulaire" & vbCrLf & "(deg/s)"
Sheets(ish2).Cells(i, 4) ="dt"
Sheets(ish2).Cells(i, 5) ="temps final (s)"
Sheets(ish2).Cells(i, 6) ="position angulaire" & vbCrLf & "deg)"
Sheets(ish2).Cells(i, 7) ="vitesse angulaire" & vbCrLf & "(deg/s)"
Sheets(ish2).Cells(i,8) ="acceleration angulaire" & vbCrLf & "(deg/s/s)"
Sheets(ish2).Cells(i,9) ="force de rappel final" & vbCrLf & "(N)"
Sheets(ish2).Cells(i,10) ="vitesse de chute" & vbCrLf & "(m/s)"
Sheets(ish2).Cells(i,11) ="Acceleration de rappel" & vbCrLf & "(m/s/s)"
Sheets(ish2).Cells(i,12) ="E potentielle" & vbCrLf & "(J)"
Sheets(ish2).Cells(i,13) = "E_cinetique" & vbCrLf & "(J)"
Sheets(ish2).Cells(i,14) = "E_ressort" & vbCrLf & "(J)"
Sheets(ish2).Cells(i,15) = "E_totale" & vbCrLf & "(J)"
Sheets(ish2).Cells(i,16) = "Ecart_E_totale_formule1" & vbCrLf & "(J)"

' **** DEBUT DE BOUCLE *****
For i = 2 To N_step + 3
    time_2 = (i - 2) * dt + T_init ' time_2 est le temps courant absolu
    Sheets(ish2).Cells(i, 1) = time_2
    Sheets(ish2).Cells(i,2) = x1a * 180 / pi ' x1a
    Sheets(ish2).Cells(i,3) = x2a*180/pi ' X2a
    Sheets(ish2).Cells(i,4) = dt
    ' 1 er increment
    k1(1) = dt*x1_fd(time_2, x1a, x2a)
    k1(2) = dt*x2_fd(time_2, x1a, x2a, Teta_lim_rad, Coef1, Coef2)
    ' 2 ieme increment ' *****
    k2(1) = dt * x1_fd(time_2 + dt/2, x1a + k1(1)/ 2, x2a + k1(2)/2)
    k2(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt/2, x1a + k1(1)/ 2, x2a
        + k1(2) / 2, Teta_lim_rad, Coef1, Coef2)
    ' 3 ieme increment ' *****
    k3(1) = dt * x1_fd(time_2 +dt /2, x1a +k2(1)/2, x2a + k2(2)/2)
    k3(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt / 2, x1a + k2(1) / 2, x2a
        + k2(2) / 2, Teta_lim_rad, Coef1, Coef2)
    ' 4 ieme increment ' *****
    k4(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt, x1a + k3(1), x2a
        + k3(2), Teta_lim_rad, Coef1, Coef2)
    ' *****
    ' nouvelles valeurs :
    x1a = x1a + 1/ 6*(k1(1) + 2*k2(1) + 2*k3(1)+k4(1))

```

```

x2a = x2a + 1/6*(k1(2) + 2*k2(2) + 2*k3(2)+k4(2))
Acceleration_angulaire_final = x2_fd(time_2
+ dt, x1a, x2a, Teta_lim_rad, Coef1, Coef2)
Force_rappel = Force_rappel_f(Long1a, Raideur, x1a, Teta_lim_rad)
If (x1a < Teta_lim_rad And ipos = 0) Then
ipos = 1
x2a_s = x2a
' on met en memoire la valeur de la vitesse pour l'usage de
Else
ipos = 0
End If

Sheets(ish2).Cells(i, 5) = time_2 + dt
Sheets(ish2).Cells(i, 6) = x1a * 180 / pi
Sheets(ish2).Cells(i, 7) = x2a * 180 / pi
Sheets(ish2).Cells(i, 8) = Acceleration_angulaire_final * 180 / pi
Sheets(ish2).Cells(i, 9) = Force_rappel
Sheets(ish2).Cells(i, 10) = (longTot) * x2a
Sheets(ish2).Cells(i, 11) = Force_rappel / masse1

E_potentielle = masse1 * G0 * (longTot) * Sin(x1a)
E_cinetique = 1 / 2 * Inertie * x2a * x2a
E_ressort = E_raideur_f(Long1a, Raideur, x1a, Teta_lim_rad)
E_totale = E_potentielle + E_cinetique + E_ressort

Sheets(ish2).Cells(i, 12) = E_potentielle
Sheets(ish2).Cells(i, 13) = E_cinetique
Sheets(ish2).Cells(i, 14) = E_ressort
Sheets(ish2).Cells(i, 15) = E_totale

If (x1a < Teta_lim_rad) Then
A_E_totale_formule1 = 1 / 2 * Inertie * x2a * x2a
+ (masseTot) * G0 * (longTot) * Sin(x1a) + _
Long1a * Long1a * Raideur * (-Cos(x1a) - x1a * Sin(Teta_lim_rad))
B_E_totale_formule1 = 1 / 2 * Inertie * x2a_s * x2a_s
+ (masseTot) * G0 * (longTot) * Sin(Teta_lim_rad) + _
Long1a * Long1a * Raideur * (-Cos(Teta_lim_rad)
- Teta_lim_rad * Sin(Teta_lim_rad))
Sheets(ish2).Cells(i, 16) = A_E_totale_formule1
- B_E_totale_formule1
Else
A_E_totale_formule1 = 1 / 2 * Inertie * x2a * x2a
+ (masseTot) * G0 * Long1 * Sin(x1a)
B_E_totale_formule1 = 1/2*Inertie*V0_chute_init_rad*V0_chute_init_rad
+ masseTot*G0*longTot * Sin(Angle_init_rad)

```

```
Sheets(ish2).Cells(i, 16) = A_E_totale_formule1
- B_E_totale_formule1
```

```
End If
```

```
Next i
```

```
Sheets(ish2).Activate
```

```
MsgBox " Fin du calcul"
```

```
End Sub
```

```
' *****
```

```
Function x1_fd(time1, x1sa, X2sa) As Double 'est la fonction _
derivee de teta
```

```
    x1_fd = X2sa ' x1sa est teta; X2sa est d(teta)/dt
```

```
End Function
```

```
' *****
```

```
Function x2_fd(time1, x1sa, X2sa, Teta_lim_rad, Coef1, Coef2) As Double
' est la fonction donnant teta_seconde en fonction de teta
```

```
If (x1sa > Teta_lim_rad) Then
```

```
    x2_fd = -Coef1 * Cos(x1sa)
```

```
Else
```

```
    x2_fd = -Coef1 * Cos(x1sa) - Coef2 * (Sin(x1sa) - Sin(Teta_lim_rad))
```

```
End If
```

```
End Function
```

```
' *****
```

```
Function Force_rappel_f(Long1a, Raideur, x1sa, Teta_lim_rad) As Double
```

```
If (x1sa > Teta_lim_rad) Then
```

```
Force_rappel_f = 0
```

```
Else
```

```
Force_rappel_f = -Long1a * Raideur * (Sin(x1sa)
- Sin(Teta_lim_rad))
```

```
End If
```

```
End Function
```

```
' *****
```

```
Function E_raideur_f(Long1a, Raideur, x1sa, Teta_lim_rad) As Double
```

```
Dim A As Double, B As Double
```

```
If (x1sa > Teta_lim_rad) Then
```

```
E_raideur_f = 0
```

```
Else
```

```
'E_raideur_f = 1 / 2 * Raideur * Long1a * Long1a * (Sin(x1sa)
- Sin(Teta_lim_rad)) _
```

```
'* (Sin(x1sa) - Sin(Teta_lim_rad))
```

```
E_raideur_f = Raideur * Long1a * Long1a
```

```
A = 1 / 2 * (Sin(x1sa) * Sin(x1sa)
```

```
- Sin(Teta_lim_rad) * Sin(Teta_lim_rad))
```

```
B = -Sin(Teta_lim_rad) * (Sin(x1sa) - Sin(Teta_lim_rad))
```

```
E_raideur_f = E_raideur_f * (A + B)
```

```

End If
End Function
' *****
Public Function Acos(x) As Double
Acos = Atn(-x / Sqr(-x * x + 1)) + 2 * Atn(1)
End Function
' *****
Public Function rech_sh(nom) As Integer
Dim nbsh As Integer, i As Integer, str1 As String
nbsh = ActiveWorkbook.Sheets.Count
rech_sh = 0
For i = 1 To nbsh
    str1 = Sheets(i).Name
    If (str1 = nom) Then rech_sh = i
Next i
If (rech_sh = 0) Then
    MsgBox " ne trouve pas la feuille de nom " & nom
End
End If
End Function
' *****
Sub clear1(ish)
Sheets(ish).Activate
Cells.Select
Range("A1048555").Activate
Selection.ClearContents
Range("A1").Select
End Sub
' *****

```

Annexe C

Modèle à 3 masses, équations essentielles

C.1 Description

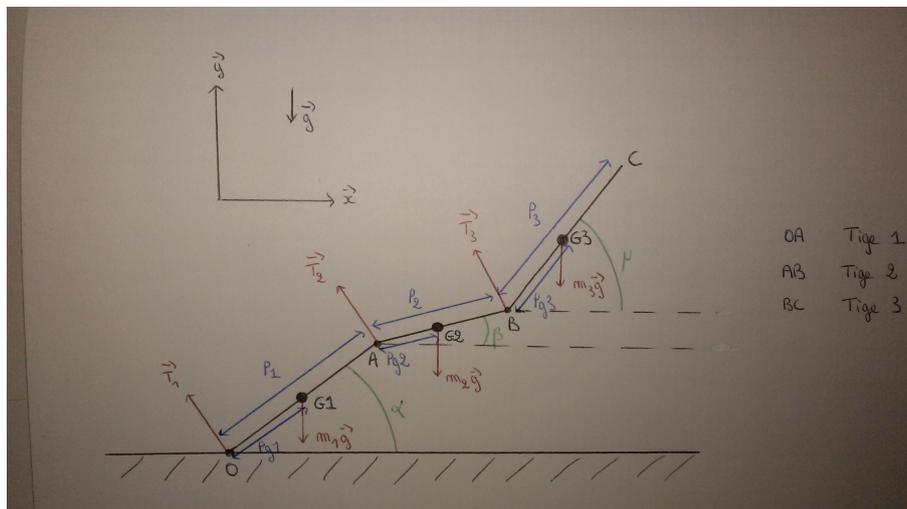


FIGURE C.1 – Schéma du modèle à trois tiges articulées

On a ici un modèle à 3 tiges articulées :

- Tige 1 : OA, de longueur l_1
- Tige 2 : AB, de longueur l_2
- Tige 3 : BC, de longueur l_3

Les positions de chacune des tiges sont déterminées par les fonction du temps : $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\mu(t)$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements au niveau des articulations.

On trouve comme équation du moment cinétique de la tige 3 :

$$- m_3 g l_{g3} \cos(\mu) = C + \frac{d(B)}{dt} \quad (C.1)$$

- $B = m_3 l_{g3} * (l_1 \dot{\alpha} * \cos(\alpha - \mu) + l_2 \dot{\beta} * \cos(\beta - \mu) + I_3 * \dot{\mu} = \int \overline{BM} \otimes \vec{v} dm$
- $C = m_3 l_{g3} \dot{\mu} * (l_1 \dot{\alpha} * \sin(\mu - \alpha) + l_2 \dot{\beta} * \cos(\mu - \beta)$

On déduit ces équations de l'équation du principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à la tige 3 et de l'équation du mouvement cinétique de BC.

Pour l'ensemble des tiges 2 et 3, on trouve après calcul du moment cinétique, cinématique et PFD.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG_2} \otimes m_2 \vec{g} + \overrightarrow{AG_3} \otimes m_3 \vec{g} &= m_2 \overrightarrow{V_A} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{2} \\
 &+ m_3 \overrightarrow{V_A} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{3} \\
 &+ \frac{dA}{dt} \\
 &+ m_3 \overrightarrow{V_B} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{3} \\
 &+ m_3 * \overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{\theta_G} \ddot{3} \\
 &- m_3 \overrightarrow{V_A} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{3} \\
 &- m_3 g l_{g3} \cos(\mu) - C \\
 &= \frac{dB}{dt}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne au final :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG_2} \otimes m_2 \vec{g} + \overrightarrow{AG_3} \otimes m_3 \vec{g} &= m_2 \overrightarrow{V_A} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{2} \\
 &+ \frac{dA}{dt} \\
 &+ m_3 \overrightarrow{V_B} \otimes \overrightarrow{V_G} \dot{3} \\
 &+ m_3 * \overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{\theta_G} \ddot{3} \\
 &- m_3 g l_{g3} \cos(\mu) - C \\
 &= \frac{dB}{dt}
 \end{aligned}$$

C.2 Résolution des équations

Afin de résoudre numériquement l'équation (C.1), nous faisons les choses suivantes :

$$\begin{aligned}
 -m_3 g l_{g3} \cos(\mu) - C &= \frac{d(B)}{dt} \\
 \Leftrightarrow \frac{d(B)}{dt} &= m_3 l_{g3} l_1 (\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \mu) - \dot{\alpha} \sin(\alpha - \mu) (\dot{\alpha} - \dot{\mu}) \\
 &+ m_3 l_{g3} l_2 (\ddot{\beta} \cos(\beta - \mu) - \dot{\beta} \sin(\beta - \mu) (\dot{\beta} - \dot{\mu}) \\
 &+ I_3 \ddot{\mu}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$A_1 \ddot{\alpha} + B_1 \ddot{\beta} + C_1 \ddot{\mu} = K_1 \quad (C.2)$$

Avec :

$$A_1 = m_3 l_{g3} l_1 \cos(\alpha - \mu)$$

$$B_1 = m_3 l_{g3} l_2 \cos(\beta - \mu)$$

$$C_1 = I_3$$

$$K_1 = -m_3 g l_{g3} \cos(\mu) - c'_1$$

$$+ m_3 g l_{g3} l_1 \dot{\alpha}(\dot{\alpha} - \dot{\mu}) \sin(\alpha - \mu)$$

$$+ m_3 g l_{g3} l_2 \dot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\mu}) \sin(\beta - \mu)$$

$$= -m_3 g l_{g3} \cos(\mu) + m_3 g l_{g3} l_1 \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \mu) + m_3 g l_{g3} l_2 \dot{\beta}^2 \sin(\beta - \mu)$$

Annexe D

Programme Exel : modèle articulé à 3 masses

D.1 Programme principal

```
Option Explicit
Public Const Pi As Double = 3.14159265358979
Dim L1 As Double, L2 As Double, L3 As Double
Dim Lg1 As Double, Lg2 As Double, Lg3 As Double
Dim G0 As Double, M1 As Double, M2 As Double, M3 As Double
Dim Inertie1 As Double, Inertie2 As Double, Inertie3 As Double
' *****
Sub mannequin_3pieces()
Const nbvar As Integer = 6
Dim ish1 As Integer, ish2 As Integer, i As Integer, j As Integer

Dim X_old1(1 To nbvar, 1 To 1) As Double,
X_old2(1 To nbvar, 1 To 1) As Double, _
X_old3(1 To nbvar, 1 To 1) As Double,
X_old4(1 To nbvar, 1 To 1) As Double
Dim x_old(1 To nbvar, 1 To 1) As Double,
X_new(1 To nbvar, 1 To 1) As Double

Dim T_init As Double, T_final As Double, dt As Double
Dim time_2 As Double

Dim incr1(1 To nbvar) As Double,
incr2(1 To nbvar) As Double, incr3(1 To nbvar) As Double,
incr4(1 To nbvar) As Double

Dim Alpha As Double, Beta As Double, Mu As Double
Dim Alpha_point As Double, Beta_point As Double,
Mu_point As Double
```

Dim Delta(1 To 3, 1 To 3) As Double
 Dim Teta_matrice(1 To 3, 1 To 1) As Double
 Dim Xsol_matrice(1 To 3, 1 To 1) As Double
 Dim XA As Double, YA As Double, XB As Double,
 YB As Double, XC As Double, YC As Double
 Dim N_step As Long
 Dim XG1 As Double, YG1 As Double,
 XG2 As Double, YG2 As Double
 Dim XG3 As Double, YG3 As Double
 Dim XVG1 As Double, YVG1 As Double
 Dim XVG2 As Double, YVG2 As Double
 Dim XVG3 As Double, YVG3 As Double
 Dim Etot1 As Double, Etot2 As Double, Etot3 As Double
 Dim DB_sur_dt As Double, Grand_C As Double
 Dim Alpha_second As Double,
 Beta_second As Double, Mu_second As Double
 Dim Equ_tige3 As Double, Equ_tige23 As Double,
 Equ_tige123 As Double

Dim M1G(1 To 2) As Double,
 M2G(1 To 2) As Double, M3G(1 To 2) As Double

Dim OG1(1 To 2) As Double,
 OG2(1 To 2) As Double, OG3(1 To 2) As Double
 Dim OA(1 To 2) As Double,
 AG2(1 To 2) As Double, AG3(1 To 2) As Double
 Dim AB(1 To 2) As Double, BG3(1 To 2) As Double

Dim VA(1 To 2) As Double,
 VB(1 To 2) As Double, VG2(1 To 2) As Double, _
 VG3(1 To 2) As Double

Dim GamaG2(1 To 2) As Double, GamaG3(1 To 2) As Double

Dim DA_sur_dt As Double, V1 As Double, V2 As Double

```
' *****
ish1 = rech_sh("data") '1
ish2 = rech_sh("result") ' 2
For i = 1 To nbvar
x_old(i, 1) = Sheets(ish1).Cells(i, 2) * Pi / 180
Next i
T_init = Sheets(ish1).Cells(7, 2)
T_final = Sheets(ish1).Cells(8, 2)
dt = Sheets(ish1).Cells(9, 2)
```

```

L1 = Sheets(ish1).Cells(10, 2)
L2 = Sheets(ish1).Cells(11, 2)
L3 = Sheets(ish1).Cells(12, 2)
Lg1 = Sheets(ish1).Cells(13, 2)
Lg2 = Sheets(ish1).Cells(14, 2)
Lg3 = Sheets(ish1).Cells(15, 2)
G0 = Sheets(ish1).Cells(16, 2)
M1 = Sheets(ish1).Cells(17, 2)
M2 = Sheets(ish1).Cells(18, 2)
M3 = Sheets(ish1).Cells(19, 2)
Inertie1 = M1 * Lg1 * Lg1
Inertie2 = M2 * Lg2 * Lg2
Inertie3 = M3 * Lg3 * Lg3

' *****
N_step = (T_final - T_init) / dt
' ecriture de la premiere ligne de la feuille "result"
i = 1
Sheets(ish2).Cells(i, 1) = "instant"
Sheets(ish2).Cells(i, 2) = "alpha en degre"
Sheets(ish2).Cells(i, 3) = "beta en degre"
Sheets(ish2).Cells(i, 4) = "mu en degre"
Sheets(ish2).Cells(i, 5) = "XA"
Sheets(ish2).Cells(i, 6) = "YA"
Sheets(ish2).Cells(i, 7) = "XB"
Sheets(ish2).Cells(i, 8) = "YB"
Sheets(ish2).Cells(i, 9) = "XC"
Sheets(ish2).Cells(i, 10) = "YC"

Sheets(ish2).Cells(i, 11) = "XG1"
Sheets(ish2).Cells(i, 12) = "YG1"
Sheets(ish2).Cells(i, 13) = "XG2"
Sheets(ish2).Cells(i, 14) = "YG2"
Sheets(ish2).Cells(i, 15) = "XG3"
Sheets(ish2).Cells(i, 16) = "YG3"

Sheets(ish2).Cells(i, 17) = "XVG1"
Sheets(ish2).Cells(i, 18) = "YVG1"
Sheets(ish2).Cells(i, 19) = "XVG2"
Sheets(ish2).Cells(i, 20) = "YVG2"
Sheets(ish2).Cells(i, 21) = "XVG3"
Sheets(ish2).Cells(i, 22) = "YVG3"

Sheets(ish2).Cells(i, 23) = "E_tot1"
Sheets(ish2).Cells(i, 24) = "E_tot2"
Sheets(ish2).Cells(i, 25) = "E_tot3"

```

```

Sheets(ish2).Cells(i, 26) = "E_tot1,2,3"
Sheets(ish2).Cells(i, 27) = "Equ_tige3"
Sheets(ish2).Cells(i, 28) = "Equ_tige23"
Sheets(ish2).Cells(i, 29) = "Equ_tige123"

```

time_2 = T_init ' time_2 est le temps courant absolu

```

' **** DEBUT DE BOUCLE *****
For i = 2 To N_step + 3
    Sheets(ish2).Cells(i, 1) = time_2
    Sheets(ish2).Cells(i, 2) = x_old(1, 1) * 180 / Pi
    Sheets(ish2).Cells(i, 3) = x_old(2, 1) * 180 / Pi
    Sheets(ish2).Cells(i, 4) = x_old(3, 1) * 180 / Pi

```

```

Alpha = x_old(1, 1)
Beta = x_old(2, 1)
Mu = x_old(3, 1)
Alpha_point = x_old(4, 1)
Beta_point = x_old(5, 1)
Mu_point = x_old(6, 1)

```

```

XA = Xtige1_f(Alpha, L1)
YA = Ytige1_f(Alpha, L1)

```

```

XB = Xtige2_f(Alpha, L1, Beta, L2)
YB = Ytige2_f(Alpha, L1, Beta, L2)

```

```

XC = Xtige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, L3)
YC = Ytige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, L3)

```

```

XG1 = Xtige1_f(Alpha, Lg1)
YG1 = Ytige1_f(Alpha, Lg1)

```

```

XG2 = Xtige2_f(Alpha, L1, Beta, Lg2)
YG2 = Ytige2_f(Alpha, L1, Beta, Lg2)

```

```

XG3 = Xtige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, Lg3)
YG3 = Ytige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, Lg3)

```

```

XVG1 = XVG1_f(Alpha, Alpha_point)
YVG1 = YVG1_f(Alpha, Alpha_point)

```

```

XVG2 = XVG2_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point)
YVG2 = YVG2_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point)

```

```

XVG3 = XVG3_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point, Mu, Mu_point)

```

YVG3 = YVG3_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point, Mu, Mu_point)

Etot1 = M1 * (G0 * YG1) + 0.5 * M1 * (XVG1 * XVG1 + YVG1 * YVG1)

Etot2 = M2 * (G0 * YG2) + 0.5 * M2 * (XVG2 * XVG2 + YVG2 * YVG2)

Etot3 = M3 * (G0 * YG3) + 0.5 * M3 * (XVG3 * XVG3 + YVG3 * YVG3)

Sheets(ish2).Cells(i, 5) = XA

Sheets(ish2).Cells(i, 6) = YA

Sheets(ish2).Cells(i, 7) = XB

Sheets(ish2).Cells(i, 8) = YB

Sheets(ish2).Cells(i, 9) = XC

Sheets(ish2).Cells(i, 10) = YC

Sheets(ish2).Cells(i, 11) = XG1

Sheets(ish2).Cells(i, 12) = YG1

Sheets(ish2).Cells(i, 13) = XG2

Sheets(ish2).Cells(i, 14) = YG2

Sheets(ish2).Cells(i, 15) = XG3

Sheets(ish2).Cells(i, 16) = YG3

Sheets(ish2).Cells(i, 17) = XVG1

Sheets(ish2).Cells(i, 18) = YVG1

Sheets(ish2).Cells(i, 19) = XVG2

Sheets(ish2).Cells(i, 20) = YVG2

Sheets(ish2).Cells(i, 21) = XVG3

Sheets(ish2).Cells(i, 22) = YVG3

Sheets(ish2).Cells(i, 23) = Etot1

Sheets(ish2).Cells(i, 24) = Etot2

Sheets(ish2).Cells(i, 25) = Etot3

Sheets(ish2).Cells(i, 26) = Etot1 + Etot2 + Etot3

Sheets(ish2).Cells(i, 27) = Equ_tige3

Sheets(ish2).Cells(i, 28) = Equ_tige23

Sheets(ish2).Cells(i, 29) = Equ_tige123

' *****

time_2 = (i - 2) * dt + T_init ' time_2 est le temps courant absolu

' 1 er increment

For j = 1 To 6

X_old1(j, 1) = x_old(j, 1)

Next j

Alpha = X_old1(1, 1)

Beta = X_old1(2, 1)

Mu = X_old1(3, 1)

```

Alpha_point = X_old1(4, 1)
Beta_point = X_old1(5, 1)
Mu_point = X_old1(6, 1)

incr1(1) = dt * x1_fd(time_2, X_old1)
incr1(2) = dt * x2_fd(time_2, X_old1)
incr1(3) = dt * x3_fd(time_2, X_old1)
' creation de la matrice pour determiner
les derivees secondes de alpha ,beta , Mu
' *****
Call Delta_Teta_creat(Delta, Teta_matrice, Alpha,
Beta, Mu, Alpha_point, Beta_point, Mu_point)
Call GAUSSID(Delta, Teta_matrice, X_new, 3, 1)
' x_new contient alpha_seconde ,beta_seconde ,mu_seconde ,

incr1(4) = dt * X_new(1, 1) ' x4_fd(time_2, X_old)
incr1(5) = dt * X_new(2, 1) 'x5_fd(time_2, X_old)
incr1(6) = dt * X_new(3, 1) 'x6_fd(time_2, X_old)

' 2 ieme increment ' *****
For j = 1 To 6
X_old2(j, 1) = X_old1(j, 1) + incr1(j) / 2
Next j

incr2(1) = dt * x1_fd(time_2 + dt / 2, X_old2)
incr2(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt / 2, X_old2)
incr2(3) = dt * x3_fd(time_2 + dt / 2, X_old2)

Alpha = X_old2(1, 1)
Beta = X_old2(2, 1)
Mu = X_old2(3, 1)
Alpha_point = X_old2(4, 1)
Beta_point = X_old2(5, 1)
Mu_point = X_old2(6, 1)

Call Delta_Teta_creat(Delta, Teta_matrice, Alpha,
Beta, Mu, Alpha_point, Beta_point, Mu_point)
Call GAUSSID(Delta, Teta_matrice, X_new, 3, 1)
' x_new contient alpha_seconde ,beta_seconde ,mu_seconde ,
incr2(4) = dt * X_new(1, 1) ' x4_fd(time_2, X_old)
incr2(5) = dt * X_new(2, 1) 'x5_fd(time_2, X_old)
incr2(6) = dt * X_new(3, 1) 'x6_fd(time_2, X_old)

' 3 ieme increment ' *****
For j = 1 To 6
X_old3(j, 1) = X_old1(j, 1) + incr2(j) / 2

```

```

Next j
incr3(1) = dt * x1_fd(time_2 + dt / 2, X_old3)
incr3(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt / 2, X_old3)
incr3(3) = dt * x3_fd(time_2 + dt / 2, X_old3)

Alpha = X_old3(1, 1)
Beta = X_old3(2, 1)
Mu = X_old3(3, 1)
Alpha_point = X_old3(4, 1)
Beta_point = X_old3(5, 1)
Mu_point = X_old3(6, 1)

Call Delta_Teta_creat(Delta, Teta_matrice, Alpha, Beta,
Mu, Alpha_point, Beta_point, Mu_point)
Call GAUSS1D(Delta, Teta_matrice, X_new, 3, 1)
' x_new contient alpha_seconde, beta_seconde, mu_seconde,
incr3(4) = dt * X_new(1, 1) ' x4_fd(time_2, X_old)
incr3(5) = dt * X_new(2, 1) ' x5_fd(time_2, X_old)
incr3(6) = dt * X_new(3, 1) ' x6_fd(time_2, X_old)
' *****
' 4 ieme increment
For j = 1 To 6
X_old4(j, 1) = X_old1(j, 1) + incr3(j)
Next j
incr4(1) = dt * x1_fd(time_2 + dt, X_old4)
incr4(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt, X_old4)
incr4(3) = dt * x3_fd(time_2 + dt, X_old4)

Alpha = X_old4(1, 1)
Beta = X_old4(2, 1)
Mu = X_old4(3, 1)
Alpha_point = X_old4(4, 1)
Beta_point = X_old4(5, 1)
Mu_point = X_old4(6, 1)

Call Delta_Teta_creat(Delta, Teta_matrice, Alpha,
Beta, Mu, Alpha_point, Beta_point, Mu_point)
Call GAUSS1D(Delta, Teta_matrice, X_new, 3, 1)
' x_new contient alpha_seconde, beta_seconde, mu_seconde,
incr4(4) = dt * X_new(1, 1) ' x4_fd(time_2, X_old)
incr4(5) = dt * X_new(2, 1) ' x5_fd(time_2, X_old)
incr4(6) = dt * X_new(3, 1) ' x6_fd(time_2, X_old)

' *****

' nouvelles valeurs :

```

```

For j = 1 To 6
x_old(j, 1) = x_old(j, 1) + 1 / 6 * (incr1(j)
+ 2 * incr2(j) + 2 * incr3(j) + incr4(j))
Next j

' verif des equations
Alpha = x_old(1, 1)
Beta = x_old(2, 1)
Mu = x_old(3, 1)
Alpha_point = x_old(4, 1)
Beta_point = x_old(5, 1)
Mu_point = x_old(6, 1)

Call Delta_Teta_creat(Delta, Teta_matrice, Alpha,
Beta, Mu, Alpha_point, Beta_point, Mu_point)
Call GAUSSID(Delta, Teta_matrice, X_new, 3, 1)
' x_new contient alpha_seconde, beta_seconde, mu_seconde,
Alpha_second = X_new(1, 1)
Beta_second = X_new(2, 1)
Mu_second = X_new(3, 1)

' Equation de la tige 3 donnee page 7
'Grand_C est donnee page 7
Grand_C = M3 * Lg3 * Mu_point * _
(L1 * Alpha_point * Sin(Mu - Alpha)
+ L2 * Beta_point * Sin(Mu - Beta))
'DB_sur_dt est donnee page 12
DB_sur_dt = M3 * Lg3 * L1 * ( _
Alpha_second * Cos(Alpha - Mu) _
- Alpha_point * (Alpha_point - Mu_point) * Sin(Alpha - Mu))
DB_sur_dt = DB_sur_dt + M3 * Lg3 * L2 * ( _
Beta_second * Cos(Beta - Mu) _
- Beta_point * (Beta_point - Mu_point) * Sin(Beta - Mu))
+ Inertie3 * Mu_second
Equ_tige3 = Grand_C + DB_sur_dt + (M3 * Lg3 * G0 * Cos(Mu))
' *****
'equation des tiges 2 et 3 page 10
OG1(1) = Lg1 * Cos(Alpha)
OG1(2) = Lg1 * Sin(Alpha)

OA(1) = L1 * Cos(Alpha)
OA(2) = L1 * Sin(Alpha)

AB(1) = L2 * Cos(Beta)
AB(2) = L2 * Sin(Beta)

```

$$\begin{aligned} AG2(1) &= Lg2 * \text{Cos}(\text{Beta}) \\ AG2(2) &= Lg2 * \text{Sin}(\text{Beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OG2(1) &= OA(1) + AG2(1) \\ OG2(2) &= OA(2) + AG2(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BG3(1) &= Lg3 * \text{Cos}(\text{Mu}) \\ BG3(2) &= Lg3 * \text{Sin}(\text{Mu}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OG3(1) &= OA(1) + AB(1) + BG3(1) \\ OG3(2) &= OA(2) + AB(2) + BG3(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AG3(1) &= AB(1) + BG3(1) \\ AG3(2) &= AB(2) + BG3(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M1G(1) &= 0 \\ M1G(2) &= -M1 * G0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M2G(1) &= 0 \\ M2G(2) &= -M2 * G0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M3G(1) &= 0 \\ M3G(2) &= -M3 * G0 \end{aligned}$$

' on a besoin des termes de l'équation 17 page 10

$$\begin{aligned} VA(1) &= -L1 * \text{Alpha_point} * \text{Sin}(\text{Alpha}) \quad \text{' vitesse de A} \\ VA(2) &= L1 * \text{Alpha_point} * \text{Cos}(\text{Alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VB(1) &= VA(1) - L2 * \text{Beta_point} * \text{Sin}(\text{Beta}) \quad \text{' vitesse de B} \\ VB(2) &= VA(2) + L2 * \text{Beta_point} * \text{Cos}(\text{Beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VG2(1) &= VA(1) - Lg2 * \text{Beta_point} * \text{Sin}(\text{Beta}) \quad \text{' vitesse de G2} \\ VG2(2) &= VA(2) + Lg2 * \text{Beta_point} * \text{Cos}(\text{Beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VG3(1) &= VB(1) - Lg3 * \text{Mu_point} * \text{Sin}(\text{Mu}) \quad \text{' vitesse de G3} \\ VG3(2) &= VB(2) + Lg3 * \text{Mu_point} * \text{Cos}(\text{Mu}) \end{aligned}$$

' gamaG3 est dans l'équation 17, son expression est donnée page 10

$$\begin{aligned} \text{GamaG3}(1) &= L1 * (-\text{Alpha_second} * \text{Sin}(\text{Alpha}) \\ &\quad - \text{Alpha_point} * \text{Alpha_point} * \text{Cos}(\text{Alpha})) \\ \text{GamaG3}(1) &= \text{GamaG3}(1) + L2 * \\ &\quad (-\text{Beta_second} * \text{Sin}(\text{Beta}) - \text{Beta_point} * \text{Beta_point} * \text{Cos}(\text{Beta})) \\ \text{GamaG3}(1) &= \text{GamaG3}(1) + Lg3 * \\ &\quad (-\text{Mu_second} * \text{Sin}(\text{Mu}) - \text{Mu_point} * \text{Mu_point} * \text{Cos}(\text{Mu})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GamaG3}(2) &= L1 * (\text{Alpha_second} * \text{Cos}(\text{Alpha}) \\ &\quad - \text{Alpha_point} * \text{Alpha_point} * \text{Sin}(\text{Alpha})) \end{aligned}$$

```
GamaG3(2) = GamaG3(2) + L2 * (Beta_second * Cos(Beta)
- Beta_point * Beta_point * Sin(Beta))
GamaG3(2) = GamaG3(2) + Lg3 * (Mu_second * Cos(Mu)
- Mu_point * Mu_point * Sin(Mu))
' DA_sur_dt est doonnee page 13
```

```
DA_sur_dt = M2 * L1 * Lg2 *
(Alpha_second * Cos(Alpha - Beta) -
- Alpha_point * (Alpha_point - Beta_point) * Sin(Alpha - Beta)) -
+ Inertie2 * Beta_second
' on revient page 10 sur l'equation 17
V1 = vect(AG2, M2G) + vect(AG3, M3G)
V2 = M2 * vect(VA, VG2) + DA_sur_dt
+ M3 * vect(VB, VG3) + M3 * vect(AB, GamaG3) -
+ DB_sur_dt
```

Equ_tige23 = V1 - V2

```
' equation des tiges 1 2 3 page 19
' GamaG2 est donne page 3
' il y avait une erreur sur gamaG2 !GamaG2(2) = GamaG3(2) + ....
GamaG2(1) = L1 * (-Alpha_second * Sin(Alpha)
- Alpha_point * Alpha_point * Cos(Alpha))
GamaG2(1) = GamaG2(1) + Lg2 * (-Beta_second * Sin(Beta)
- Beta_point * Beta_point * Cos(Beta))
```

```
GamaG2(2) = L1 * (Alpha_second * Cos(Alpha)
- Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha))
GamaG2(2) = GamaG2(2) + Lg2 * (Beta_second * Cos(Beta)
- Beta_point * Beta_point * Sin(Beta))
```

```
V1 = vect(OG1, M1G) + vect(OG2, M2G) + vect(OG3, M3G) ' page 19
V2 = M2 * vect(OA, GamaG2) + M2 * vect(VA, VG2)
+ DA_sur_dt + M3 * vect(OA, GamaG3) -
+ M3 * vect(VB, VG3) + M3 * vect(AB, GamaG3)
+ DB_sur_dt + Inertie1 * Alpha_second ' page 20
' il y avait une oubli de inertie1*Alpha_second !
Equ_tige123 = V1 - V2
```

```
Next i
MsgBox " Fin du calcul"
End Sub
' *****
Function vect(V1, V2) As Double
' elle fait le produit vectoriel de V1 et V2
vect = V1(1) * V2(2) - V1(2) * V2(1)
```

End Function

```

' *****
Sub Delta_Teta_creat(Delta , Teta_matrice ,
Alpha , Beta , Mu , Alpha_point , Beta_point , Mu_point)
' elle cree les marices Delta et Teta_matrice
qui sont celles qui donnent les derivees secondes _
de alpha , beta et mu en fonction des autres variables
' 1 ere equation celle de la tige 3 , page 12
Delta(1 , 1) = M3 * Lg3 * L1 * Cos(Alpha - Mu)
Delta(1 , 2) = M3 * Lg3 * L2 * Cos(Beta - Mu) ' une erreur detectee
Delta(1 , 3) = Inertie3
Teta_matrice(1 , 1) = -M3 * G0 * Lg3 * Cos(Mu) + _
M3 * Lg3 * L1 * Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha - Mu) + _
M3 * Lg3 * L2 * Beta_point * Beta_point * Sin(Beta - Mu)
' *****
' 2 ieme equation page 13 et 23
Delta(2 , 1) = (M2 * Lg2 * L1 + M3 * L2 * L1) * Cos(Alpha - Beta)
Delta(2 , 2) = Inertie2 + M3 * L2 * L2
Delta(2 , 3) = M3 * L2 * Lg3 * Cos(Mu - Beta)

Teta_matrice(2 , 1) = -G0 * (M2 * Lg2 + M3 * L2)
* Cos(Beta) + (M2 * L1 * Lg2 + M3 * L1 * L2)
* Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha - Beta) + _
M3 * L2 * Lg3 * Mu_point * Mu_point * Sin(Mu - Beta)
' *****
' 3 ieme equatuion page 24 et 25
Delta(3 , 1) = Inertie1 + M2 * L1 * L1
+ M2 * L1 * Lg2 * Cos(Alpha - Beta) + _
(M3 * L1 * L1) + (M3 * L1 * L2 * Cos(Alpha - Beta))
+ (M3 * L1 * Lg3 * Cos(Alpha - Mu))

Delta(3 , 2) = Inertie2 + (M2 * L1 * Lg2 * Cos(Alpha - Beta))
+ (M3 * L1 * L2 * Cos(Alpha - Beta)) + _
(M3 * L2 * L2) + (M3 * L2 * Lg3 * Cos(Beta - Mu))

Delta(3 , 3) = Inertie3 + (M3 * L1 * Lg3 * Cos(Alpha - Mu))
+ (M3 * L2 * Lg3 * Cos(Mu - Beta))

Teta_matrice(3 , 1) = -(M1 * G0) * (Lg1 * Cos(Alpha)) _
- (M2 * G0) * (L1 * Cos(Alpha) + Lg2 * Cos(Beta)) _
- (M3 * G0) * (L1 * Cos(Alpha) + L2 * Cos(Beta) + Lg3 * Cos(Mu)) _
- M2 * L1 * Lg2 * Beta_point * Beta_point * Sin(Alpha - Beta) _
+ M2 * L1 * Lg2 * Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha - Beta) _
- M3 * L1 * L2 * Beta_point * Beta_point * Sin(Alpha - Beta) _
- M3 * L1 * Lg3 * Mu_point * Mu_point * Sin(Alpha - Mu) _
+ M3 * L1 * L2 * Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha - Beta) _

```

```

+ M3 * L2 * Lg3 * Mu_point * Mu_point * Sin(Mu - Beta) _
+ M3 * L1 * Lg3 * Alpha_point * Alpha_point * Sin(Alpha - Mu) _
+ M3 * L2 * Lg3 * Beta_point * Beta_point * Sin(Beta - Mu)
End Sub
' *****
Function x1_fd(time1, X_olda) As Double '
    x1_fd = X_olda(4, 1)
End Function
' *****
Function x2_fd(time1, X_olda) As Double
    x2_fd = X_olda(5, 1)
End Function
' *****
Function x3_fd(time1, X_olda) As Double
    x3_fd = X_olda(6, 1)
End Function
' *****
Public Function rech_sh(nom) As Integer
Dim nbsh As Integer, i As Integer, str1 As String
nbsh = ActiveWorkbook.Sheets.Count
rech_sh = 0
For i = 1 To nbsh
    str1 = Sheets(i).Name
    If (str1 = nom) Then rech_sh = i
Next i
If (rech_sh = 0) Then
    MsgBox " ne trouve pas la feuille de nom " & nom
End
End If
End Function
' *****
Function Xtige1_f(Alpha, L1) As Double
Xtige1_f = L1 * Cos(Alpha)
End Function
' *****
Function Ytige1_f(Alpha, L1) As Double
Ytige1_f = L1 * Sin(Alpha)
End Function
' *****
Function Xtige2_f(Alpha, L1, Beta, L2) As Double
Xtige2_f = L1 * Cos(Alpha) + L2 * Cos(Beta)
End Function
' *****
Function Ytige2_f(Alpha, L1, Beta, L2) As Double
Ytige2_f = L1 * Sin(Alpha) + L2 * Sin(Beta)
End Function

```

```

Function Xtige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, L3)
Xtige3_f = L1 * Cos(Alpha) + L2 * Cos(Beta) + L3 * Cos(Mu)
End Function
' *****
Function Ytige3_f(Alpha, L1, Beta, L2, Mu, L3)
Ytige3_f = L1 * Sin(Alpha) + L2 * Sin(Beta) + L3 * Sin(Mu)
End Function
' *****
Function XVG1_f(Alpha, Alpha_point) As Double
XVG1_f = -Lg1 * Alpha_point * Sin(Alpha)
End Function
' *****
Function YVG1_f(Alpha, Alpha_point) As Double
YVG1_f = Lg1 * Alpha_point * Cos(Alpha)
End Function
' *****
Function XVG2_f(Alpha, Alpha_point, Beta,
Beta_point) As Double
XVG2_f = -L1 * Alpha_point * Sin(Alpha)
- Lg2 * Beta_point * Sin(Beta)
End Function
' *****
Function YVG2_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point) As Double
YVG2_f = L1 * Alpha_point * Cos(Alpha)
+ Lg2 * Beta_point * Cos(Beta)
End Function
' *****
Function XVG3_f(Alpha, Alpha_point, Beta,
Beta_point, Mu, Mu_point) As Double
XVG3_f = -L1 * Alpha_point * Sin(Alpha)
- L2 * Beta_point * Sin(Beta) _
- Lg3 * Mu_point * Sin(Mu)
End Function
' *****
Function YVG3_f(Alpha, Alpha_point, Beta, Beta_point, Mu, Mu_point) As
YVG3_f = L1 * Alpha_point * Cos(Alpha) + L2 * Beta_point * Cos(Beta) _
+ Lg3 * Mu_point * Cos(Mu)
End Function
' *****

```

D.2 Unité

```

' *****
Public Sub GAUSS1D(Delta, teta2, x, nbeq, nbsys)
' il faut que teta2 et x soient _
declares de dimensions 2.

```

```

' resolution de delta*X=teta
' nbeq est le nb d'equations
' nbsys est le nb de systemes a resoudre . en general nbsys =1
Dim idim As Integer
Const prec1 As Double = 0.0000000001

Const isys As Integer = 1
idim = nbeq ' attention a ne pas changer cette instruction : elle _
est utilisee pour le dimensionnement d'une matrice
Dim asmat() As Double
ReDim asmat(1 To idim, 1 To 1) As Double
Dim i As Integer, j As Integer, l As Integer,
k1 As Integer, k2 As Integer
Dim rp As Double, spro As Double,
il As Integer, iswitch As Integer
Dim tet As Double
If (idim <> nbeq) Then
MsgBox "arret dans gauss1d : idim <> nbeq"
Stop
End If

For i = 1 To (nbeq - 1)
If (Abs(Delta(i, i)) < prec1) Then
'RECHERCHE DE LA LIGNE DE PIVOT NON NUL
iswitch = 0
For il = (i + 1) To nbeq
If ((Abs(Delta(il, i)) > prec1) And (iswitch = 0)) Then
'RECHERCHE FINIE
iswitch = 1
'PERMUTATION DES LIGNES I ET IL
For k1 = 1 To idim
asmat(k1) = Delta(i, k1)
Delta(i, k1) = Delta(il, k1)
Delta(il, k1) = asmat(k1)
Next k1
tet = teta2(i, isys)
teta2(i, isys) = teta2(il, isys)
teta2(il, isys) = tet
End If
Next il
End If
' ****
For j = (i + 1) To nbeq
rp = Delta(j, i) / Delta(i, i)
For k2 = i To nbeq
Delta(j, k2) = Delta(j, k2) - rp * Delta(i, k2)

```

```

Next k2
For l = 1 To nbsys
  tet = teta2(j, l)
  teta2(j, l) = tet - rp * teta2(i, l)
Next l
Next j
Next i
' ****
For l = 1 To nbsys
  x(nbeq, l) = teta2(nbeq, l) / Delta(nbeq, nbeq)
  For i = (nbeq - 1) To 1 Step -1
    spro = 0#
    For j = (i + 1) To nbeq
      spro = spro + Delta(i, j) * x(j, l)
    Next j
    x(i, l) = (teta2(i, l) - spro) / Delta(i, i)
  Next i
Next l
End Sub

```

