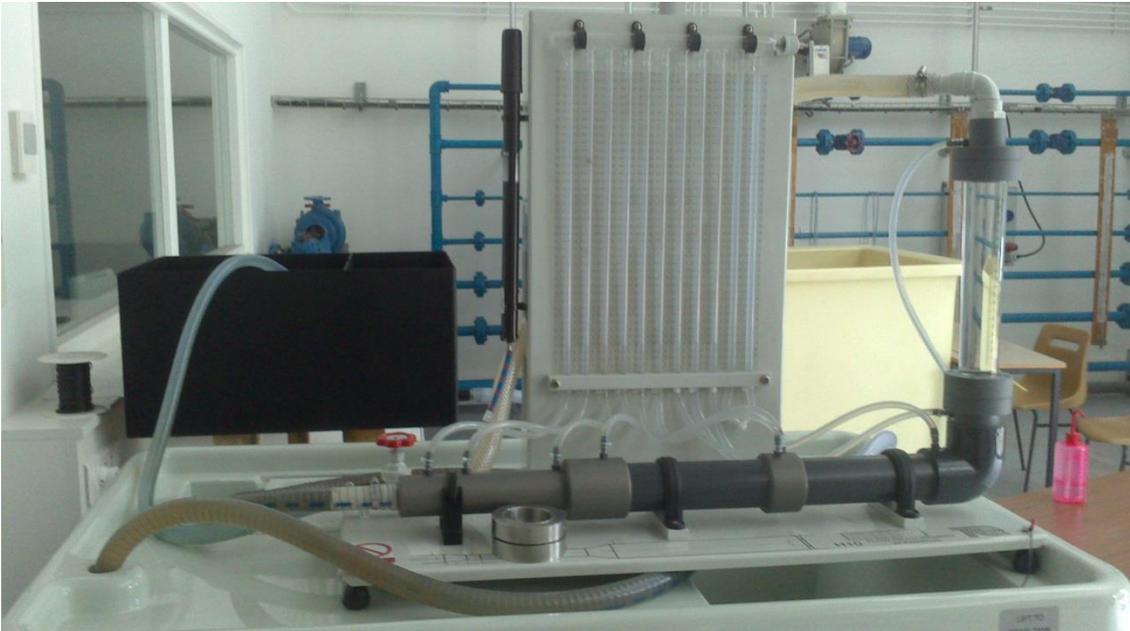


Projet de Physique P6
STPI/P6/2014 – n°44

Mise en évidence des limites de la débitmétrie



Etudiants :

COUDERT Antoine

LAMY Lucas

MORANNE Pierre

Enseignant-responsable du projet :

LEMETAYER Julien

Date de remise du rapport : 16/06/2014

Référence du projet : STPI/P6/2014 – n°44

Intitulé du projet :

Mise en évidence des limites de la débitmétrie.

Type de projet :

Bibliographique et expérimental

Objectif du projet :

- Étudier le fonctionnement de différents débitmètres.
- Évaluer les performances de ces systèmes de mesure de débit
- Mettre en évidence les limites de la débitmétrie.

Mots-clefs du projet :

- Venturi
- Rotamètre
- Bernoulli
- Perte de charge

Sommaire

Introduction	page 5
Organisation du travail	page 6
1) Etude des débitmètres et démonstrations	page 7
2) Manipulations et mesures	page 11
3) Analyse	page 14
Conclusion	page 18
Bibliographie / Illustrations	page 19
Annexes	page 20

Introduction :

Au cours de notre deuxième année de STPI à l'INSA, nous sommes amenés à réaliser un projet de physique durant un semestre. Dans le cadre de notre formation ingénieure, ce projet, réalisé en groupe, s'est avéré formateur puisqu'il nous a confrontés à un problème concret qui constitue le quotidien d'un ingénieur en industrie. De plus nous avons pu mettre en pratique les connaissances théoriques acquises en mécanique des fluides et donc travailler sur une application « réelle » du cours de P8-2.

Notre projet intitulé « Mise en évidence des limites de la débitmétrie », vise donc à étudier les différents débitmètres afin de dégager les limites de ces systèmes. Dans un premier temps ce sujet nous a permis de découvrir les principes de la débitmétrie qui est largement utilisée dans l'industrie ainsi que ses multiples applications. De plus, comme tout projet nous avons dû apprendre à travailler à la fois individuellement et en groupe pour mener à bien notre étude dans les temps.

Mais qu'est-ce qu'un débitmètre ? Comme son nom l'indique il s'agit d'un système permettant de calculer le débit d'un fluide, c'est-à-dire un volume par unité de temps. Nous avons donc dû étudier et comprendre le fonctionnement des principaux systèmes existants. Notre étude se limitera à l'effet Venturi, au diaphragme et au rotamètre.

Dans une première partie de ce rapport, nous étudierons les différents débitmètres, leurs spécificités ainsi que les relations théoriques propres à chacun. Ensuite nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus grâce aux manipulations en laboratoire. Pour finir nous confronterons les relations théoriques, aux données expérimentales pour mettre en évidence les limites de ces systèmes.

Organisation du travail :

Tout d'abord, nous nous sommes documentés séparément sur la débitmétrie et sur les systèmes à étudier. Une fois le principe de chaque débitmètre compris, nous avons cherché à établir les relations théoriques liées à ces systèmes. Il nous a donc fallu redémontrer les relations mathématiques permettant de calculer le débit induit par l'effet Venturi, au niveau du diaphragme et du rotamètre. Nous avons dû redémontrer le théorème de Bernoulli, sur lequel nous nous sommes basés pour l'ensemble de notre projet.

Les différentes expressions établies nous ont permis de pouvoir calculer théoriquement le débit dans les différents systèmes utilisés. Restait donc à confronter les résultats théoriques, aux résultats expérimentaux.

Dans un premier temps, nous avons été dans le laboratoire dans le bâtiment Darwin afin de se familiariser avec les débitmètres et d'en comprendre leur fonctionnement. Ensuite, il nous a fallu trouver un système simple, permettant de mesurer le plus précisément possible un débit. Avec l'aide du professeur encadrant, nous avons trouvé un débitmètre qui consiste en une cuve séparée en deux par une paroi en haut de laquelle se trouve une fente triangulaire laissant passer l'eau. Il a fallu par la suite dimensionner la cuve, mais aussi déterminer l'angle et la taille optimale de la fente afin d'envoyer ces données au laboratoire de physique CORIA, pour la fabrication de la cuve.

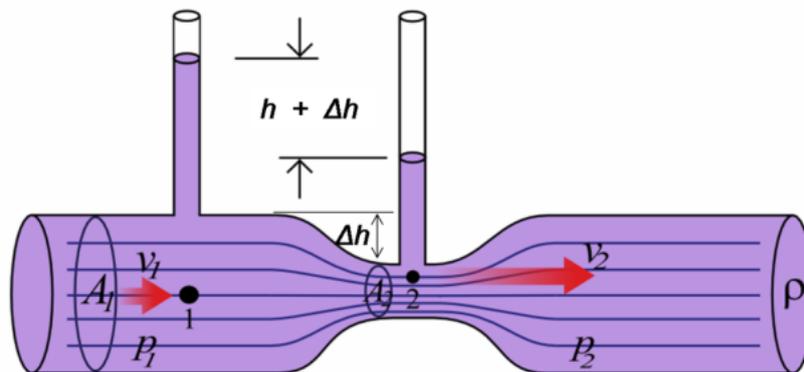
Une fois ce système installé, nous avons pu commencer les manipulations. Nous avons réalisé plusieurs mesures de débits pour chaque système. Enfin nous avons exploité les données expérimentales sur Excel et avons pu les comparer aux résultats théoriques.

1) Etude des débitmètres et démonstrations

Le tube de Venturi :

Le tube de venturi est un débitmètre simple à pression différentielle, utilisé dès 1887. Ce système est basé sur l'effet Venturi qui peut se définir par la formation d'une dépression suivie d'une accélération des particules fluides.

Au niveau du venturi, il y a une diminution de section, suivie d'une augmentation de la section. On qualifie d'ailleurs souvent un venturi de « convergent-divergent ». Ici on se concentre seulement sur la partie décroissante de la section ou convergente, la partie croissante n'intervenant pas dans le calcul du débit mais permettant notamment de calculer les pertes de charges de ce système. Cette réduction de section, provoque donc une dépression, qui se traduit par une augmentation de la vitesse du fluide et une diminution de la pression. Deux prises de pression, une en amont et une en aval, vont permettre de calculer le débit. En effet la pression sera plus importante avant le Venturi qu'à la sortie. Cela va se traduire par une différence de hauteur d'eau dans les tubes reliés aux deux prises de pression. C'est cette différence de hauteur engendrée par la différence de pression, qui va permettre de calculer le débit du fluide ; le débit ne changeant pas au passage de ce système.



On supposera la distance sur laquelle la réduction et l'augmentation de section s'applique comme suffisamment grande devant la réduction et l'augmentation elles-mêmes afin de négliger les pertes de charges liées à la convergence (pertes de charges expliquées ci-après).

En partant du théorème de Bernoulli, on obtient, en simplifiant les termes liés à l'altitude qui est supposée constante dans le tube :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

Comme explicité dans l'annexe 3, on utilise les relations suivantes :

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_1 - h_2) \quad \text{et} \quad Q = v_1 \times A_1 = v_2 \times A_2$$

Pour finalement obtenir le débit par :

$$Q = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \times \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}} \times S_2$$

Le Diaphragme :

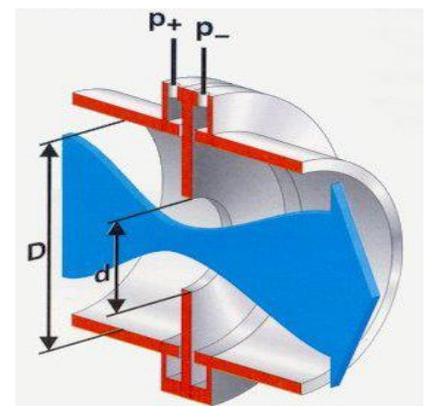
Un diaphragme est une plaque mince percée d'un orifice circulaire, que l'on place dans la conduite, perpendiculairement au sens d'écoulement du fluide. Comme dans le venturi, le débit du fluide étant constant, on observe logiquement au passage de l'orifice, une augmentation de la vitesse et une diminution de la pression. De même, deux prises de pression, en amont et en aval du diaphragme, permettent de mesurer la différence de pression et donc d'en déduire le débit volumique. Ce système, crée néanmoins des pertes de charges plus importantes que le venturi. Des pertes de charges caractéristiques créées au niveau de l'orifice et qui dépendent du débit.

Encore une fois à partir du théorème de Bernoulli :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

En remplaçant les vitesses par les débits divisés par les sections :

$$P_1 - P_2 = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4} \right)$$



On factorise les sections par la petite d et on introduit le terme β qui correspond au rapport des sections d/D :

$$Q^2 = \frac{d^4 \pi^2 (P_1 - P_2)}{8\rho} \left(\frac{1}{1 - \beta^4} \right)$$

Comme explicité dans l'annexe 4 on introduit un terme C qui va nous permettre de prendre en compte les pertes de charge qui, comme dis plus haut, sont plus importantes que pour le Venturi :

$$Q = \frac{\pi d^2 \sqrt{g}}{2\sqrt{2}} \sqrt{(h_1 - h_2)} \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^4}} \times C$$

Rotamètre :

Ce dernier débitmètre étudié est constitué d'un flotteur, qui est placé dans un tube vertical gradué et transparent, dont la section varie, le diamètre étant croissant vers le haut du tube. Le déplacement du flotteur est proportionnel au débit et donc la position du flotteur indiquée par les graduations du tube va correspondre à un débit bien précis.

Le rotamètre fait partie des débitmètres à section variable. En effet à la différence des débitmètres à pression différentielles comme le venturi ou le diaphragme, ici c'est la section de passage du fluide qui varie en fonction du débit, la différence de pression étant quasiment constante (indépendante du débit). Les pertes de charges induites dans le rotamètre, sont plus faibles que dans les autres systèmes étudiés, du fait du diamètre important du tube, elles ne sont donc pas prises en compte dans le calcul du débit.

On réalise un bilan des forces :

$$\vec{F}_T + \vec{\pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$$

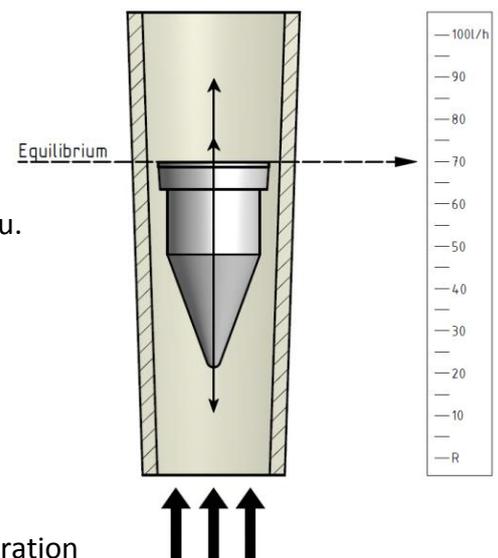
On sait que $\|\vec{\pi}_A\| < \|\vec{P}\|$ car le rotamètre est plus dense que l'eau.

Le terme \vec{F}_T est la force de Trainée qui a pour formule admise :

$$\vec{F}_T = C_X \rho \frac{v^2}{2} S_F$$

Avec S_F la surface du flotteur

C_X qui dépend du système, obtenu à partir d'une courbe de calibration



Pertes de charges :

Dans chaque système on peut mettre en évidence des pertes de charge. Ces pertes de charges correspondent à une perte d'énergie du fluide par frottement. C'est en outre ce phénomène qui est à l'origine des différences de pression observées dans le Venturi et le diaphragme. Or c'est grâce à la mesure de ces différences de pression que nous pouvons calculer le débit du liquide.

Ainsi il apparaît que les systèmes de débitmètres à pression différentielle étudiés, reposent sur ces pertes de charges.

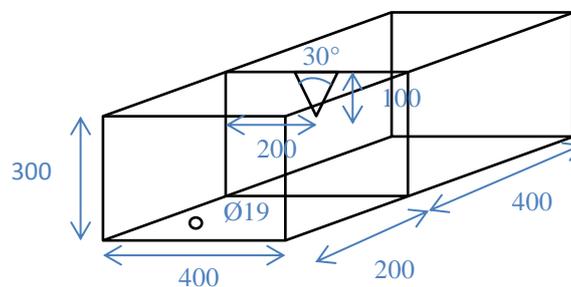
2) Manipulations et mesures

A) Manipulation

Préparation des manipulations

Après avoir retrouvé les différentes formules permettant de calculer le débit à partir d'une différence de hauteur d'eau dans les tubes, grâce au théorème de Bernoulli, nous avons alors décidé de réaliser différentes mesures de débits pour ensuite comparer les résultats expérimentaux avec les valeurs théoriques.

Pour réaliser ces différentes mesures, Mr Lemetayer nous a préalablement expliqué le fonctionnement du débitmètre et comment régler les vannes d'entrée et de sortie qui influent toutes deux sur le débit. Au préalable nous avons également décidé des dimensions de notre bac avec lui. Le bac est composé de deux petits bacs séparés d'une paroi fendue triangulairement. La forme triangulaire est dans notre cas la plus adaptée pour mesurer précisément de faibles débits. Les bacs ont une largeur de 40cm, une hauteur de 30cm et respectivement une longueur de 20cm pour l'un et 40cm pour l'autre. La fente, longue de 10cm, forme un angle de 30° et se situe au milieu de la plaque séparatrice.



Protocole expérimental

Nous avons donc installé notre bac dans le système que nous allons étudier. Dans un premier temps nous nous sommes limités à des mesures simples des hauteurs d'eau dans chacun des tubes et dans notre bac, pour différentes ouvertures de la vanne d'entrée, repérées grâce aux graduations du rotamètre. Nous avons laissé la vanne de sortie complètement ouverte et nous étudierons son impact dans un deuxième temps. En effet, dans un souci de précision dans la lecture des hauteurs d'eau, nous avons dû utiliser tout d'abord une pompe afin d'augmenter la pression dans les tubes pour les débits élevés et ensuite la vanne de sortie pour des débits faibles afin de stabiliser l'eau dans les tubes.

B) Résultats

Voici les valeurs que nous avons relevées pour les hauteurs d'eau dans les tubes et dans le bac en mètre. Ces valeurs correspondent aux différents tubes, nous avons relevé les valeurs de chaque tube même si nous ne nous sommes finalement servis que des valeurs des tubes 1, 2, 5 et 6. En effet, nous ne nous sommes consacrés qu'à l'étude du venturi et du diaphragme, nous n'avons pas étudié l'élargissement de section qui correspond aux tubes 3 et 4 et le coude qui correspond aux tubes 7 et 8 (le 9^{ème} communique avec le 8^{ème}). Nous n'avons pas étudié ces 5 tubes car ils font intervenir des pertes de charges. Nous avons également relevé la valeur du rotamètre pour chacune de nos mesures.

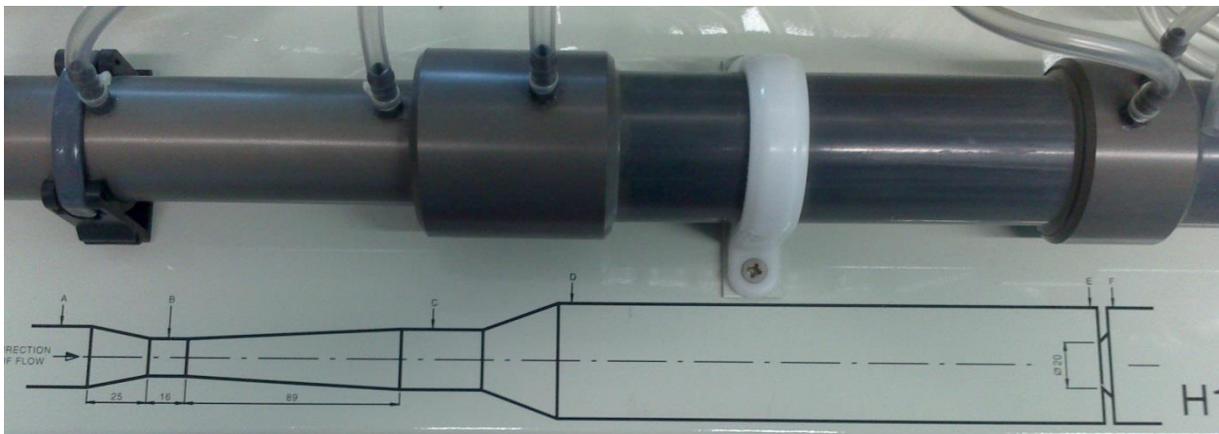


Schéma du tube avec prises de pressions correspondantes aux tubes

Nos valeurs sont les suivantes :

Hauteur d'eau bac (m)	Tube 1	Tube 2	Tube 3	Tube 4	Tube 5	Tube 6	Tube 7	Tube 8	Tube 9	Rotamètre
0,018	0,228	0,226	0,228	0,233	0,258	0,226	0,227	0,228	0,126	0,5
0,019	0,23	0,228	0,23	0,23	0,242	0,228	230	230	0,128	1
0,025	0,232	0,228	0,232	0,232	0,243	0,228	229	229	0,128	2
0,027	0,236	0,227	0,235	0,236	0,248	0,226	228	228	0,129	3,5
0,032	0,242	0,226	0,24	0,241	0,254	0,224	228	227	0,128	5
0,036	0,25	0,226	0,247	0,248	0,26	0,22	226	225	0,126	6,5
0,04	0,26	0,224	0,255	0,256	0,27	0,216	223	222	0,123	8
0,04	0,274	0,223	0,266	0,268	0,275	0,21	220	220	0,12	9,4
0,046	0,306	0,216	0,292	0,296	0,308	0,193	210	209	0,108	12,3
0,052	0,322	0,214	0,306	0,31	0,322	0,187	206	204	0,102	13,5
0,057	0,366	0,2	0,34	0,348	0,374	0,156	0,189	0,185	0,08	16,4
0,058	0,395	0,196	0,366	0,377	0,382	0,142	0,182	0,177	0,066	17,9
0,059	0,34	0,136	0,31	0,32	0,33	0,08	0,12	0,116	0,002	18
0,065	0,388	0,124	0,348	0,362	0,372	0,048	0,102	0,098	0	20
Section tube (m²)	0,000531	0,000201	0,000531	0,002116						

C) Difficultés rencontrées

Lorsque nous avons effectué les mesures précédentes, nous avons rencontré plusieurs difficultés :

- La première réside dans la mesure de la hauteur d'eau à travers la fente de notre bac. En effet celle-ci est plus ou moins approximative car nous avons scotché une règle à côté de la fente pour mesurer la hauteur d'eau. De plus des erreurs de mesure ont pu être faites car il y avait des fluctuations d'eau dans notre bac ce qui pouvait interférer dans les valeurs que nous avons mesuré. En réalité ceci vient du fait que l'écoulement n'est pas régulier, ce qui engendre un régime instationnaire.
- Le deuxième problème est que nous nous sommes aperçus que pour les débits les plus élevés, l'eau comprise dans les tubes avait tendance à dépasser la plus grande graduation, à cause de ça, nous ne pouvions plus mesurer les différences de hauteur d'eau. Pour résoudre ce problème, nous avons augmenté la pression à l'intérieur des tubes en y injectant de l'air à l'aide d'une pompe.
- Enfin, à l'inverse, pour de petits débits, la hauteur d'eau dans les tubes n'était pas constante et nous avons donc dû utiliser la vanne de sortie afin d'augmenter la pression interne du système et stabiliser la hauteur d'eau.

3) Analyse

Dans cette partie nous allons tout d'abord exploiter nos valeurs expérimentales pour obtenir, à partir de différences dans les hauteurs d'eau à l'intérieur des tubes verticaux, des valeurs expérimentales de débit. Nous les comparerons ensuite avec les données théoriques pour finalement statuer sur l'exactitude et la précision de nos mesures et sur les limites de ces systèmes de mesure de débit.

Dans un premier temps nous allons comparer les valeurs lues sur le rotamètre avec celles obtenues à l'aide de notre cuve. Pour ce faire, nous avons mesuré la hauteur de l'eau s'écoulant par la fente puis, avec la formule admise :

$$Q = \frac{16}{25} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{5} gh^5}$$

Nous obtenons les valeurs du débit donné par la cuve pour différentes mesures du rotamètre (L/min).

Hauteur d'eau bac (m)	Débit bac réel (L/s)	Rotamètre
0,018	0,0149	0,5
0,019	0,0171	1
0,025	0,0339	2
0,027	0,0411	3,5
0,032	0,0628	5
0,036	0,0843	6,5
0,04	0,1097	8
0,04	0,1097	9,4
0,046	0,1556	12,3
0,052	0,2114	13,5
0,057	0,2659	16,4
0,058	0,2777	17,9
0,059	0,2898	18
0,065	0,3692	20

(Les valeurs sont consignées dans un graphique joint à la fin de cette partie.)

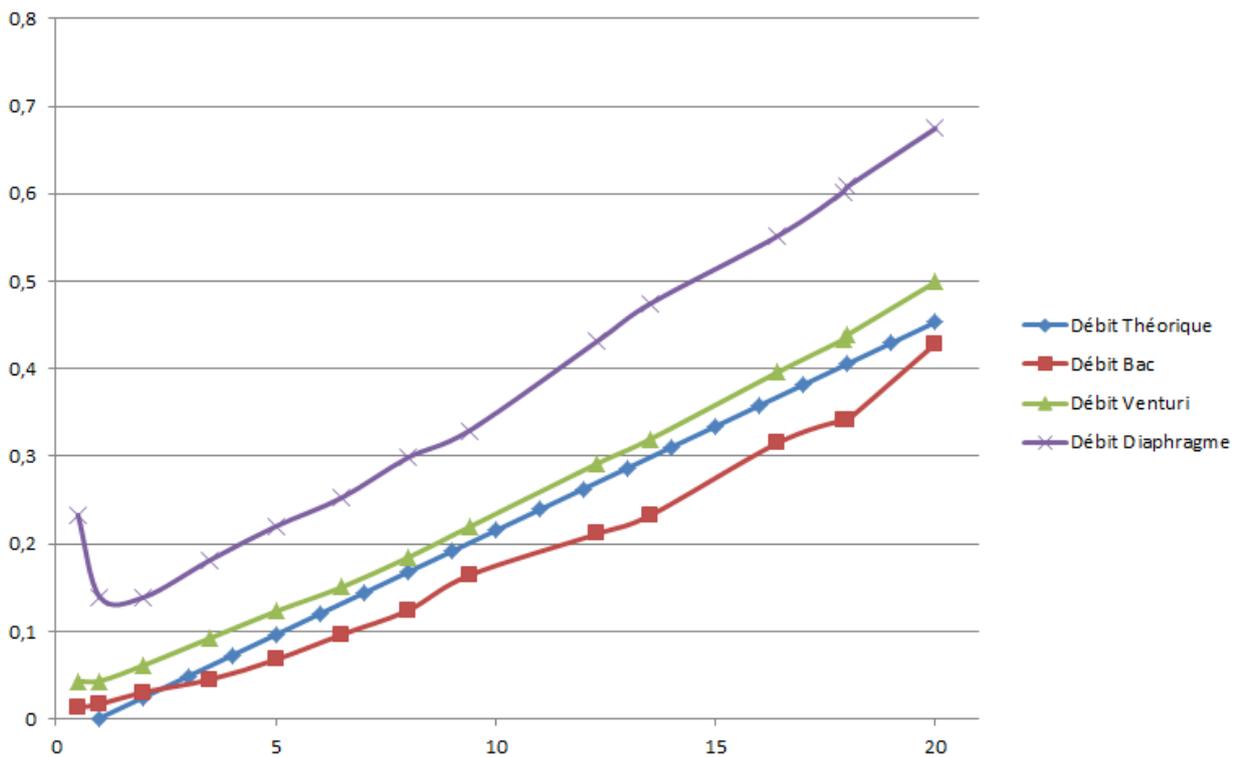
Dans un deuxième temps nous avons étudié l'effet Venturi. Avec la formule démontrée en annexe 3 nous avons pu obtenir une nouvelle valeur de débit, fonction de la valeur lu sur le rotamètre.

Rotamètre	Tube 1	Tube 2		Delta h	Débit Venturi
0,5	0,228	0,226		0,002	0,043448415
1	0,23	0,228		0,002	0,043448415
2	0,232	0,228		0,004	0,061445338
3,5	0,236	0,227		0,009	0,092168006
5	0,242	0,226		0,016	0,122890675
6,5	0,25	0,226		0,024	0,150509724
8	0,26	0,224		0,036	0,184336013
9,4	0,274	0,223		0,051	0,21940374
12,3	0,306	0,216		0,09	0,291460828
13,5	0,322	0,214		0,108	0,31927934
16,4	0,366	0,2		0,166	0,395833898
17,9	0,395	0,196		0,199	0,433396577
18	0,34	0,136		0,204	0,438807481
20	0,388	0,124		0,264	0,499184282
Section tube (m²)	0,000531	0,000201	Rapport des sections	0,378698225	

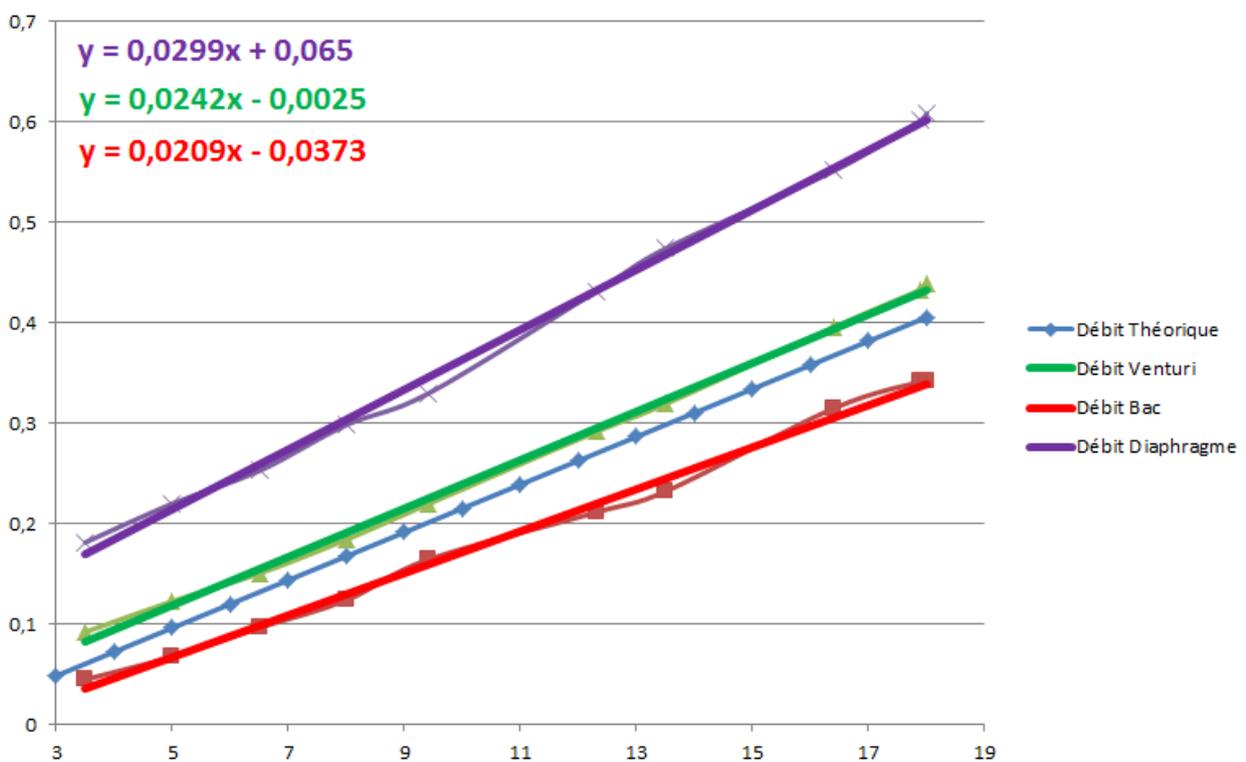
Enfin nous avons fait de même pour le diaphragme. Avec l'annexe 4 on obtient une nouvelle fois des valeurs de débit.

Rotamètre	Tube 5	Tube 6	Delta h	Débit Diaphragme
0,5	0,258	0,226	0,032	0,248966118
1	0,242	0,228	0,014	0,164675608
2	0,243	0,228	0,015	0,170455448
3,5	0,248	0,226	0,022	0,206431799
5	0,254	0,224	0,03	0,241060407
6,5	0,26	0,22	0,04	0,278352582
8	0,27	0,216	0,054	0,323416474
9,4	0,275	0,21	0,065	0,354831311
12,3	0,308	0,193	0,115	0,471969765
13,5	0,322	0,187	0,135	0,511366345
16,4	0,374	0,156	0,218	0,649820645
17,9	0,382	0,142	0,24	0,681821793
18	0,33	0,08	0,25	0,695881454
20	0,372	0,048	0,324	0,792205335

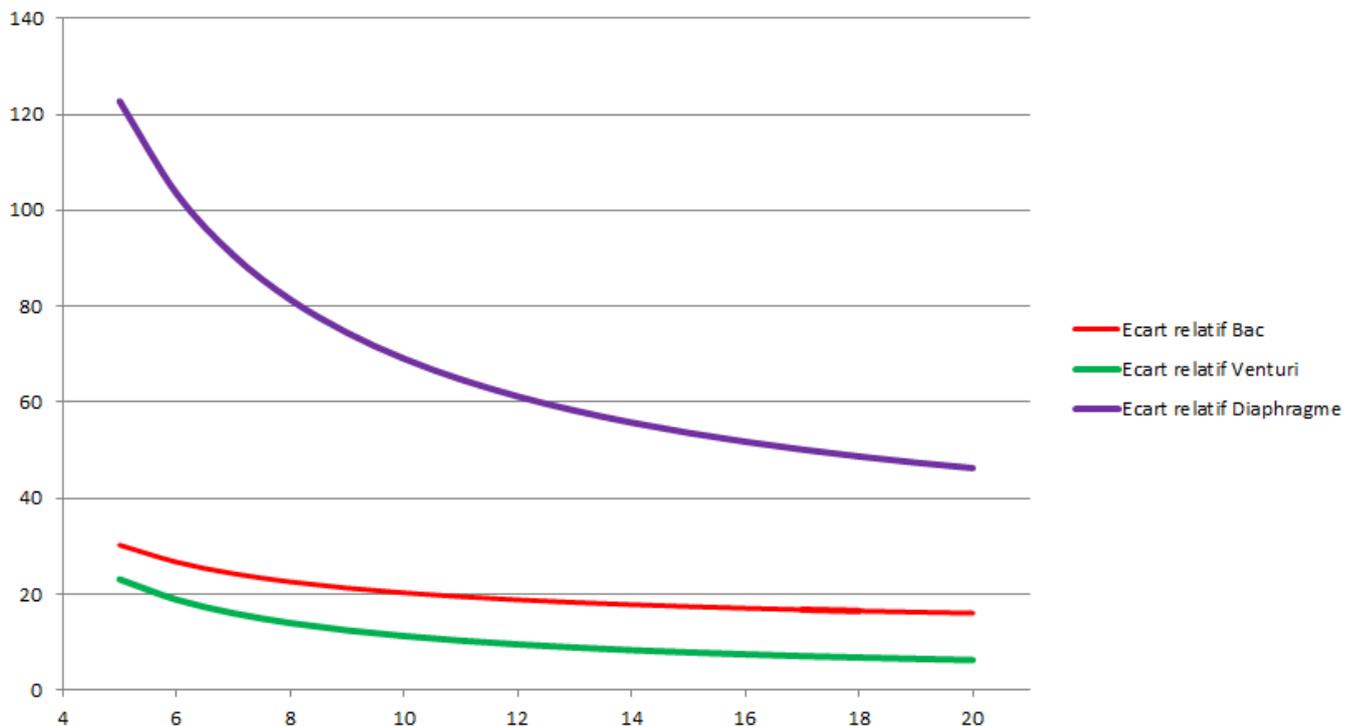
Toutes ces valeurs sont ajoutées au graphique ci-après.



Comme on peut le voir sur ce graphique, dans les petits débits, ici inférieurs à 3L/s on a des résultats peu précis. De plus nous avons eu des difficultés à la lecture des hauteurs d'eau pour les débits élevés. Aussi nous réduisons ce graphique à un intervalle entre 3 et 18 L/s.



Avec les équations des courbes expérimentales nous pouvons réaliser les écarts relatifs en pourcentages pour chaque système par rapport à la courbe théorique. On obtient le graphique suivant (on choisit l'intervalle [5,20] pour le rotamètre afin de retirer les valeurs très imprécises des petits débits tout en gardant les grands débits pour mettre en évidence notre hypothèse) :



On peut tout de suite remarquer que le Venturi nous donne une valeur du débit très proche de celle théorique alors que le diaphragme en est beaucoup plus éloigné. De plus notre hypothèse est confirmée puisque pour des débits de plus en plus grands l'imprécision liée aux erreurs de mesure devient négligeable devant le débit lui-même, bien qu'il subsiste tout de même des incertitudes, représentées ici par les asymptotes des courbes. Pour expliquer ces disparités dans les écarts relatifs il faut tout d'abord distinguer les courbes Venturi et diaphragme de celle du bac. En effet pour le Venturi nous avons vu que la réduction et l'augmentation de section se faisaient sur une longueur de tube suffisamment grande pour négliger les pertes de charges. Notre hypothèse est donc vérifiée. Pour le diaphragme en revanche nous avons utilisé un coefficient de décharge pour matérialiser les pertes de charges. L'approximation par ce coefficient joue donc dans l'erreur que l'on obtient. Enfin pour le bac nous pouvons penser que les erreurs peuvent venir d'imprécisions dans la mesure surtout pour les petits débits et de difficultés rencontrées pour la mesure des grands débits. Le diamètre du tube de sortie n'étant pas assez grand, la cuve se remplissait plus qu'elle ne se vidait pour les débits supérieurs à environ 16L/min (rotamètre).

Conclusion :

En conclusion, nous venons de voir que la précision des systèmes de mesure de débit étudiés est meilleure pour des débits dits « importants ». Nous avons toutefois des erreurs plus ou moins conséquentes sur l'ensemble de nos résultats. Pour des mesures très fines de débit et pour des valeurs faibles il aurait fallu des moyens beaucoup plus pointus et mettre en place un protocole très strict. En plus de cela nous aurions dû aller plus loin dans nos connaissances de la mécanique des fluides pour réduire au maximum toutes les imprécisions et approximations tant théoriques qu'expérimentales.

Pour la partie expérimentale, ces erreurs proviennent notamment de nos mesures et de nos lectures. Ceci explique les grandes différences pour les petits débits. Ce qui est compréhensible car plus le débit est fort et moins les erreurs de mesures influent sur le résultat. Le débit augmentant, ce type d'erreur s'est fait moins handicapant.

En revanche, pour la partie théorique nous nous sommes basés sur plusieurs hypothèses afin de s'approcher d'un modèle assez simple pour que nous puissions l'étudier. Le théorème central de notre projet utilise lui aussi de nombreuses hypothèses que nous avons vu ne pas être la réalité. Ces approximations ont donc un impact constant sur nos mesures et calculs et expliquent une erreur « minimum ».

De manière générale, ce projet nous a permis d'une part sur le plan scientifique de découvrir le domaine de la mécanique des fluides en parallèle de nos cours mais aussi sur le plan professionnel de se confronter à un problème qui s'apparente à notre conception du métier d'ingénieur.

Ce qui aux premiers abords nous avait paru obscur et peu engageant s'est avéré un projet des plus intéressants, qui s'est déroulé dans un cadre à la fois sérieux et pédagogique. Grâce à la présence de M. Lemetayer et à notre bonne application, nous avons bien cerné le problème et défini tôt nos objectifs. En combinant travail individuel et collectif, sur place et chez soi nous avons su respecter les échéances et mené à bien notre projet.

Pour aller plus loin il aurait été intéressant d'étudier, sur les mêmes systèmes un autre fluide. Un fluide non parfait où la compressibilité ou la viscosité auraient eu un impact dans les calculs. Pour ce faire il nous aurait fallu aller plus loin dans le cours de mécanique des fluides et pouvoir réaliser des mesures avec cet autre fluide.

Bibliographie :

http://www.wontu.fr/COURS/DEBITS_1.pdf

http://eduscol.education.fr/rnchimie/gen_chim/jezequel/1-organes%20deprimogenes.pdf

http://iutpa.univ-pau.fr/live/digitalAssets/94/94561_Mesure_de_debits.pdf

http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Bernoulli

Illustrations :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Venturi

<http://www.rotameter-shop.fr/principe-de-mesure/rotametre-principe-de-fonctionnement.html>

Photos prises par les étudiants en laboratoire et salle de TP de P6.

Annexes :

Pour l'ensemble des démonstrations le fluide étudié est l'eau. Sa masse volumique est $\rho_{eau}=1,0 \text{ kg.L}^{-1}$, on le supposera incompressible. De plus on supposera un écoulement stationnaire et permanent (sauf cas aux limites), nous étudierons le fluide sur une ligne de courant. On négligera les échanges de chaleur et l'influence de la viscosité. L'eau est ici considérée comme un fluide parfait. Les manipulations ont été réalisées à température ambiante et à pression atmosphérique.

Annexe 1 : Démonstration du théorème de Bernoulli

La seule force s'appliquant sur le système {fluide} est le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

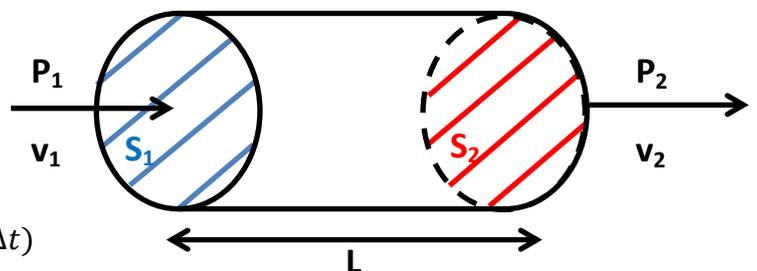
Celui-ci est conservatif, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du chemin parcouru, et donc nous pouvons appliquer le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_{pp} + \Delta E_c = W_{1 \rightarrow 2}$

Pour le cas d'un tube, on applique cette équation à un cylindre de section variable S_1 puis S_2 et de longueur L . Le fluide entre dans le cylindre avec une pression P_1 et une vitesse v_1 et sort avec une pression P_2 et une vitesse v_2 .

On peut donc écrire l'expression des forces de pression :

$$W_{1 \rightarrow 2} = P_1(S_1 \times L) - P_2(S_2 \times L)$$

ou bien $W_{1 \rightarrow 2} = P_1(v_1 \times \Delta t) - P_2(v_2 \times \Delta t)$



L'énergie potentielle est donnée par la relation suivante : $\Delta E_{pp} = mg(h_2 - h_1)$

Et l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$

Finalement : $mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = P_1(S_1 \times L) - P_2(S_2 \times L)$

Or $\rho = \frac{m}{V}$ c'est-à-dire $\frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ donc :

$$\boxed{gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}}$$

Annexe 2 : Calcul du débit à partir d'une différence de hauteur d'eau

D'après le théorème de Bernoulli : $gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$

Dans les tubes la vitesse est nulle, on a donc : $gh_1 + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{P_2}{\rho}$

C'est-à-dire : $P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1)$ or pour l'eau on a $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \text{ kg.L}^{-1}$ et avec $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$

Nous obtenons :

$$\Delta P = 10 \Delta h$$

D'où une pression de 1 bar tous les 10m.

En repartant de Bernoulli, pour une section de tube horizontal c'est-à-dire sans variation d'altitude, on a : $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$

On obtient donc :

$$v_2 = v_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)}$$

Or $Q = v \times S$ donc le débit est donné par la relation :

$$Q = \left(v_1 + \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)} \right) \times S$$

Annexe 3 : Effet Venturi

Pour étudier l'effet Venturi, reprenons notre tube avec une variation de section (ici une réduction). On suppose que la variation de section n'est pas brutale, à la différence d'un diaphragme avec des pertes de charges singulières et donc on néglige ces dernières. On repart de Bernoulli, dans le tube horizontal on considère qu'il n'y a pas de variation d'altitude et donc d'énergie potentielle.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2$ et $P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2}v_2^2(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2})$

$$\text{Donc } v_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} \times \frac{1}{1 - (\frac{v_1}{v_2})^2} \quad \text{d'où } v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \times \sqrt{\frac{1}{1 - (\frac{v_1}{v_2})^2}}$$

Or on sait que $P_1 - P_2 = \rho g(h_1 - h_2)$ et $Q = v_1 \times S_1 = v_2 \times S_2$

Finalement

$$Q = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \times S_2$$

Annexe 4 : Diaphragme

Nous avons posé l'équation de Bernoulli. Dans le tube horizontal on considère qu'il n'y a pas de variation d'altitude et donc d'énergie potentielle. Le théorème de Bernoulli nous donne :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

C'est-à-dire : $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = P_1 - P_2$

De plus on sait que le débit du fluide dans le tube est : $Q = v_1 \times S_1 = v_2 \times S_2$

Donc : $\frac{1}{2}\rho Q^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = P_1 - P_2$ et $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho Q^2 \left(\frac{1}{\frac{\pi^2}{16}d^4} - \frac{1}{\frac{\pi^2}{16}D^4} \right)$

D'où : $P_1 - P_2 = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4} \right)$ et $P_1 - P_2 = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} (1 - \beta^4)$ avec $\beta = \frac{d}{D}$

Finalement $Q^2 = \frac{d^4 \pi^2 (P_1 - P_2)}{8\rho} \left(\frac{1}{1 - \beta^4} \right)$ or $(P_1 - P_2) = \rho g (h_1 - h_2)$

Comme nous n'étudions pas les pertes de charges, on utilise un coefficient de décharge pour modéliser ces pertes de charges :

$$Q = \frac{\pi d^2 \sqrt{g}}{2\sqrt{2}} \sqrt{(h_1 - h_2)} \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^4}} \times C$$