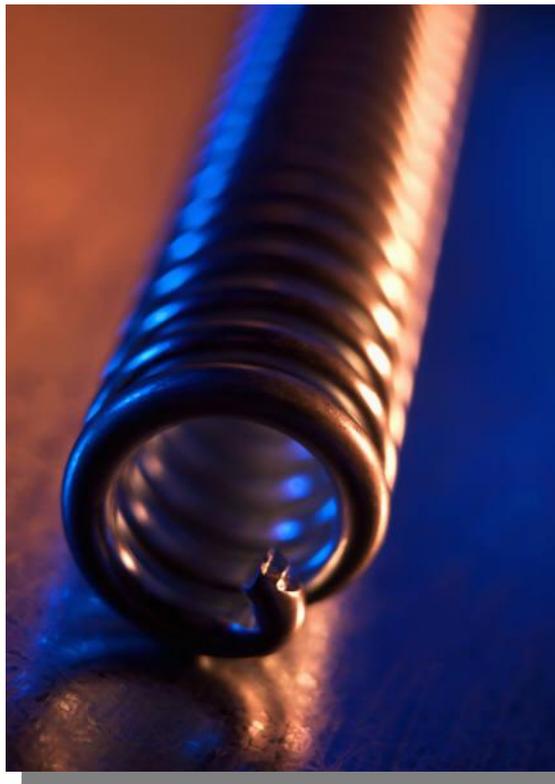


*Projet de Physique P6*  
*STPI/P6/2014 – 6*

**Oscillateurs – masse et ressort**



**Etudiants :**

**Jean DESPLATS**

**Alexis KALFA**

**Baptiste LEFEBVRE**

**Carl RODRIGUEZ**

**Enseignant-responsable du projet :**

**Bernard GLEYSE**



Date de remise du rapport : **15/06/2014**

Référence du projet : **STPI/P6/2014 - 06**

Intitulé du projet : **Oscillateurs – masse et ressort**

Type de projet : **Biblio / Modélisation**

Objectifs du projet (10 lignes maxi) :

**Déterminer les équations décrivant en fonction du temps le mouvement de masses couplées à des ressorts en réseau, à l'aide d'outils mathématiques (transformation de Laplace, algèbre linéaire) et numérique (Maple).**

Mots-clefs du projet (4 maxi) : **masse, ressort, système oscillant.**

## TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	6
2. Méthodologie & organisation du travail.....	6
3. Travail réalisé et résultats.....	7
3.1. Systèmes à 2 masses – 3 ressorts	7
3.1.1. Résolution à l'aide de la méthode de Laplace	7
3.1.2. Résolution algébrique	11
3.1.3. Influence des différents paramètres du système	16
3.2. Généralisation à N ressorts	17
4. Conclusion et perspectives.....	20
5. Bibliographie.....	20
5.1. Ressources internet	20
5.2. Autres ressources	22
6. Annexes.....	23
6.1. Mêmes masses mêmes ressorts	23
6.2. Mêmes masses deux ressorts différents	24
6.3. Deux masses mêmes ressorts	25
6.4. Deux masses deux ressorts	27
6.5. Deux masses trois ressorts	28

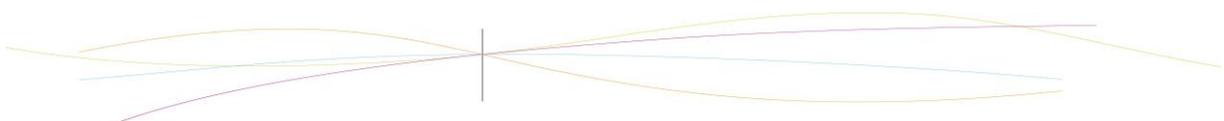
## NOTATIONS, ACRONYMES

Nous utiliserons dans ce rapport les noms de constantes habituelles :

- K ou k pour les constantes de raideur ;
- m pour les masses ;
- x ou y pour les positions des masses en fonction du temps.

Les valeurs de  $\lambda$  apparaissant dans les équations de mouvements comprennent leurs facteurs de  $\frac{k}{m}$  (par exemple, «  $\lambda_1 = 2 \frac{k}{m}$  »).

Les codes donnés en annexe sont dans leur totalité en langage Maple.



## 1. Introduction

Le semestre 4 inclut un EC P6, qui consiste en un projet à mener en équipe pour s'ouvrir à un domaine particulier de mathématiques, de physique, de chimie etc. Nous avons constitué un groupe de quatre étudiants et, encadrés par M. Gleyse professeur de mathématiques, nous nous sommes intéressés au comportement des systèmes de masses et de ressorts.

Les systèmes oscillants sont présents dans de nombreux domaines. Nous avons déjà eu l'occasion de traiter quelques problèmes de systèmes oscillants en mécanique (P2) ainsi qu'en électricité (P3, P5), mais les problèmes traités ici sont plus complexes car contiennent plusieurs éléments oscillants en réseau. Il existe plusieurs approches pour tenter de décrire ce type de système, nous nous sommes donc réparti le travail pour pouvoir développer simultanément une approche algébrique, une étude par la transformée de Laplace, ainsi que des simulations numériques grâce au logiciel Maple.

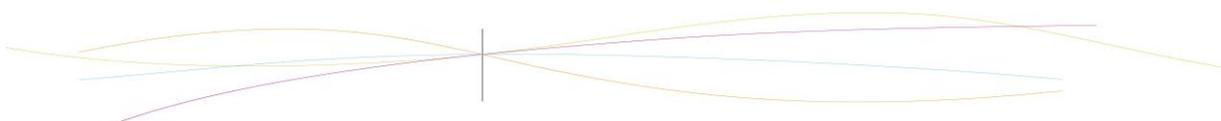
Nous ferons l'hypothèse que les pertes d'énergie dues aux frottements sont nulles et que les masses oscillent horizontalement de façon idéale. Dans les différents graphes présentés, chaque courbe représente les oscillations d'une masse par rapport à sa position d'équilibre.

## 2. Méthodologie & organisation du travail

La répartition du travail s'est réalisée de la manière suivante :

- Alexis Kalfa a travaillé sur une approche du projet par les transformées de Laplace.
- Carl Rodriguez et Baptiste Lefebvre ont utilisé la méthode algébrique pour résoudre les équations de mouvements :
  - Carl Rodriguez en généralisant le problème à des constantes de raideur et des masses différentes.
  - Baptiste Lefebvre en uniformisant ces constantes et en généralisant à des systèmes à N masses couplés à N+1 ressorts.
- Jean Desplats s'est chargé de la modélisation numérique des différents problèmes sur Maple.

Les deux premières séances ayant servi à cerner l'objectif du projet et à rassembler une bibliographie aussi consistante que possible, nous avons pu commencer nos parties sur de bonnes bases sur le reste du semestre. Les deux dernières séances ont été axées sur la préparation du rapport, tout en finissant les quelques éléments manquants à la rédaction de celui-ci.



### 3. Travail réalisé et résultats

#### 3.1. Systèmes à 2 masses – 3 ressorts

##### 3.1.1 Résolution à l'aide de la méthode de Laplace

Lors de l'étude du mouvement d'un système masses-ressorts, les équations différentielles de mouvements sont parfois d'un ordre très élevé, donc trop compliquées à résoudre de manière classique. Il faut donc utiliser des méthodes alternatives de calculs pour les résoudre.

Nous allons ici nous intéresser à la méthode de Laplace.

##### Définition de la méthode de Laplace

Lorsque l'on veut résoudre une équation différentielle par la méthode de Laplace, il suffit d'utiliser la transformée de Laplace. En effet, la transformée nous permet de nous ramener à une équation plus simple à résoudre. Puis lorsque l'on résout cette équation « plus simple » on doit utiliser la transformée inverse pour retrouver la solution de notre équation de base.

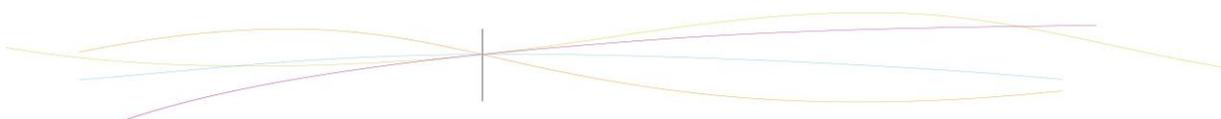
##### La transformée de Laplace

Pour une fonction  $f(t)$ , non nulle et avec  $t > 0$ , sa transformée de Laplace est notée  $F(s)$ , et on a :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Pour trouver les transformées, on utilise la définition ci-dessus, mais pour les cas les plus compliqués, on se réfère à une table comme celle-ci :

$f(t), t \geq 0$	$F(s)$	ROC
1. $\delta(t)$	1	All $s$
2. $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
3. $t$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
4. $t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
5. $e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}(s) > -a$
6. $te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
7. $t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > -a$
8. $\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
9. $\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
10. $e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
11. $e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$\text{Re}(s) > -a$
12. $t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
13. $t \cos bt$	$\frac{s^2 - b^2}{(s^2 + b^2)^2}$	$\text{Re}(s) > 0$



### Transformée inverse de Laplace

La transformée inverse nous permet, comme nous l'avons expliqué plus tôt, de retrouver la solution de notre équation d'origine. En gardant le fait que la fonction  $f(t)$  est non nulle avec  $t > 0$ , la transformée inverse est donnée par la formule :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\cdot\infty}^{\gamma+i\cdot\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

où  $\gamma$  est choisi de sorte que :

- l'intégrale soit convergente, ce qui implique que  $\gamma$  soit supérieur à la partie réelle de toute singularité de  $F(p)$  ;
- à l'infini,  $|F(p)|$  tende vers 0 au moins aussi rapidement que  $\frac{1}{|p|^2}$ .

Pour trouver les transformée inverse, on se sert de la définition et de table (comme celle-ci-dessus) mais dans « le sens » inverse que celui utilisé pour trouver la transformée.

### Propriétés de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace présente différentes propriétés, nous allons ici vous présenter les principales. On pose  $f$  et  $g$  deux fonctions qui peuvent être transformées par Laplace.

Linéarité :

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a \mathcal{L}\{f\} + b \mathcal{L}\{g\}$$

Dérivation :

$$\mathcal{L}\{f'\} = p\mathcal{L}\{f\} - f(0^-)$$

Intégration :

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} \mathcal{L}\{f\}$$

Valeur initiale :

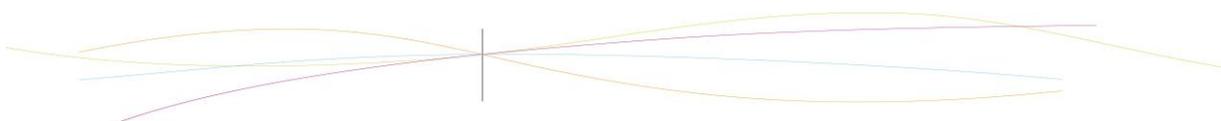
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

### Mise en pratique de la méthode de Laplace pour résoudre des équations différentielles

La résolution d'une équation différentielle  $y(t)$  par la méthode de Laplace s'effectue en trois grande étapes :

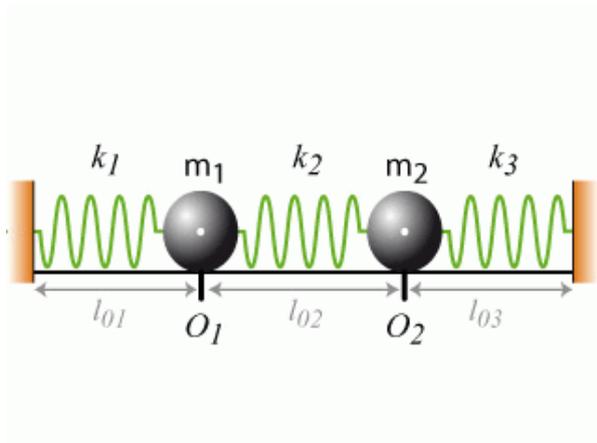


- on doit d'abord appliquer la transformée de Laplace à l'équation  $y(t)$ , on trouve donc une équation avec du  $Y(p)$ .
- La deuxième étape consiste à isoler  $Y(p)$ . Il faut donc remplacer par les conditions initiales dans le calcul. On cherche ensuite à regrouper les  $Y(p)$  pour l'isoler.
- Enfin on applique la transformée inverse à la solution  $Y(p)$  que l'on a trouvée pour trouver  $y(t)$ .

Pour illustrer ces propos, nous allons nous servir des applications aux systèmes masse ressort étudié.

### Application de la transformée de Laplace au système masse-ressort

Nous allons donc étudier le cas d'un système masse-ressort composé de deux masses  $m_1=m_2=0,1$ , et de trois ressorts de constantes de rappel  $k_1=k_3=20$  et  $k_2=10$ .



Nous avons donc deux ressorts identiques que nous nommerons  $K$ , et nous appellerons le troisième  $k$ . Les masses, toutes deux identiques, seront appelées  $m$ . Enfin on pose  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  les deux équations de position liées respectivement à  $m_1$  et  $m_2$ .

Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à ce système. On a :

$$(1) m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

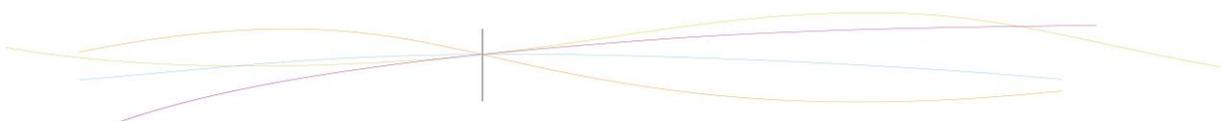
$$(2) m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Conditions initiales : on donne  $x_1(0)=0,1$  et  $x_2(0)=0,1$ . Autrement dit les deux masses sont lâchées en phase.

Puis nous appliquons la transformée de Laplace à ces deux équations :

$$(1) m(S^2L_1(x)-Sx_1(0)-x_1'(0))+KL_1(x)-k(L_1(x)-L_2(x))=0$$

$$(2) m(S^2L_2(x)-Sx_2(0)-x_2'(0))+KL_2(x)-k(L_2(x)-L_1(x))=0$$



En effectuant (1)-(2), on remarque que  $L1(x)=L2(x)$ .

Ce résultat nous apparait logique car le système est en phase.

Nous pouvons donc résoudre une des deux équations :

$$(1) m(S^2L1(x)-Sx1(0)-x1'(0))+KL1(x)=0$$

$$(1) mS^2L1(x)-mSx1(0)+KL1(x)=0$$

Nous cherchons ensuite à isoler  $L1(x)$  :

$$(1) L1(x)=\frac{mSx1(0)}{K+mS^2}$$

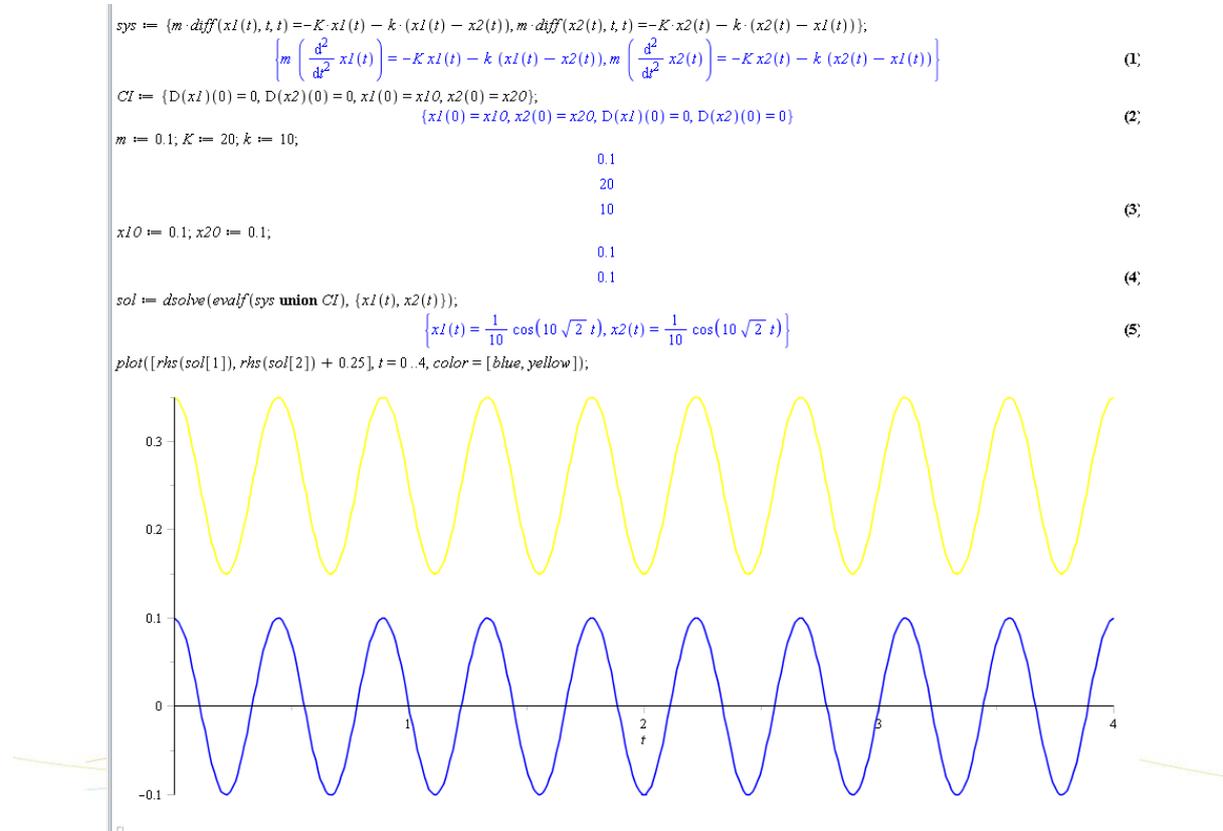
On remplace ensuite par les conditions initiales. Nous avons donc :

$$(1) L1(x)=L2(x)=0,1\frac{S}{S^2+200}$$

A l'aide de la table que nous avons présentée plus haut nous pouvons appliquer la transformée inverse de Laplace et nous déduisons que :

$$x1(t)=x2(t)=0,1.\cos(10\sqrt{2} t).$$

On peut visualiser à l'aide de Maple les oscillations que font les masses lorsqu'elles sont lâchées avec le même décalage de 0,1. On constate que les masses continuent à osciller en phase. Notez que les deux courbes sont volontairement décalées en hauteur pour éviter qu'elles ne se recouvrent :



On observe également le comportement des deux masses lorsqu'elles sont lâchées en opposition de phase. Il ressort que les oscillations, bien qu'opposées, gardent la même période et la même amplitude :

```

sys := {m * diff(x1(t), t, t) = -K * x1(t) - k * (x1(t) - x2(t)), m * diff(x2(t), t, t) = -K * x2(t) - k * (x2(t) - x1(t))};
      {m * (d^2 x1(t) / dt^2) = -K * x1(t) - k * (x1(t) - x2(t)), m * (d^2 x2(t) / dt^2) = -K * x2(t) - k * (x2(t) - x1(t))}

      {0.1 * (d^2 x1(t) / dt^2) = -30 * x1(t) + 10 * x2(t), 0.1 * (d^2 x2(t) / dt^2) = -30 * x2(t) + 10 * x1(t)}

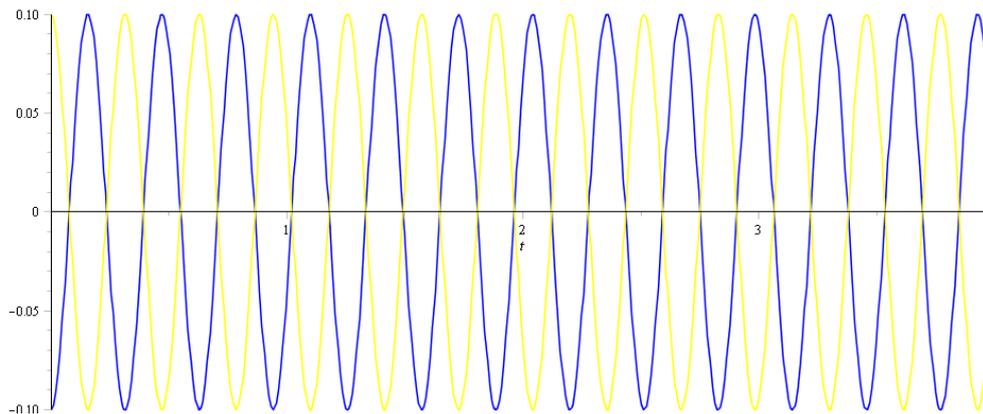
Cl := {D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0, x1(0) = x10, x2(0) = x20};
      {x1(0) = x10, x2(0) = x20, D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0}

m := 0.1; K := 20; k := 10;

x10 := -0.1; x20 := 0.1;

sol := dsolve(evalf(sys union Cl), {x1(t), x2(t)});
      {x1(t) = -1/10 * cos(20 t), x2(t) = 1/10 * cos(20 t)}

plot([rhs(sol[1]), rhs(sol[2])], t = 0..4, color = [blue, yellow]);
  
```



### 3.1.2 Résolution algébrique

On veut déterminer les équations de mouvement de masses reliées par des ressorts. On s'attache ici au problème de trois ressorts et deux masses

Principe fondamental de la dynamique :

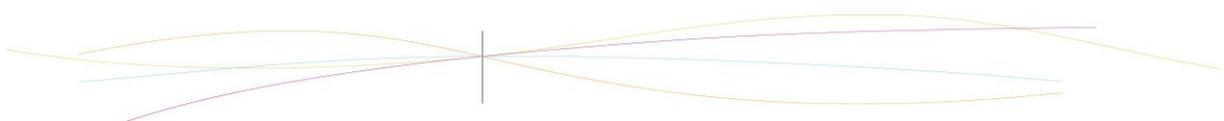
$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

donc  $\ddot{x}_1 = \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2$  et  $\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2} x_2$

En considérant que  $k_1 = k_3 = K$ , que  $k_2 = k$  et que  $m_1 = m_2 = m$

$$\text{On a donc } \frac{d\vec{X}}{dt^2} = A\vec{X} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \frac{-(K+k)}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-(k+K)}{m} \end{pmatrix}$$



On cherche donc les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associées aux vecteurs propres  $u_1$  et  $u_2$  de façon à ce que  $Au_1 = \lambda_1 u_1$  et  $Au_2 = \lambda_2 u_2$

Donc  $Au = \lambda u$

d'où  $Au = \lambda Id u$

et ainsi  $(A - \lambda Id)u = 0$  avec  $u \neq 0$

ce qui revient à  $\det[A - \lambda Id] = 0$

On résout donc 
$$\begin{bmatrix} \frac{-(K+k)}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-(k+K)}{m} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = \left( \frac{K+k}{m} - \frac{K+k}{m} \right)^2 + \frac{4k^2}{m^2} = \left( \frac{2k}{m} \right)^2$$

donc on a deux solutions réelles  $\lambda_1 = \frac{-K}{m}$  et  $\lambda_2 = \frac{-2k-K}{m}$

or on sait que  $Au_1 = \lambda_1 u_1$  et  $Au_2 = \lambda_2 u_2$

donc  $Au_2 = \begin{pmatrix} \frac{-(K+k)}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-(K+k)}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 Id u_2 = \frac{-2k-K}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{-(K+k)}{m} x_2 + \frac{k}{m} y_2 \\ \frac{k}{m} x_2 - \frac{(k+K)}{m} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2k-K}{m} x_2 \\ \frac{-2k-K}{m} y_2 \end{pmatrix} \text{ d'où } x_2 = -y_2 \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De même  $Au_1 = \begin{pmatrix} \frac{-K}{m} x_1 \\ \frac{-K}{m} y_1 \end{pmatrix}$  donc  $x_1 = y_1$  et  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a  $PDP^{-1} = A$  avec  $A = \begin{pmatrix} -\frac{K+k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k+K}{m} \end{pmatrix}$

Et aussi  $A_{(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-K}{m} & 0 \\ 0 & \frac{-2k-K}{m} \end{pmatrix}$

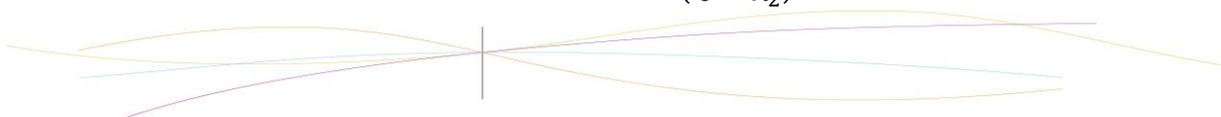
$$P_{(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'' &= AX \\ X'' &= PDP^{-1}X \\ P^{-1}X'' &= DP^{-1}X \\ (P^{-1}X)'' &= DP^{-1}X \end{aligned}$$

En procédant au changement de variable suivant:  $P^{-1}X = Y$

On a  $Y'' = DY$

$$D = PAP^{-1} = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on résout les équations différentielles homogènes

$$\begin{aligned} y_1'' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2'' &= \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

$$y_1(t) = B_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1}t) + C_1 \sin(\sqrt{-\lambda_1}t)$$

$$y_2(t) = B_2 \cos(\sqrt{-\lambda_2}t) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda_2}t)$$

En se rapportant au changement de variable  $Y = P^{-1}X$

donc  $PY = X$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

D'après les conditions initiales :

$$k_1 = k_3 = K = 20$$

$$k_2 = k = 10$$

$$m_1 = m_2 = m = 0,1$$

$$\dot{x}_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(0) = 0$$

et  $\begin{matrix} x_1(0) = X10 \\ x_2(0) = X20 \end{matrix}$  avec X10 et X20 positions respectives de lâché des masses  $m_1$  et  $m_2$

$$x_1(0) = X10 = y_1(0) + y_2(0)$$

$$x_2(0) = X20 = y_1(0) - y_2(0)$$

$$y_1(0) = B_1 \text{ et } y_2(0) = B_2$$

$$y_1(0) = B_1 = \frac{X20 + X10}{2}$$

Soit après résolution du système

$$y_2(0) = B_2 = \frac{X10 - X20}{2}$$

$$\dot{x}_1(0) = C_1 \sqrt{-\lambda_1} \cos(\sqrt{-\lambda_1}t) + C_2 \sqrt{-\lambda_2} \cos(\sqrt{-\lambda_2}t) = 0$$

$$\dot{x}_2(0) = C_1 \sqrt{-\lambda_1} \cos(\sqrt{-\lambda_1}t) - C_2 \sqrt{-\lambda_2} \cos(\sqrt{-\lambda_2}t) = 0$$

Et comme  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$  alors  $C_1 = C_2 = 0$

$$x_1(t) = \frac{X10 + X20}{2} \cos(\sqrt{-\lambda_1}t) + \frac{X10 - X20}{2} \cos(\sqrt{-\lambda_2}t)$$

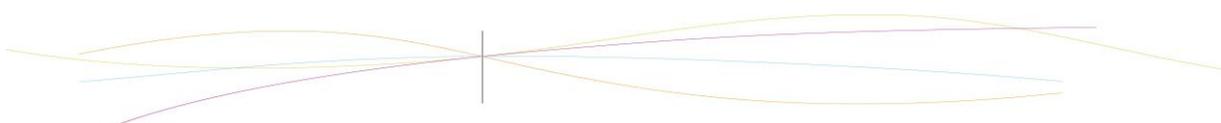
On a donc

$$x_2(t) = \frac{X10 + X20}{2} \cos(\sqrt{-\lambda_1}t) - \frac{X10 - X20}{2} \cos(\sqrt{-\lambda_2}t)$$

En remplaçant par les valeurs expérimentales

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{10} \cos(10\sqrt{2}t)$$

On a donc bien les deux masses lâchées sans vitesse initiale qui décrivent idéalement le même mouvement, des oscillations sinusoïdales en phase autour des points d'équilibre respectifs. Voir courbes Maple pour analogie avec la méthode numérique.



### Simplification en égalisant les constantes

En utilisant des constantes de rappel  $k_1=k_2=k$  et  $m_1=m_2=m$

On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Bilan des forces sur } M_1: \quad & \overrightarrow{F_{1 \rightarrow M_1}} = -k(x_1 - l_0) \vec{x} \\ & \overrightarrow{F_{2 \rightarrow M_1}} = k(x_2 - x_1 - l_0) \vec{x} \\ \text{Bilan des forces sur } M_2: \quad & \overrightarrow{F_{2 \rightarrow m_2}} = -k(x_2 - x_1 - l_0) \vec{x} \\ & \overrightarrow{F_{3 \rightarrow m_2}} = -k(L - x_2 - l_0) \vec{x} \end{aligned}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + kl_0 + kx_2 - kx_1 - kl_0 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 + kl_0 + kx_1 - kx_2 - kl_0 = kx_1 - 2kx_2 + kL \end{aligned}$$

L étant la longueur totale du système,  $l_0$  la longueur à l'équilibre d'un ressort.

En mettant ces équations sous forme matricielle, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{mL} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} &= -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc une équation de la forme  $\ddot{X} = A\vec{X} + \vec{B}$  avec  $A = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{B} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}$

À l'équilibre,  $\ddot{X} = A\vec{X} + \vec{B} = \vec{0}$ , d'où  $\vec{X}_{\text{éq}} = \begin{pmatrix} \frac{L}{3} \\ \frac{2L}{3} \end{pmatrix}$

On prendra par la suite  $\ddot{X} = AX$  (l'hypothèse simplificatrice étant que

$$x_1(t=0) - x_{1\text{éq}} = x_2(t=0) - x_{2\text{éq}} = 0$$

On cherche maintenant à exprimer la matrice A sous la forme  $A = PDP^{-1}$

On cherche pour cela les valeurs propres de A (en résolvant l'équation  $\det(A - I_d \lambda) = 0$ ).

Ce qui donne :  $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$  et  $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ , Soit  $D = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

À partir de ces deux valeurs propres, on résout les deux équations  $(A - \lambda I)\vec{X} = 0$ .

Ce qui nous donne les deux vecteurs propres,  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On obtient donc la matrice de passage  $P = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

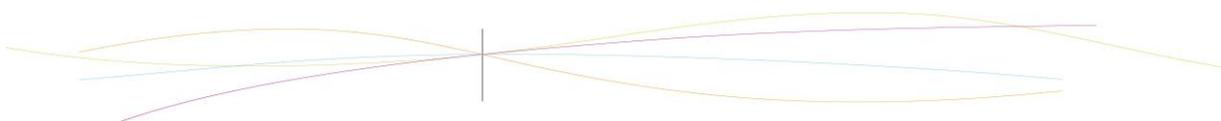
On a donc  $\ddot{X} = AX \iff_{A=PD P^{-1}} \ddot{X} = P D P^{-1} X$

D'où  $P^{-1} \ddot{X} = D P^{-1} X$

On opère le changement de variable  $P^{-1} X = Y$

On a donc  $\ddot{Y} = DY$  : ce qui donne  $\begin{cases} \ddot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \ddot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y}_1 - \lambda_1 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 - \lambda_2 y_2 = 0 \end{cases}$

Ces équations différentielles donnent des équations de mouvement de la forme :

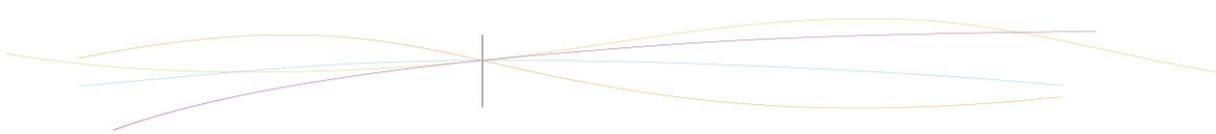
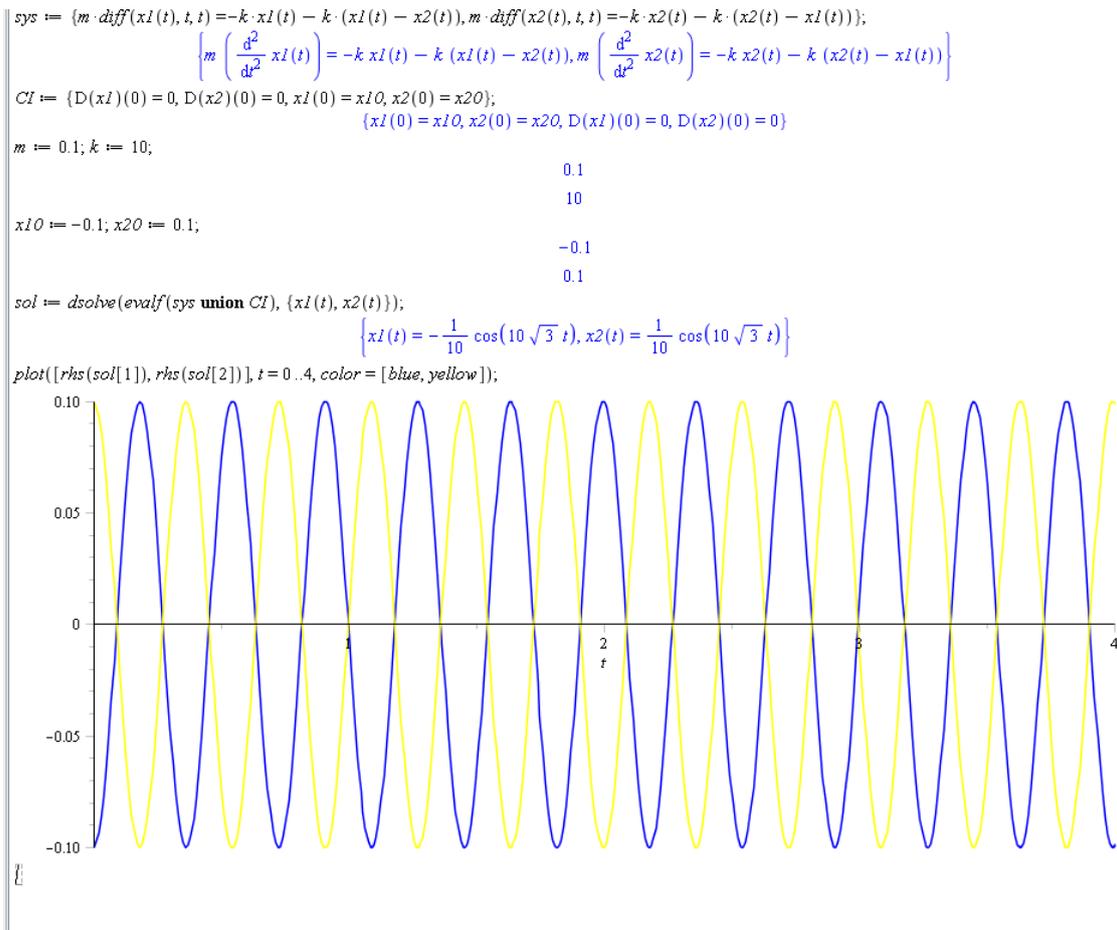


$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \beta_1 \sin(-\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ y_2(t) = \alpha_2 \cos(-\sqrt{\frac{3k}{m}}t) + \beta_2 \sin(\sqrt{\frac{3k}{m}}t) \end{cases}$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes dépendantes des conditions initiales :

à  $t=0$ ,  $y_i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) = \alpha_i$ , qui est donc la position initiale de la masse  $i$ .

Le graphe ci-dessous construit sur Maple illustre la situation où  $k_1=k_2=k_3=k$  et  $m_1=m_2=m$ , avec les deux masses lâchées en opposition de phase, c'est-à-dire avec un décalage inverse :

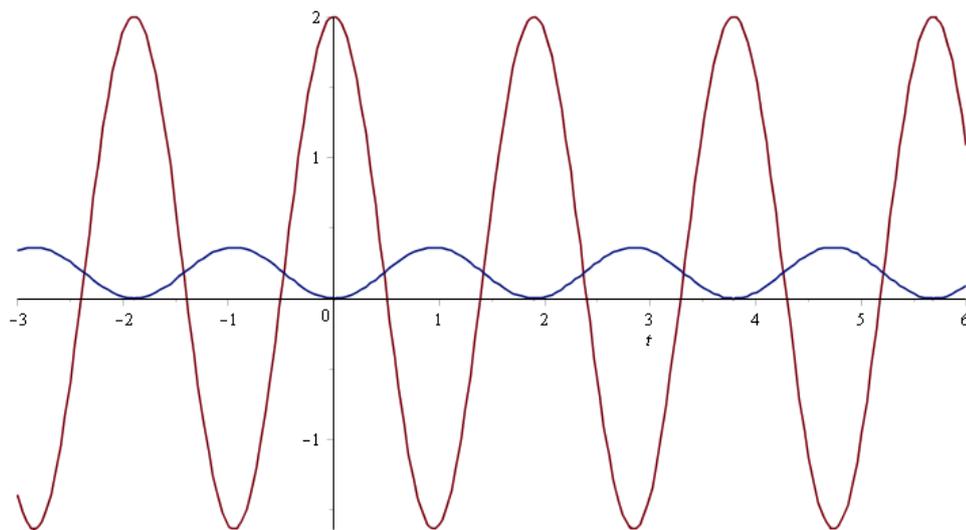


### 3.1.3 Influence des différents paramètres du système

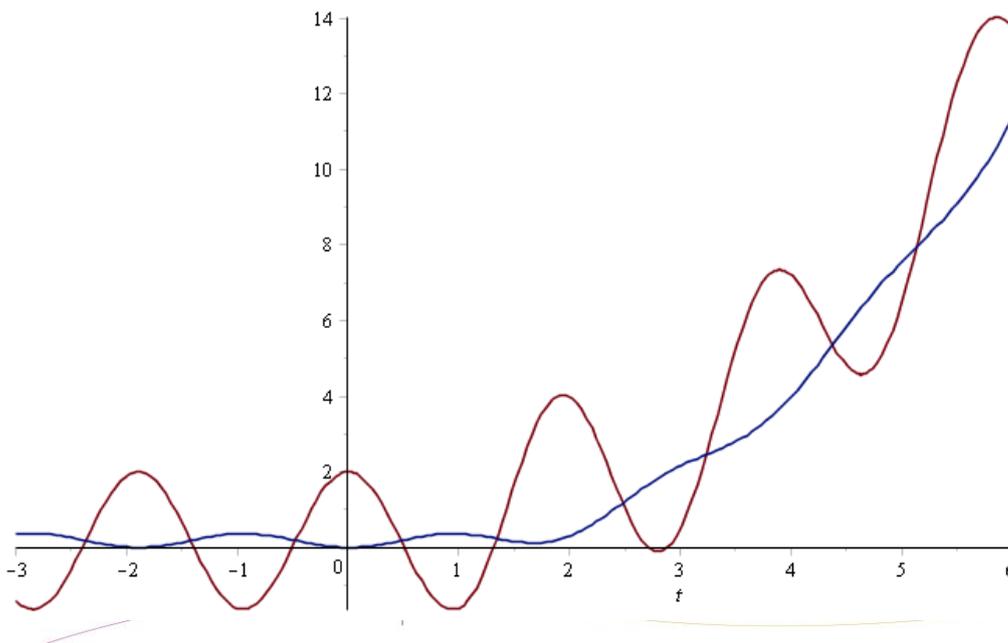
Jusqu' alors nous n' avons traité que des cas où les masses étaient les mêmes. Mais on peut imaginer des situations où les masses n' ont pas la même inertie et réagissent donc différemment.

Dans les exemples qui suivent nous ne nous sommes pas contentés de demander à l' ordinateur de résoudre les équations différentielles, nous lui avons fait appliquer la méthode des transformées de Laplace étape par étape. Se référer aux annexes pour avoir le détail du code.

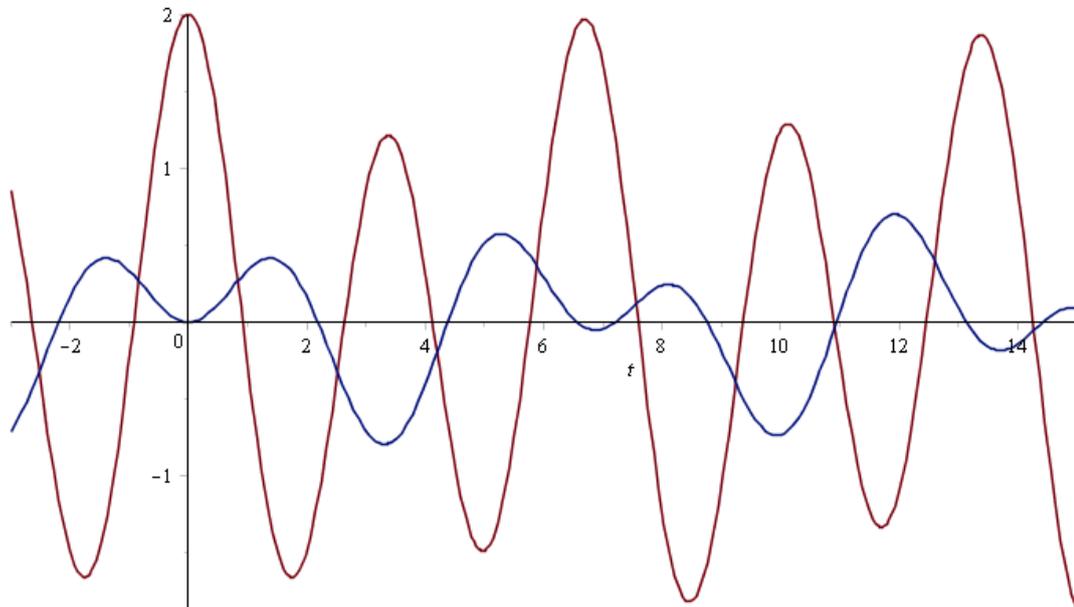
Voici tout d' abord un cas où seules les masses diffèrent, les trois ressorts étant les mêmes. Il apparaît que les oscillations des deux masses n' ont pas la même amplitude à cause de la différence d' inertie :



Voici ensuite un cas similaire, à ceci près que l' on applique une force constante à  $t=0$ , qui tire les masses vers la droite (c' est-à-dire les  $x$  croissants) :



Imaginons maintenant un cas où les deux masses sont différentes, et  $k_1=k_3$  mais le ressort du milieu  $k_2$  est différent :



Enfin nous avons codé le cas où toutes les masses sont différentes, et tous les ressorts aussi. Malheureusement l'ordinateur atteint ses limites et nous renvoie une expression avec du *RootOf*, donc partiellement calculée. Par conséquent il est impossible d'en tracer la courbe. Le code est également disponible en annexe.

### 3.2. Généralisation à N ressorts

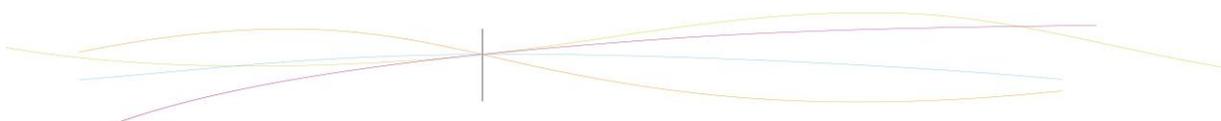
Dans un premier temps, on résout le problème pour un système de trois masses et quatre ressorts.

On applique le PFD aux masses  $M_1, M_2, M_3$ .

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{m}{k} \ddot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ -\frac{m}{k} \ddot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ -\frac{m}{k} \ddot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

Ce qui nous donne la relation matricielle suivante :  $\ddot{X}(t) = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} X(t)$



On fera l'hypothèse, d'après le PFD ainsi que d'après la matrice  $A_3$ , que les mouvements des masses ne dépendent que des ressorts qui leurs sont adjacents.

L'équation  $\det(A_3 - \lambda I) = 0$  nous donne les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = 2 \frac{k}{m} \quad ; \quad \lambda_2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = (2 + \sqrt{2}) \frac{k}{m}$$

On obtient les vecteurs propres suivants :

$$\vec{v}_1 = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{v}_2 = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{v}_3 = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Généralisation à n masses / n+1 ressorts**

Admettons que l'équation de mouvement s'écrive toujours  $\ddot{X} = AX$

Par analogie avec les systèmes à 2 et 3 masses, A s'écrit de la manière suivante :

$$A = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient des valeurs propres  $\lambda_j = \frac{k}{m} 4 \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{k}{m} (2 - 2 \cos \left( \frac{j\pi}{n+1} \right))$

En conséquence, les vecteurs propres s'écrivent  $\vec{v}_j = \left[ \sin \frac{l j \pi}{n+1} \right]_{l=1}^n$

Vérification : dans le cas n=2, on a bien  $\vec{X} = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \vec{v}_1 + C_2 e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t} \vec{v}_2$

Pour simplifier la recherche des équations de mouvement, on remarquera que  $\|\vec{v}_j\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

On introduit le vecteur  $\check{v}_j = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \vec{v}_j$  Ainsi,  $\|\check{v}_j\| = 1$  pour tout j ; on obtient une matrice de passage P orthogonale de coefficients  $p_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ij\pi}{n+1}$  avec  $1 \leq i, j \leq n$  . Ceci nous confère l'avantage d'avoir  $P^{\text{transpo}} = P = P^{-1}$

De la même manière que dans les autres cas, on a :

$$\ddot{X} = -AX = -PDP^{-1} = P(-D)P^{-1}X$$

D'où  $P^{-1}\ddot{X} = -DP^{-1}X$  ; donc  $\ddot{Y} = -DY$  soit :  $\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n = -\lambda_n y_n \end{cases}$

On a alors  $y_j = \alpha_j \cos \sqrt{\lambda_j}t + \beta_j \sin \sqrt{\lambda_j}t$  Avec  $\alpha$  et  $\beta$  constantes de conditions initiales.

Or  $X=PY$  d'où :  $x_i = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \left( \frac{ij\pi}{n+1} \right) y_j$

Comme montré précédemment,  $\alpha$  représente la position initiale de la masse.

Intéressons-nous maintenant à  $\beta$  : On dérive dans un premier temps  $y_j$ , ce qui donne :

$$\dot{y}_j = \alpha_j \left( e^{i\sqrt{\lambda_j}t} \right)'$$

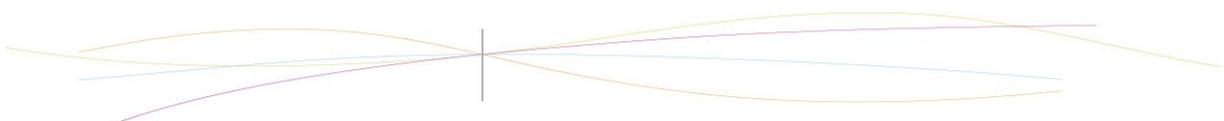


$$= \alpha_j (i\sqrt{\lambda_j}) e^{i\sqrt{\lambda_j}t} = \alpha_j (-\sqrt{\lambda_j} \sin(\sqrt{\lambda_j}t)) + \beta_j (\sqrt{\lambda_j} \cos(\sqrt{\lambda_j}t))$$

Donc si on prend la vitesse initiale,  $\dot{y}_j(0) = \beta_j \sqrt{\lambda_j}$

$$\text{Donc, } \dot{x}_j(0) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=0}^n \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) \beta_j \sqrt{\lambda_j}$$

Dans nos expérimentations, nous prendrons donc  $\beta_j = 0$  pour tout  $j$ , puisque nous ne donnerons initialement pas d'impulsion aux masses.



## 4. Conclusion et perspectives

L'étude des systèmes masses-ressorts nous a permis d'approfondir différents domaines de mathématiques, ainsi que d'en découvrir de nouveaux. Nous avons pu résoudre des systèmes d'équations différentielles de façon algébrique, mais aussi trouver les solutions à l'aide de nouveaux outils tant mathématiques que numériques : les transformées de Laplace et le logiciel Maple.

Pour compléter notre vision du sujet il faudrait peut-être envisager un TP afin de vérifier nos modèles théoriques. Avec plus de temps nous aurions aussi pu nous intéresser à des systèmes en 2D (par exemple 3 masses reliées de façon fermée par 3 ressorts sur un plan) plutôt qu'oscillant selon une seule dimension.

Ce projet, enfin, aura été pour nous l'occasion de perfectionner notre coordination dans le cadre d'un travail en équipe, en nous basant sur une recherche de documents. La gestion de travail de groupe est un savoir-faire non négligeable puisque nous serons de plus en plus amenés à travailler sur des projets collectifs.

## 5. Bibliographie

### 5.1 Ressources internet :

**Site : <http://infty08.pagesperso-orange.fr/OscAlgLin.pdf>**

Commentaire : -description d'un système couplé masse ressort grâce à l'algèbre linéaire.  
 -utilisation d'un exemple d'oscillateur couplé composé de trois ressorts et de deux masses.  
 -utilisation de matrices pour décrire le système.  
 -application des matrices trouvées (solution générale) à l'exemple proposé pour le résoudre.

**site :**

**[http://alainrobichon.free.fr/cours/Physique/Ondes/Oscillateurs\\_couples\\_ondes.pdf](http://alainrobichon.free.fr/cours/Physique/Ondes/Oscillateurs_couples_ondes.pdf)**

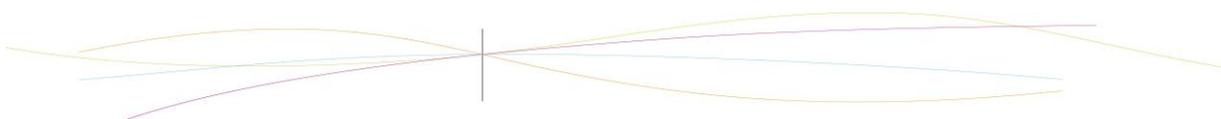
-étude du cas de deux oscillateurs couplés : -étude d'un exemple avec 2 masses couplées à 3 ressorts.  
 -étude des oscillations libre et du mode propre des oscillations.  
 -étude des oscillations forcées en régime harmonique.  
 -étude du cas d'une chaîne infinie d'oscillateurs couplés : étude d'un système unidimensionnel discret.  
 -étude de l'équation des ondes à une dimension.  
 -étude de l'onde plane progressive harmonique.

**site : [http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_E\\_M01\\_G04/co/NLP\\_E\\_M01\\_G04\\_15.html](http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M01_G04/co/NLP_E_M01_G04_15.html)**

Commentaire : -exercice sur un système couplé masse ressort classique avec deux masses et deux ressorts avec l'utilisation d'un cas particulier puis du cas général.  
 -correction détaillée explicitant les formules à utiliser pour résoudre les équations liées à ce système et le raisonnement à avoir lorsque que l'on est confronté à ce genre de système.

**Site : <http://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/mecanique/12.pdf>**

Commentaire : -cours sur les oscillateurs en général avec une partie consacrée aux systèmes couplés masse ressort.



-explicitation des formules à utiliser et du raisonnement à avoir lorsque que l'on a à traiter ce genre de problème.

**Site : [http://www.google.fr/imgres?imgurl=http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_E\\_M01\\_G04/res/NLP\\_01\\_04\\_fg1\\_15.gif&imgrefurl=http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_E\\_M01](http://www.google.fr/imgres?imgurl=http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M01_G04/res/NLP_01_04_fg1_15.gif&imgrefurl=http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M01)**

Commentaire : image permettant de voir à quoi ressemble le système qui nous intéresse, donc à mieux visualiser le problème auquel nous allons être confrontés.

**Site : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation\\_de\\_Laplace](http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Laplace)**

Commentaire : utilisations des formules de Laplace données sur la page Wikipédia correspondante.

**Site : [http://www.youtube.com/watch?v=c8GpVrZHxE&list=PLfGRwLPwr2TI\\_q6nNaUoGeFa9jGzOwzvr&index=8](http://www.youtube.com/watch?v=c8GpVrZHxE&list=PLfGRwLPwr2TI_q6nNaUoGeFa9jGzOwzvr&index=8)**

Commentaire : vidéo expliquant comment utiliser la méthode de Laplace dans le but de résoudre des systèmes d'équations différentielles.

**Site : [http://sertella.free.fr/cours\\_psi\\_physique/ondes/ondes%20chapitre%2001.pdf](http://sertella.free.fr/cours_psi_physique/ondes/ondes%20chapitre%2001.pdf)**

Commentaire : cours sur les ressorts mis les uns à côté des autres (oscillateur harmonique et deux oscillateurs harmoniques couplés).

**Site : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/couplage.html>**

Commentaire : 2 masses mises au bout de 3 ressorts, le tout mis sur une surface sans frottements.

La page contient une simulation graphique du système.

**Site : <http://dossier.univ-st-etienne.fr/marinemm/www/Chap1-Oscillateurs.pdf>**

Commentaire : Introduction aux différents oscillateurs (ressorts, circuits RLC, pendule simple), rappels d'équations générales communes à ces oscillateurs (équation du 2nd degré), oscillateurs libres ou forcés, amortis, différents degrés de liberté (oscillations transversales et longitudinales), modes propres.

**Site : <http://poisson.ens.fr/Collection/documents/polys/p0.pdf>**

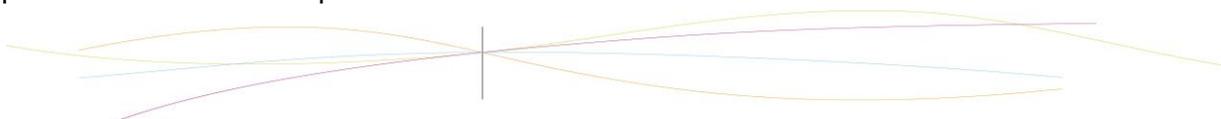
Commentaire : biblio sur les oscillateurs ; s'intéresse aux oscillateurs électriques et mécaniques, de Helmholtz, oscillateurs couplés, pendules pesants couplés par des ressorts, couplages de résonateurs RLC, systèmes à plus de 2 degrés de liberté.

**site : [http://oleate.free.fr/\\_/pong/Doc/2%20Doc%20Pr%E9pa/2.Physique/7.%20Ondes%20et%20vibrations/Cours%20-%20divers/Couplage%20&%20oscillateurs%20%E0%20plusieurs%20degr%E9s/chap10\\_oscillateurs%20coupl%E9s.pdf](http://oleate.free.fr/_/pong/Doc/2%20Doc%20Pr%E9pa/2.Physique/7.%20Ondes%20et%20vibrations/Cours%20-%20divers/Couplage%20&%20oscillateurs%20%E0%20plusieurs%20degr%E9s/chap10_oscillateurs%20coupl%E9s.pdf)**

Commentaire : oscillateur couple à ressorts posé sur coussin d'air, représentation des déplacements des 2 masses sur un graphique, oscillations forcées.

**Site : [http://oleate.free.fr/Doc\\_Inge/Physique/Cinematique/Oscillateurs%20%E0%20plusieurs%20degr%E9s%20de%20libert%E9.pdf](http://oleate.free.fr/Doc_Inge/Physique/Cinematique/Oscillateurs%20%E0%20plusieurs%20degr%E9s%20de%20libert%E9.pdf)**

Commentaire : « oscillateurs à plusieurs degrés de liberté », deux oscillateurs couplés – modes propres, oscillateurs couplés forcés sinusoidalement, différents modes de couplage entre oscillateurs, généralisation à N oscillateurs couplés avec utilisation de matrices de  $N \times N$  pour la résolution des équations de mouvement.



**Site : <http://www.cpge-brizeux.fr/casiers/jnb/cours/physondes/chpo1.pdf>**

Commentaire : phénomènes de propagation dans les oscillateurs couplés et généralisation à  $n$  masses (ou chaînes infinies), équation d'onde de d'Alembert et solutions unidimensionnelles et à géométrie sphérique, module d'Young et relation avec la loi de Hooke.

## 5.2 Autres ressources :

**-Dossier du projet de p6 numéro 14 de 2013 sur les oscillateurs masse ressort.**

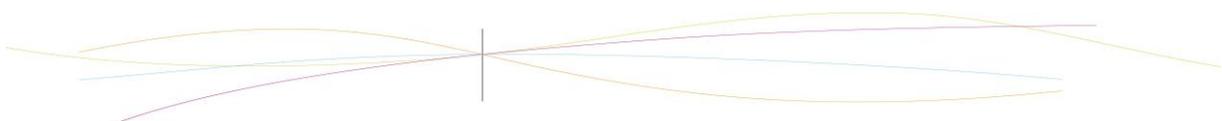
Commentaire : ce dossier nous a permis de comprendre comment fonctionne la méthode de Laplace et de voir les attentes du jury.

**-Dossier de projet math 2013 sur les différentes méthodes de résolution des équations différentielles.**

Commentaire : nous avons utilisé ce dossier pour nous documenter sur la méthode de Laplace et sur son utilisation.

**-Divers documents fournis par notre professeur de TD.**

Commentaire : utilisation de ces documents pour appliquer la méthode de Laplace et pour l'algèbre linéaire.

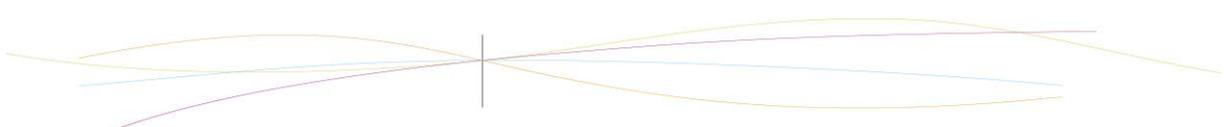
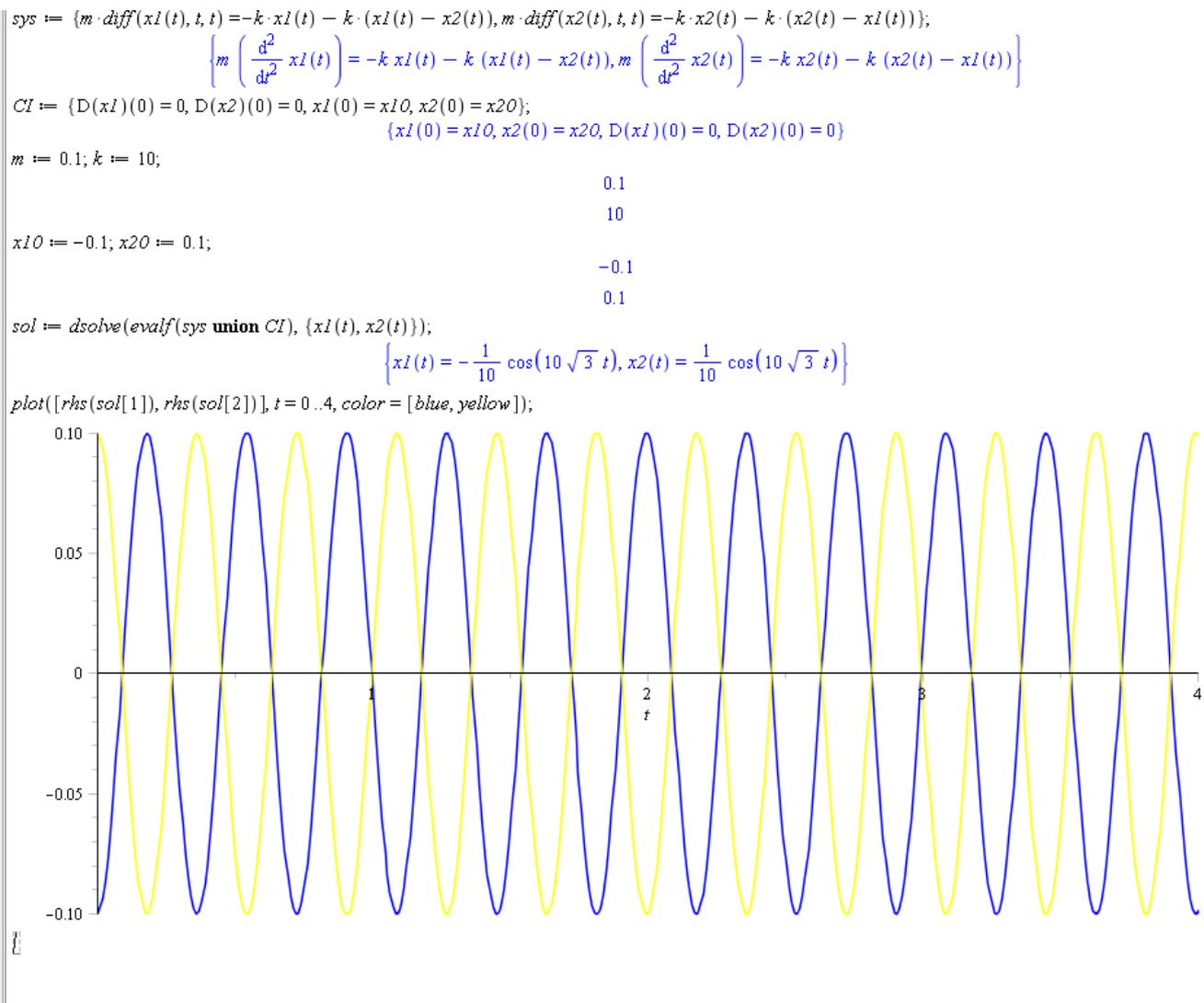


## 6. Annexes

Nous allons présenter ici le code Maple qui nous a permis d'obtenir les différentes courbes présentées dans le dossier.

### 6.1. Mêmes masses mêmes ressorts

*Masses lâchées en opposition de phase*



## 6.2. Mêmes masses deux ressorts différents

Masses lâchées en phase

$$\text{sys} := \{m \cdot \text{diff}(x1(t), t, t) = -K \cdot x1(t) - k \cdot (x1(t) - x2(t)), m \cdot \text{diff}(x2(t), t, t) = -K \cdot x2(t) - k \cdot (x2(t) - x1(t));$$

$$\left\{ m \left( \frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) = -K x1(t) - k (x1(t) - x2(t)), m \left( \frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) = -K x2(t) - k (x2(t) - x1(t)) \right\} \quad (1)$$

$$CI := \{D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0, x1(0) = x10, x2(0) = x20\};$$

$$(x1(0) = x10, x2(0) = x20, D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0) \quad (2)$$

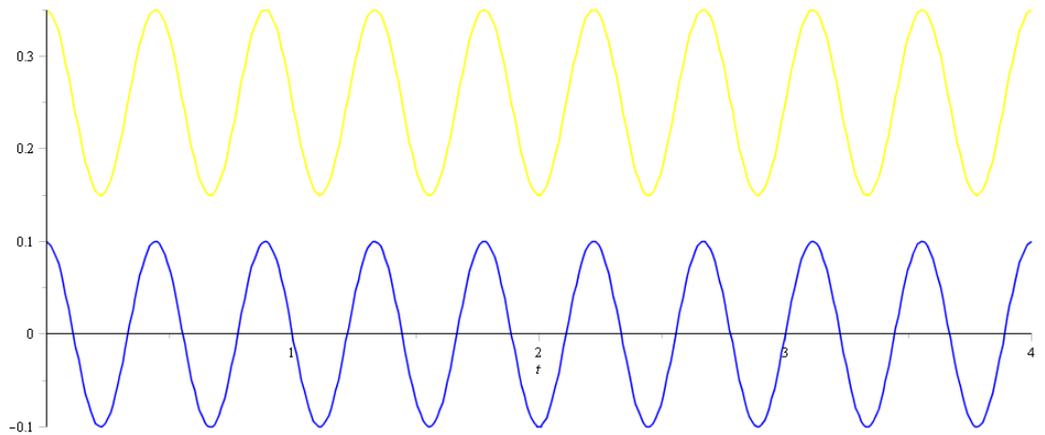
$$m := 0.1; K := 20; k := 10; \quad \begin{matrix} 0.1 \\ 20 \\ 10 \end{matrix} \quad (3)$$

$$x10 := 0.1; x20 := 0.1; \quad \begin{matrix} 0.1 \\ 0.1 \end{matrix} \quad (4)$$

$$\text{sol} := \text{dsolve}(\text{evalf}(\text{sys union } CI), \{x1(t), x2(t)\});$$

$$\left\{ x1(t) = \frac{1}{10} \cos(10\sqrt{2} t), x2(t) = \frac{1}{10} \cos(10\sqrt{2} t) \right\} \quad (5)$$

$$\text{plot}([\text{rhs}(\text{sol}[1]), \text{rhs}(\text{sol}[2]) + 0.25], t = 0..4, \text{color} = [\text{blue}, \text{yellow}]);$$



Masses lâchées en opposition de phase

$$\text{sys} := \{m \cdot \text{diff}(x1(t), t, t) = -K \cdot x1(t) - k \cdot (x1(t) - x2(t)), m \cdot \text{diff}(x2(t), t, t) = -K \cdot x2(t) - k \cdot (x2(t) - x1(t));$$

$$\left\{ m \left( \frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) = -K x1(t) - k (x1(t) - x2(t)), m \left( \frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) = -K x2(t) - k (x2(t) - x1(t)) \right\}$$

$$\left\{ 0.1 \left( \frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) = -30 x1(t) + 10 x2(t), 0.1 \left( \frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) = -30 x2(t) + 10 x1(t) \right\}$$

$$CI := \{D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0, x1(0) = x10, x2(0) = x20\};$$

$$(x1(0) = x10, x2(0) = x20, D(x1)(0) = 0, D(x2)(0) = 0)$$

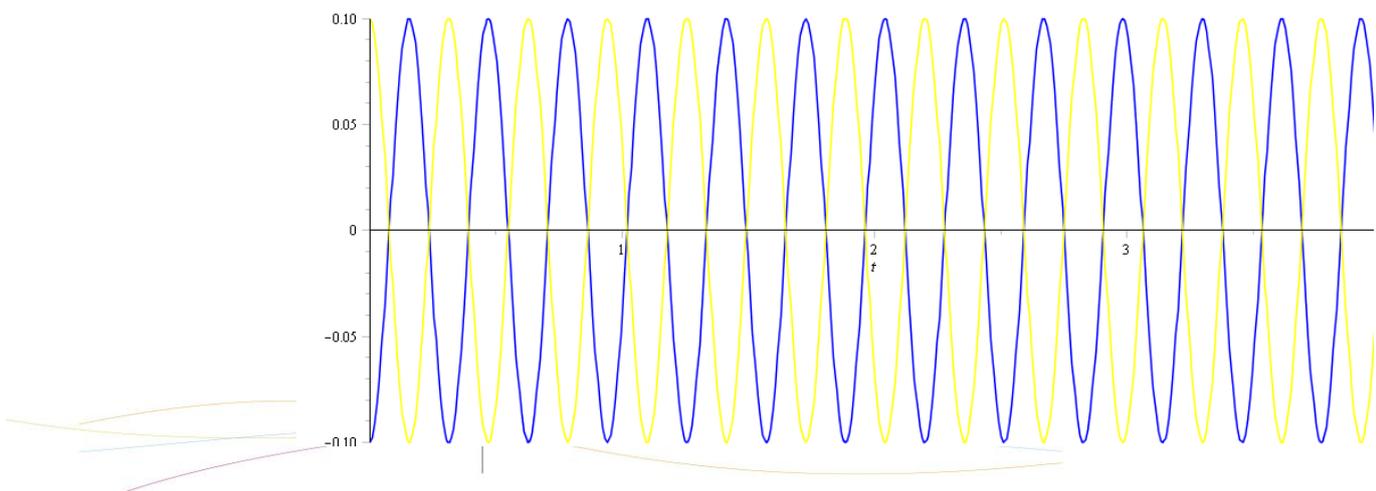
$$m := 0.1; K := 20; k := 10; \quad \begin{matrix} 0.1 \\ 20 \\ 10 \end{matrix}$$

$$x10 := -0.1; x20 := 0.1; \quad \begin{matrix} -0.1 \\ 0.1 \end{matrix}$$

$$\text{sol} := \text{dsolve}(\text{evalf}(\text{sys union } CI), \{x1(t), x2(t)\});$$

$$\left\{ x1(t) = -\frac{1}{10} \cos(20t), x2(t) = \frac{1}{10} \cos(20t) \right\}$$

$$\text{plot}([\text{rhs}(\text{sol}[1]), \text{rhs}(\text{sol}[2])], t = 0..4, \text{color} = [\text{blue}, \text{yellow}]);$$



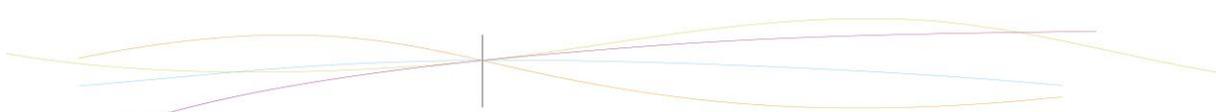
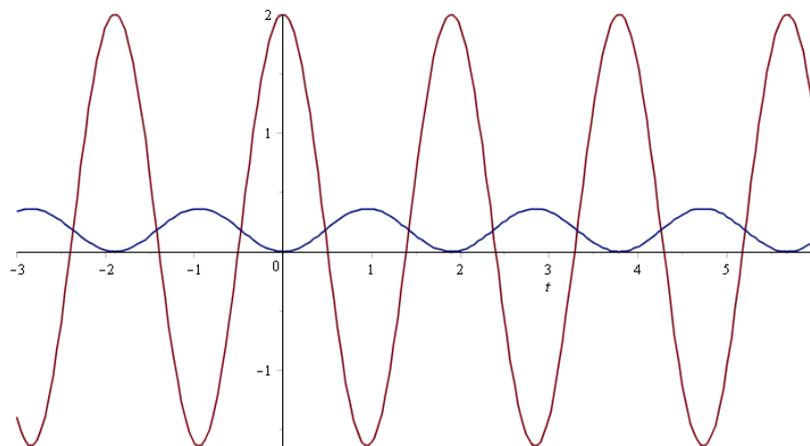
### 6.3. Deux masses mêmes ressorts

```

eqn1 := alpha * m * diff(x[1](t), t$2) = k * (x[2](t) - x[1](t));
          alpha * ( d^2 / dt^2 x_1(t) ) = k ( x_2(t) - x_1(t) )
eqn2 := m * diff(x[2](t), t$2) = k * (x[1](t) - x[2](t));
          m ( d^2 / dt^2 x_2(t) ) = k ( x_1(t) - x_2(t) )
imi := x[1](0) = 2, D(x[1])(0) = 0, x[2](0) = 0, D(x[2])(0) = 0;
          x_1(0) = 2, D(x_1)(0) = 0, x_2(0) = 0, D(x_2)(0) = 0
with(intrans);
[addable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
laplace(eqn1, t, s);
          -alpha * (D(x_1)(0) + s x_1(0)) + laplace(x_1(t), t, s) s^2 alpha = k laplace(x_2(t), t, s) - k laplace(x_1(t), t, s)
laplace(eqn2, t, s);
          -m (D(x_2)(0) + s x_2(0)) + laplace(x_2(t), t, s) s^2 m = -k laplace(x_2(t), t, s) + k laplace(x_1(t), t, s)
eval(%, %%), (imi));
{laplace(x_2(t), t, s) s^2 m = -k laplace(x_2(t), t, s) + k laplace(x_1(t), t, s), -2 alpha m + laplace(x_1(t), t, s) s^2 alpha = k laplace(x_2(t), t, s)
 - k laplace(x_1(t), t, s)}
sol := solve(%, {laplace(x[1](t), t, s), laplace(x[2](t), t, s)});
          {laplace(x_1(t), t, s) = 2 (m s^2 + k) alpha / (s (alpha m s^2 + alpha k + k)), laplace(x_2(t), t, s) = 2 alpha k / (s (alpha m s^2 + alpha k + k))}
invlaplace(%, s, t);
          {x_1(t) = 2 (alpha + cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) t / alpha m )) / (alpha + 1), x_2(t) = 2 alpha (1 - cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) t / alpha m )) / (alpha + 1)}
ans := eval(%, {alpha = 1/10, m = 1, k = 1});
          {x_1(t) = 2/11 + 20/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t ), x_2(t) = 2/11 - 2/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t )}
y[1] := unapply(eval(x[1](t), ans), t);
          t -> 2/11 + 20/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t )
y[2] := unapply(eval(x[2](t), ans), t);
          t -> 2/11 - 2/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t )

```

```
plot([y[1](t), y[2](t)], t=-3..6);
```



Même cas, avec une force heavyside constante à partir de t=0 :

```

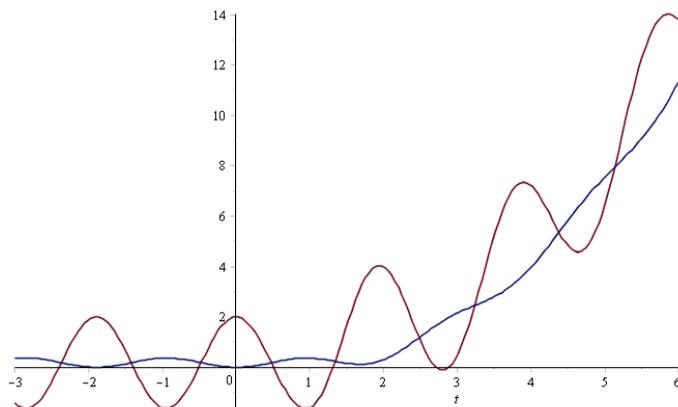
eqn1 := alpha * m * diff(x[1](t), t$2) = k * (x[2](t) - x[1](t)) + u(t);
          alpha * ( d^2 / dt^2 x_1(t) ) = k ( x_2(t) - x_1(t) ) + u(t)

          alpha * ( d^2 / dt^2 x_1(t) ) = k ( x_2(t) - x_1(t) ) + u(t)
eqn2 := m * diff(x[2](t), t$2) = k * (x[1](t) - x[2](t));
          m * ( d^2 / dt^2 x_2(t) ) = k ( x_1(t) - x_2(t) )

u := t -> Heaviside(t - 1);
          t -> Heaviside(t - 1)
imi := x[1](0) = 2, D(x[1])(0) = 0, x[2](0) = 0, D(x[2])(0) = 0;
          x_1(0) = 2, D(x_1)(0) = 0, x_2(0) = 0, D(x_2)(0) = 0

with(intrans);
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, immellin, laplace, mellin, savetable]
laplace(eqn1, t, s);
          -alpha * (D(x_1)(0) + s x_1(0)) + laplace(x_1(t), t, s) s^2 alpha = k laplace(x_2(t), t, s) - k laplace(x_1(t), t, s) + e^-s
laplace(eqn2, t, s);
          -m * (D(x_2)(0) + s x_2(0)) + laplace(x_2(t), t, s) s^2 m = -k laplace(x_2(t), t, s) + k laplace(x_1(t), t, s)
eval(%, %%), {imi});
[laplace(x_2(t), t, s) s^2 m = -k laplace(x_2(t), t, s) + k laplace(x_1(t), t, s), -2 alpha s + laplace(x_1(t), t, s) s^2 alpha = k laplace(x_2(t), t, s)
- k laplace(x_1(t), t, s) + e^-s ]
sol := solve(%, {laplace(x[1](t), t, s), laplace(x[2](t), t, s)});
          [laplace(x_1(t), t, s) = (m s^2 + k) (2 alpha s^2 + e^-s) / (s^3 m (alpha s^2 + alpha k + k)), laplace(x_2(t), t, s) = k (2 alpha s^2 + e^-s) / (s^3 m (alpha s^2 + alpha k + k)) ]
invlaplace(%, s, t);
[ x_1(t) = 2 cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) t / alpha ) + 1/2 * 1 / (alpha + 1)^2 k m * ( (alpha * (2 m * (cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) (t - 1)) / alpha ) - 1) - k (-1 + 2 t)) + (alpha
+ 1) (t^2 k + 4 m sin( 1/2 * sqrt(k (alpha + 1)) (t - 1))^2 - k (-1 + 2 t)) Heaviside(t - 1) + 4 (-(alpha + 1) cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) t / alpha ) + alpha
+ 1) alpha k ), x_2(t) = 1/2 * (alpha (k (t - 1)^2 + 2 m (cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) (t - 1)) / alpha ) - 1)) + k (t - 1)^2 Heaviside(t - 1)
+ 2 (-cosh( sqrt(-alpha k (alpha + 1)) t / alpha ) + 1) alpha / (alpha + 1) ]
ans := eval(%, {alpha = 1/10, m = 1, k = 1});
[ x_1(t) = 20/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t ) + 50/121 ( 1/5 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) (t - 1)) + 9/10 - 11/5 t + 11/10 t^2 + 22/5 sin( 1/2 sqrt(11) (t
- 1))^2 ) Heaviside(t - 1) + 2/11, x_2(t) = 50/121 ( 11/10 (t - 1)^2 + 1/5 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) (t - 1)) - 1/5 ) Heaviside(t - 1)
- 2/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t ) + 2/11 ]
y[1] := unapply(eval(x[1](t), ans), t);
t -> 20/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t ) + 50/121 ( 1/5 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) (t - 1)) + 9/10 - 11/5 t + 11/10 t^2 + 22/5 sin( 1/2 sqrt(11) (t
- 1))^2 ) Heaviside(t - 1) + 2/11
y[2] := unapply(eval(x[2](t), ans), t);
t -> 50/121 ( 11/10 (t - 1)^2 + 1/5 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) (t - 1)) - 1/5 ) Heaviside(t - 1) - 2/11 cosh( 1/10 sqrt(-11) sqrt(100) t ) + 2/11
plot([y[1](t), y[2](t)], t=-3..6);

```

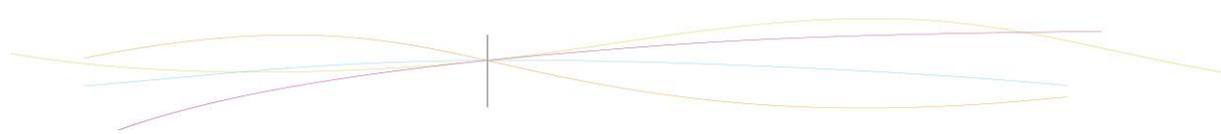


### 6.4. Deux masses deux ressorts

```

eqn1 := m1·diff(x[1](t), t$2) + (k1 + k2)·x[1](t) = k2·x[2](t);
          m1 ( d^2 x1(t) ) + (k1 + k2) x1(t) = k2 x2(t)
eqn2 := m2·diff(x[2](t), t$2) + (k1 + k2)·x[2](t) - k1·x[1](t) = 0;
          m2 ( d^2 x2(t) ) + (k1 + k2) x2(t) - k1 x1(t) = 0
ini := x[1](0) = 2, D(x[1])(0) = 0, x[2](0) = 0, D(x[2])(0) = 0;
          x1(0) = 2, D(x1)(0) = 0, x2(0) = 0, D(x2)(0) = 0
with(intrans);
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
laplace(eqn1, t, s);
          -m1 ( D(x1)(0) + s x1(0) ) + laplace(x1(t), t, s) s^2 m1 + laplace(x1(t), t, s) k1 + laplace(x1(t), t, s) k2 = k2 laplace(x2(t), t, s)
laplace(eqn2, t, s);
          -m2 ( D(x2)(0) + s x2(0) ) + laplace(x2(t), t, s) s^2 m2 + laplace(x2(t), t, s) k1 + k2 laplace(x2(t), t, s) - laplace(x1(t), t, s) k1 = 0
eval(%, %%), (ini));
{ -2 m1 s + laplace(x1(t), t, s) s^2 m1 + laplace(x1(t), t, s) k1 + laplace(x1(t), t, s) k2 = k2 laplace(x2(t), t, s), laplace(x2(t), t, s) s^2 m2
  + laplace(x2(t), t, s) k1 + k2 laplace(x2(t), t, s) - laplace(x1(t), t, s) k1 = 0 }
sol := solve(%, {laplace(x[1](t), t, s), laplace(x[2](t), t, s)});
{ laplace(x1(t), t, s) = ( 2 (m2 s^2 + k1 + k2) m1 s / (m1 m2 s^4 + k1 m1 s^2 + k1 m2 s^2 + k2 m1 s^2 + k2 m2 s^2 + k1^2 + k1 k2 + k2^2), laplace(x2(t), t, s)
  = ( 2 k1 m1 s / (m1 m2 s^4 + k1 m1 s^2 + k1 m2 s^2 + k2 m1 s^2 + k2 m2 s^2 + k1^2 + k1 k2 + k2^2) ) }
invlaplace(%, s, t);
{ x1(t) = m1 ( sum_{a=RootOf(m1 m2 z^4 + (k1 m1 + k1 m2 + k2 m1 + k2 m2) z^2 + k1^2 + k1 k2 + k2^2)} ( (-a^2 m2 + k1 + k2) e^{-a t} / (2 a^2 m1 m2 + k1 m1 + k1 m2 + k2 m1 + k2 m2) ), x2(t)
  = k1 m1 ( sum_{a=RootOf(m1 m2 z^4 + (k1 m1 + k1 m2 + k2 m1 + k2 m2) z^2 + k1^2 + k1 k2 + k2^2)} ( e^{-a t} / (2 a^2 m1 m2 + k1 m1 + k1 m2 + k2 m1 + k2 m2) ) ) }
ans := eval(%, (m1 = 1, m2 = 2, k1 = 1, k2 = 2));
{ x1(t) = sum_{a=RootOf(2 z^4 + 9 z^2 + 7)} ( (2 a^2 + 3) e^{-a t} / (4 a^2 + 9), x2(t) = sum_{a=RootOf(2 z^4 + 9 z^2 + 7)} ( e^{-a t} / (4 a^2 + 9) ) }
y[1] := unapply(eval(x[1](t), ans), t);
          t -> sum_{a=RootOf(2 z^4 + 9 z^2 + 7)} ( (2 a^2 + 3) e^{-a t} / (4 a^2 + 9)
y[2] := unapply(eval(x[2](t), ans), t);
          t -> sum_{a=RootOf(2 z^4 + 9 z^2 + 7)} ( e^{-a t} / (4 a^2 + 9)
plot([y[1](t), y[2](t)], t=-3..15);

```



## 6.5. Deux masses trois ressorts

---

```

eqn1 := m1·diff(x[1](t), t$2) + (k1 + k2)·x[1](t) - k2·x[2](t);
          m1 ( d^2 x1(t) ) + (k1 + k2) x1(t) = k2 x2(t)
          |-----|
eqn2 := m2·diff(x[2](t), t$2) + (k3 + k2)·x[2](t) - k3·x[1](t) = 0;
          m2 ( d^2 x2(t) ) + (k3 + k2) x2(t) - k3 x1(t) = 0
imi := x[1](0) = 2, D(x[1])(0) = 0, x[2](0) = 0, D(x[2])(0) = 0;
          x1(0) = 2, D(x1)(0) = 0, x2(0) = 0, D(x2)(0) = 0
with(intrans);
[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
laplace(eqn1, t, s);
          -m1 (D(x1)(0) + s x1(0)) + laplace(x1(t), t, s) s^2 m1 + laplace(x1(t), t, s) k1 + laplace(x1(t), t, s) k2 = k2 laplace(x2(t), t, s)
laplace(eqn2, t, s);
          -m2 (D(x2)(0) + s x2(0)) + laplace(x2(t), t, s) s^2 m2 + k2 laplace(x2(t), t, s) + laplace(x2(t), t, s) k3 - k3 laplace(x1(t), t, s) = 0
eval(%, %%), (imi);
{-2 m1 s + laplace(x1(t), t, s) s^2 m1 + laplace(x1(t), t, s) k1 + laplace(x1(t), t, s) k2 = k2 laplace(x2(t), t, s), laplace(x2(t), t, s) s^2 m2
+ k2 laplace(x2(t), t, s) + laplace(x2(t), t, s) k3 - k3 laplace(x1(t), t, s) = 0}
sol := solve(%, {laplace(x[1](t), t, s), laplace(x[2](t), t, s)});
{laplace(x1(t), t, s) =
  2 (m2 s^2 + k2 + k3) m1 s
  -----, laplace(x2(t), t, s)
  m1 m2 s^4 + k1 m2 s^2 + k2 m1 s^2 + k2 m2 s^2 + k3 m1 s^2 + k1 k2 + k1 k3 + k2^2
=
  2 k3 m1 s
  -----}
invlaplace(%, s, t);
{x1(t) = m1 (
  sum_{a=RootOf(m1 m2 _Z^4 + (k1 m2 + k2 m1 + k2 m2 + k3 m1) _Z^2 + k1 k2 + k1 k3 + k2^2)} (alpha^2 m2 + k2 + k3) e^{-at}
  -----), x2(t)
= k3 m1 (
  sum_{a=RootOf(m1 m2 _Z^4 + (k1 m2 + k2 m1 + k2 m2 + k3 m1) _Z^2 + k1 k2 + k1 k3 + k2^2)} e^{-at}
  -----)}
{x1(t) = m1 (
  sum_{a=RootOf(m1 m2 _Z^4 + (k1 m2 + k2 m1 + k2 m2 + k3 m1) _Z^2 + k1 k2 + k1 k3 + k2^2)} (alpha^2 m2 + k2 + k3) e^{-at}
  -----), x2(t)
= k3 m1 (
  sum_{a=RootOf(m1 m2 _Z^4 + (k1 m2 + k2 m1 + k2 m2 + k3 m1) _Z^2 + k1 k2 + k1 k3 + k2^2)} e^{-at}
  -----)}
eval(%, {m1 = 1, m2 = 2, k1 = 1, k2 = 2, k3 = 1});
{x1(t) =
  sum_{a=RootOf(2 _Z^4 + 9 _Z^2 + 7)} (2 alpha^2 + 3) e^{-at}
  -----, x2(t) =
  sum_{a=RootOf(2 _Z^4 + 9 _Z^2 + 7)} e^{-at}
  -----}
    
```

