Exercice 1 — Nicolas Appert — 2 points

Quelles sont les dimensions (hauteur h et rayon r) à donner à une boite de conserve en métal qui doit contenir un volume V (par exemple de un litre) de sorte d'utiliser un minimum de métal. Pour ce faire il suffit de trouver le cylindre de volume V de surface minimum. Ce problème peut se formaliser comme le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{r,h\in\mathbb{R}^2} & 2\pi(r^2+rh) \\ \text{avec} & \pi r^2 h \geq V \\ & r\geq 0; h\geq 0 \end{array}\right.$$

1. ce problème est-il convexe et pourquoi ?
2. reformuler le problème en x et y en effectuant le changement de variable $r = e^x$ et $h = e^y$. Ce nouveau problème est-il convexe ?
3. écrire les conditions d'optimalité du problème après changement de variable, et en déduire que la solution du problème est $h = 2r$.

Exercice 2 — SVDD — 4 points

Soit une collection de n vecteurs $a_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, n$ connus. On considére le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, R} & R & \\ \text{avec} & \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|^2 \leq R & i = 1, n \end{array}\right.$$

1. Donnez les conditions d'optimalité du problème.
2. En déduire que la solution du problème s'écrit $\mathbf{x}^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \mathbf{a}_i$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = 1$ où les λ_i^* sont les valeurs optimales des multiplicateur de Lagrange associés aux contraintes.
3. Montrez que le problème dual s'écrit

$$\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\max_{\lambda\in\mathbb{R}^n, R} & \lambda^\top M \lambda + \mathbf{b}^\top \lambda & \\ \text{avec} & \lambda_i \geq 0 & i = 1, n \end{array}\right.$$

   où M est une matrice carrée et $\mathbf{b}$ un vecteur que l'on précisera.
4. En supposant que l'on connaisse la matrice A de taille $n \times d$ dont les lignes sont les vecteurs $a_i^\top$, donnez une fonction matlab `function` $[x, R]$ = `resoudSVDD`(A) de moins de 15 lignes permettant de calculer $\mathbf{x}$ et R à partir de la résolution du problème dual de la question précédente. Vous pourrez utiliser les fonctions que vous avez manipulé en TP (`cvx...` voir annexe).

Exercice 3 — Point de croix et point selle — 2 points

Soient A et C deux matrices et $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$ deux vecteurs données. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{M}) \quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n} & \mathbf{y}^\top\mathbf{x} \\ \text{avec} & A\mathbf{y}\leq\mathbf{b} \end{array}\right\} \\ \text{avec} & C\mathbf{x}\leq\mathbf{d} \end{array}\right.$$

1. Donnez le programme linéaire dual du problème interne

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\max_{\mathbf{y}} & \mathbf{y}^\top\mathbf{x} \\ \text{avec} & A\mathbf{y}\leq\mathbf{b} \end{array}\right.$$

2. En déduire une reformulation du problème $(\mathcal{M})$ comme un programme linéaire
3. Donnez la forme standard de ce programme linéaire

Exercice 4 **Glousser avant de pondre, pour une poule** **2 points**

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{x,y,z\in\mathbf{R}^3} & -x^3 + y^2 - 2xz^2 \\ \text{avec} & 2x + y^2 + z = 5 \\ \text{et} & 5x^2 - y^2 - z \geq 2 \\ & x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \end{cases}$$

1. Le point $(1, 0, 3)$ est-il un minimum global du problème et pourquoi ?

Annexes : quelques doc matlab

```
>> help linprog
 LINPROG Linear programming.
    X = LINPROG(f,A,b) attempts to solve the linear programming problem:

             min f'*x    subject to:   A*x <= b
              x

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while additionally
    satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper
    bounds on the design variables, X, so that the solution is in
    the range LB <= X <= UB. Use empty matrices for LB and UB
    if no bounds exist. Set LB(i) = -Inf if X(i) is unbounded below;
    set UB(i) = Inf if X(i) is unbounded above.

>> help quadprog
 QUADPROG Quadratic programming.
    X = QUADPROG(H,f,A,b) attempts to solve the quadratic programming problem:

             min 0.5*x'*H*x + f'*x   subject to:  A*x <= b
              x

    X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while
    additionally satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.

    X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper
    bounds on the design variables, X, so that the solution is in the
    range LB <= X <= UB. Use empty matrices for LB and UB if no bounds exist. Set
    LB(i) = -Inf if X(i) is unbounded below; set UB(i) = Inf if X(i) is unbounded above.

>> help cvx
  CVX: A system for disciplined convex programming.
    CVX is a modeling framework for building, constructing, and solving
    disciplined convex programs.

    cvx_setup          - Sets up and tests the cvx distribution.
    commands           - Top-level commands to create and control CVX.
    functions          - Additional functions created specifically for CVX.
    keywords           - Keywords for declaring variables and objectives
    lib                - Code for internal use by CVX.

% exemple
 cvx_begin
   variable x(n)
   dual variables y z
   minimize( c' * x )
   subject to
      y : A * x == b;
      z : x >= 0;
cvx_end
```