Fiche N°1 Produit scalaire, dérivée et intégrale

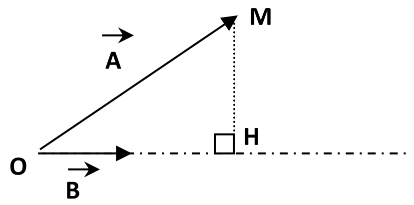
Soit 4 vecteurs exprimés dans la base cartésienne $\left(\overrightarrow{U_x}, \overrightarrow{U_y}, \overrightarrow{U_z}\right)$ *:*

$\vec{A} = x_a\overrightarrow{U_x} + y_a\overrightarrow{U_y} + z_a\overrightarrow{U_z}$, $\vec{B} = x_b\overrightarrow{U_x} + y_b\overrightarrow{U_y} + z_b\overrightarrow{U_z}$, $\vec{C} = x_c\overrightarrow{U_x} + y_c\overrightarrow{U_y} + z_c\overrightarrow{U_z}$ *et* $\vec{D} = x_d\overrightarrow{U_x} + y_d\overrightarrow{U_y} + z_d\overrightarrow{U_z}$

Le produit scalaire

Le produit scalaire de $\vec{A}$ *par* $\vec{B}$ *est défini par la relation suivante :* $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\, cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$

Il découle de cette définition que le produit scalaire est ***commutatif*** *:* $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

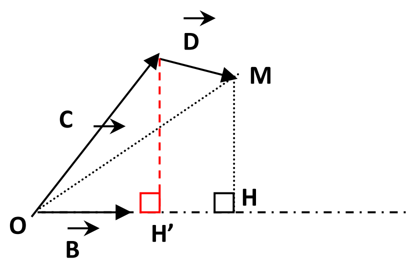


Sur la figure ci-contre, **H** *représente la projection orthogonale de* **M** *sur la droite portée par* $\vec{\mathbf{B}}$ *passant par* **O**. *En utilisant les formules trigonométriques, on a* $cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right) = \frac{\|\overrightarrow{OH}\|}{\|\vec{A}\|}$

Ainsi, la définition du produit scalaire peut s'écrire :

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{OH}\|$.

On observe donc que le produit scalaire fait apparaître la notion de ***projection orthogonale***.



Décomposons le vecteur $\vec{A}$ *en* $\vec{C}+\vec{D}$. *Le produit scalaire de* $\vec{C}$ *par* $\vec{B}$ *donne* $\vec{C}\cdot\vec{B} = \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{OH'}\|$ *et celui de* $\vec{D}$ *par* $\vec{B}$ *donne* $\vec{D}\cdot\vec{B} = \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{H'H}\|$.

Ainsi, la somme des produits scalaire devient :

$$\begin{aligned}\vec{C}\cdot\vec{B}+\vec{D}\cdot\vec{B} &= \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{OH'}\| + \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{H'H}\| \\ &= \|\vec{B}\|(\|\overrightarrow{OH'}\| + \|\overrightarrow{H'H}\|) = \|\vec{B}\|\cdot\|\overrightarrow{OH}\| \\ &= \vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{C}+\vec{D})\cdot\vec{B}\end{aligned}$$

on vérifie ainsi que le produit scalaire est ***distributif*** *:* $(\vec{C}+\vec{D})\cdot\vec{B} = \vec{C}\cdot\vec{B}+\vec{D}\cdot\vec{B}$

Dans le cas particulier de la projection pour les vecteurs de la base on obtient :

$\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_x} = \|\overrightarrow{U_x}\|^2 cos(0) = \|\overrightarrow{U_x}\|^2$ *ainsi que* $\overrightarrow{U_y}\cdot\overrightarrow{U_y} = \|\overrightarrow{U_y}\|^2 cos(0) = \|\overrightarrow{U_y}\|^2$

Dans le cas d'une base normée, ces produits scalaire valent 1 sinon ils valent le carré de la norme des vecteurs.

Par contre, si la base est orthogonale : $\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_y} = \|\overrightarrow{U_x}\| * \|\overrightarrow{U_x}\| * cos(90°) = 0$

Etant distributif, le produit scalaire $\vec{A}\cdot\overrightarrow{U_x}$ *donne* $(x_a\overrightarrow{U_x}+y_a\overrightarrow{U_y}+z_a\overrightarrow{U_z})\cdot\overrightarrow{U_x} = x_a\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_x} + y_a\overrightarrow{U_y}\cdot\overrightarrow{U_x} + z_a\overrightarrow{U_z}\cdot\overrightarrow{U_x}$ *Ainsi, dans une base orthogonale, d'après les résultats précédents* $\vec{A}\cdot\overrightarrow{U_x} = x_a\|\overrightarrow{U_x}\|^2$

Si de plus, la base est ***orthonormée***, *on vérifie que le produit scalaire scalaire* $\vec{A}\cdot\overrightarrow{U_x}$ *donne la composante suivant* $\overrightarrow{U_x}$ *, du vecteur* $\vec{A}$ *:* $\vec{A}\cdot\overrightarrow{U_x} = x_a$

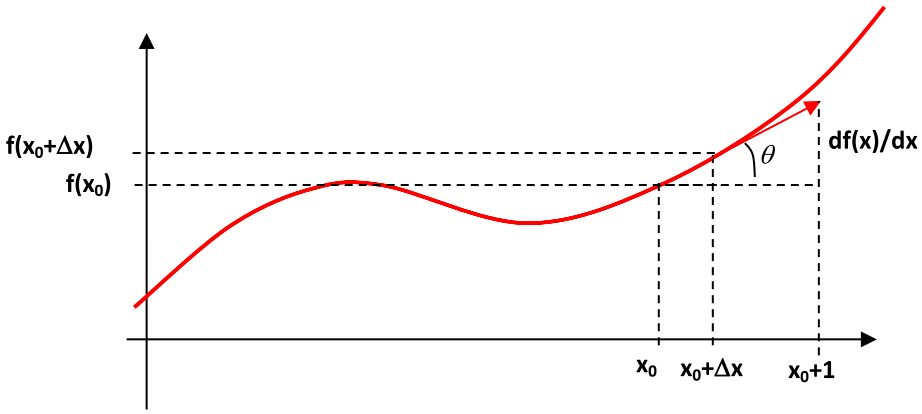
On en déduit l'expression algébrique du produit scalaire de $\vec{A}$ par $\vec{B}$ dans une base ***orthonormée*** *:*

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(x_a\overrightarrow{U_x} + y_a\overrightarrow{U_y} + z_a\overrightarrow{U_z}\right)\cdot\left(x_b\overrightarrow{U_x} + y_b\overrightarrow{U_y} + z_b\overrightarrow{U_z}\right)$$
$$= x_a x_b \underbrace{\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_x}}_{1} + x_a y_b \underbrace{\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_y}}_{0} + x_a z_b \underbrace{\overrightarrow{U_x}\cdot\overrightarrow{U_z}}_{0} + y_a x_b \underbrace{\overrightarrow{U_y}\cdot\overrightarrow{U_x}}_{0} + y_a y_b \underbrace{\overrightarrow{U_y}\cdot\overrightarrow{U_y}}_{1} + y_a z_b \underbrace{\overrightarrow{U_y}\cdot\overrightarrow{U_z}}_{0}$$
$$+ z_a x_b \underbrace{\overrightarrow{U_z}\cdot\overrightarrow{U_x}}_{0} + z_a y_b \underbrace{\overrightarrow{U_z}\cdot\overrightarrow{U_y}}_{0} + z_a z_b \underbrace{\overrightarrow{U_z}\cdot\overrightarrow{U_z}}_{1} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Dérivée d'une fonction d'une variable

Soit une fonction **f(x)** *définie continue et dérivable en* **x_0**. *La dérivée de cette fonction en* **x_0** *s'écrit :*

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = \dot{f}(x_0) = lim_{\Delta x \to dx}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



La dérivée est égale à la tangente de l'angle formé par la droite tangente à la courbe avec une droite horizontale : $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = tan(\theta)$

Dérivée d'une composition de fonctions d'une variable

Soit la dérivation de la fonction **f(g(x))** *s'écrit :*

$$\frac{df\big(g(x)\big)}{dx}$$

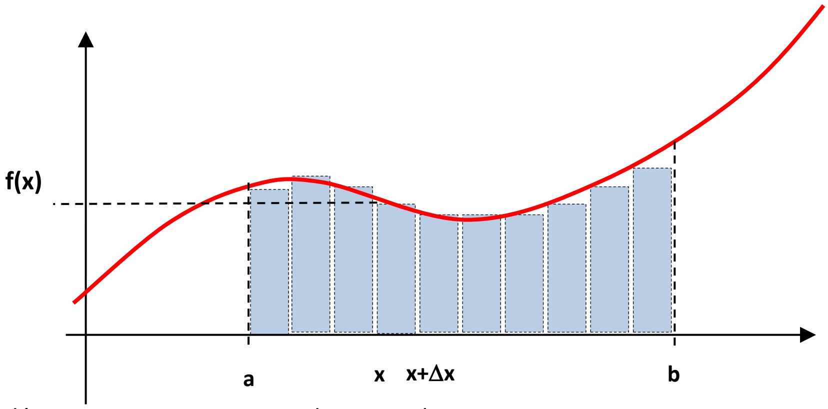
En posant $u = g(x)$ *on a* $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx}$ *ce qui correspond également à*

$$\frac{df\big(g(x)\big)}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{dg(x)}{dx}$$

Exemple : $\frac{dcos(x^2)}{dx} = \frac{dcos(u)}{du}\frac{dx^2}{dx} = -sin(u)\cdot 2x = -2x\cdot sin(x^2)$

Intégrale d'une fonction d'une variable

L'intégrale entre **a** *et* **b** *de la fonction* **f(x)** *correspond à la surface délimitée par l'axe des abscisses et la fonction et par les droites verticales passant par $x = a$ puis $x = b$.*



Cette surface peut se décomposer en une somme de rectangles :

$$I = lim_{\Delta x \rightarrow dx} \sum_{x_i} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Lorsque la fonction admet une primitive $F(x)$ telle que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ alors l'intégrale précédente se calcule ainsi :

$$I = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Il existe de nombreuses formes analytiques de primitives. Les plus usuelles sont :

$f(x) = Ax^n$	$F(x) = \frac{A}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(t) = cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \omega^{-1}sin(\omega t + \varphi) + C$
$f(t) = sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\omega^{-1}cos(\omega t + \varphi) + C$
$f(x) = exp(ax)$	$F(x) = a^{-1}exp(ax) + C$
$f(x) = 1/cos^2(x)$	$F(x) = tan(x) + C$