Algorithmique avancée et Programmation C

Durée : *3h00*
Documents autorisés : **AUCUN**

Remarques :
- Veuillez lire attentivement les questions avant de répondre.
- Le barème donné est un barème indicatif qui pourra évoluer lors de la correction.
- Rendez une copie propre.

1 Arbre binaire : simple et double rotations (7 points)

1. Rappelez à l'aide de deux schémas par algorithme (avant et après l'exécution de l'algorithme) ce que réalisent les algorithmes de simple rotation à gauche, simple rotation à droite, de double rotation à gauche et de double rotation à droite. (2 points)
2. Donnez les signatures de ses quatre procédures et l'algorithme des deux procédures de simple et double rotation à droite. (4 points)
3. Démontrez que l'algorithme de simple rotation à droite utilisé avec un arbre binaire de recherche conserve ses caractéristiques. (1 point)

2 Graphes (13 points)

Bien que l'on ne vous demande pas d'analyse descendante dans les questions suivantes, vous veillerez à bien décomposer votre problème (chaque suite d'instructions formant « un tout » doit devenir une fonction ou une procédure).

2.1 Arcs d'un graphe non orienté (4 points)

En utilisant les fonctions et procédures proposées en annexe, donnez l'algorithme de la fonction suivante qui retourne tous les arcs (un arc est une liste composée de deux sommets) d'un graphe non orienté :
- **fonction** obtenirArcs (g : Graphe) **:** Liste<Liste<Sommet>>

2.2 Dijkstra (9 points)

Nous avons vu dans le cours sur les graphes l'algorithme de Dijkstra suivant :

procédure dijkstra (**E** g : Graphe<Sommet,,**ReelPositif**>, s : Sommet,**S** arbreRecouvrant : Arbre<Sommet>, cout : Dictionnaire<Sommet,**ReelPositif**>)

⌊**précondition(s)** $sommetPresent(g, s)$

```
Déclaration  l : Liste<Liste<Sommet>>
             c : ReelPositif
             sommetDeA, sommetAAjouter : Sommet
debut
  arbreRecouvrant ← racine(s,liste())
  cout ← dictionnaire()
  ajouter(cout,s,0)
  l ← arcsEntreArbreEtGraphe(arbreRecouvrant,g)
  tant que non estVide(l) faire
    sommetLePlusProche(g,l,cout,sommetDeA,sommetAAjouter,c)
    ajouter(cout,
            sommetAAjouter,
            obtenirValeur(cout,sommetDeA)+c
    )
    ajouterCommeFils(arbreRecouvrant,sommetDeA,sommetAAjouter)
    l ← arcsEntreArbreEtGraphe(g,arbreRecouvrant)
  fintantque
fin
```

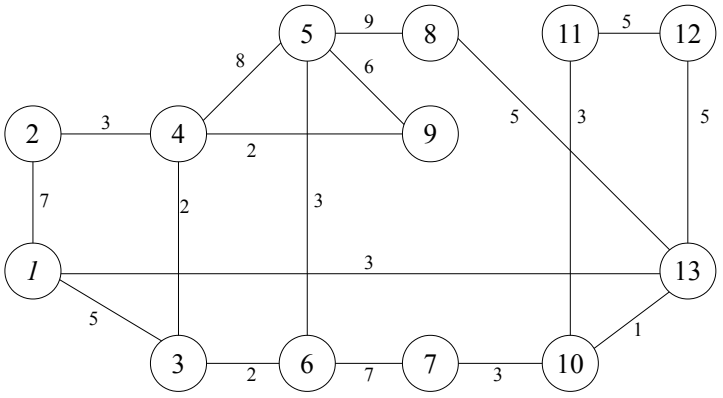
Tel que :

- **fonction** arcsEntreArbreEtGraphe **(**a : Arbre<Sommet>, g : Graphe<Sommet,,**ReelPositif**>**)** **:** Liste<Liste<Sommet>>
  retourne la liste des arcs (liste de deux sommets) dont le premier sommet appartient à a et le second sommet appartient à g et n'appartient pas à a
- **procédure** sommetLePlusProche **(E** g : Graphe<Sommet>, arcs : Liste<Liste<Sommet>>, cout : Dictionnaire<Sommet, **ReelPositif**>,**S** sommeDeA, sommetAAjouter : Sommet, coutSupplementaire : **ReelPositif)**

  ⌊**précondition(s)** $non(estVide(arcs))$
  et $\forall i \in 1..longueur(arcs), longueur(obtenirElement(arcs, i)) = 2$

  détermine, parmi les *arcs*, celui dont le sommet *sommetAAjouter* du graphe est le plus proche (au sens du dictionnaire de *cout*) des sommets de a (en identifiant *sommetDeA*)
- **procédure** ajouterCommeFils **(E/S** a : Arbre<Sommet>, **E** sommetPere, sommetFils : Sommet**)**
  ajoute un nouveau noeud, à l'arbre a, contenant *sommetFils* qui sera fils du noeud contenant *sommetPere*

1. Donnez l'arbre obtenu pour le graphe suivant sachant que le sommet de départ est le sommet 5. (2 points)



2. Donnez l'algorithme de la fonction *arcsEntreArbreEtGraphe*. (2 points)

3. Donnez l'algorithme de la procédure *sommetLePlusProche*. (2 points)
4. Donnez l'algorithme de la procédure *ajouterCommeFils*. (3 points)

Annexe

Voici la conception préliminaire de quelques TAD.

Arbre

- **fonction** arbre () **:** Arbre
- **fonction** racine (e : Element, fils : Liste<Arbre>) **:** Arbre
- **fonction** estVide (unArbre : Arbre) **: Booleen**
- **fonction** obtenirElement (unArbre : Arbre) **:** Element
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFils (unArbre : Arbre) **:** Liste<Arbre>
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **procédure** fixerFils (**E/S** unArbre : Arbre, **E** fils : Liste<Arbre>)
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)

ArbreBinaire

- **fonction** arbreBinaire () **:** ArbreBinaire
- **fonction** estVide (unArbre : ArbreBinaire) **: Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** unArbre : ArbreBinaire, **E** element : Element)
- **procédure** supprimer (**E/S** unArbre : ArbreBinaire, **E** element : Element)
- **fonction** estPrésent (unArbre : ArbreBinaire, element : Element) **: Booleen**
- **fonction** obtenirElement (unArbre : ArbreBinaire) **:** Element
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsGauche (unArbre : ArbreBinaire) **:** ArbreBinaire
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **fonction** obtenirFilsDroit (unArbre : ArbreBinaire) **:** ArbreBinaire
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **procédure** fixerFilsGauche (**E/S** unArbre : ArbreBinaire, **E** fils : ArbreBinaire)
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)
- **procédure** fixerFilsDroit (**E/S** unArbre : ArbreBinaire, **E** fils : ArbreBinaire)
  - ⌊**précondition(s)** non estVide(unArbre)

Dictionnaire

- **fonction** dictionnaire () **:** Dictionnaire
- **procédure** ajouter (**E/S** unDictionnaire : Dictionnaire, **E** clef : Clef, element : Valeur)
- **procédure** retirer (**E/S** unDictionnaire : Dictionnaire, **E** clef : Clef)
- **fonction** estPresent (unDictionnaire : Dictionnaire, clef : Clef) **: Booleen**
- **fonction** obtenirValeur (unDictionnaire : Dictionnaire, clef : Clef) **:** Valeur
  - ⌊**précondition(s)** estPresent(unDictionnaire, clef)
- **fonction** obtenirClefs (unDictionnaire : Dictionnaire) **:** Liste<Clef>
- **fonction** obtenirValeurs (unDictionnaire : Dictionnaire) **:** Liste<Valeur>

Graphe

- **fonction** graphe () **:** Graphe
- **procédure** ajouterSommet (**E/S** g : Graphe, **E** s : Sommet)
  - ⌊**précondition(s)** non sommetPresent(g,s)
- **procédure** ajouterArc (**E/S** g : Graphe, **E** s1, s2 : Sommet)
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s1) et sommetPresent(g,s2) et non arcPresent(g,s1,s2)
- **fonction** sommetPresent (g : Graphe, s : Sommet) **: Booleen**
- **fonction** arcPresent (g : Graphe, s1, s2 : Sommet) **: Booleen**
- **procédure** supprimerSommet (**E/S** g : Graphe, **E** s : Sommet)
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s)
- **procédure** supprimerArc (**E/S** g : Graphe, **E** s1, s2 : Sommet)
  - ⌊**précondition(s)** arcPresent(g,s1,s2)
- **fonction** obtenirSommets (g : Graphe) **:** Liste<Sommet>
- **fonction** obtenirSommetsAdjacents (g : Graphe, s : Sommet) **:** Liste<Sommet>
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s)
- **fonction** possedeEtiquette (g : Graphe, s : Sommet) **: Booleen**
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s)
- **fonction** obtenirEtiquette (g : Graphe, s : Sommet) **:** Etiquette
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s)
- **procédure** fixerEtiquette (**E/S** g : Graphe, **E** s : Sommet, e : Etiquette)
  - ⌊**précondition(s)** sommetPresent(g,s)
- **fonction** possedeValeur (g : Graphe, s1, s2 : Sommet) **: Booleen**
  - ⌊**précondition(s)** arcPresent(g,s1,s2)
- **fonction** obtenirValeur (g : Graphe, s1, s2 : Sommet) **:** Valeur
  - ⌊**précondition(s)** arcPresent(g,s1, s2)
- **procédure** fixerValeur (**E/S** g : Graphe, **E** s1, s2 : Sommet, v : Valeur)
  - ⌊**précondition(s)** arcPresent(g,s1,s2)

Liste

- **fonction** liste () **:** Liste
- **fonction** estVide (uneListe : Liste) **: Booleen**
- **procédure** insérer (**E/S** uneListe : Liste, **E** position : **Naturel**, element : Element)
  - ⌊**précondition(s)** $1 \leq position \leq longueur(uneListe) + 1$
- **procédure** supprimer (**E/S** uneListe : Liste, **E** position : **Naturel**)
  - ⌊**précondition(s)** $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** obtenirElement (uneListe : Liste, position : **Naturel**) **:** Element
  - ⌊**précondition(s)** $1 \leq position \leq longueur(uneListe)$
- **fonction** longueur (uneListe : Liste) **: Naturel**