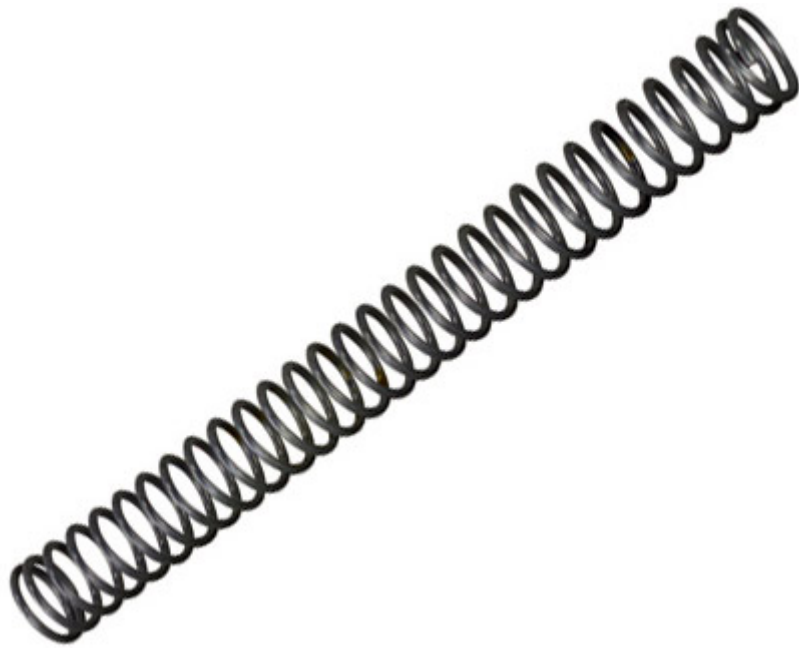


Projet de Physique P6
STPI/P6/2013 – 35

COMPORTEMENT OSCILLANT D'UN RÉSEAU DE RESSORTS



Etudiants :
Mohamed Reda BRIK
Léo LHUISSIER

Enseignant-responsable du projet :
Jérôme YON

Date de remise du rapport : *17/06/2013*

Référence du projet : *STPI/P6/2013 – 35*

Intitulé du projet : *Comportement oscillant d'un réseau de ressorts*

Type de projet : *calcul numérique et bibliographie*

Objectifs du projet : *modéliser des systèmes mécaniques de ressorts par différentes approches (analytique, numérique, expérimentale) pour mettre en évidence leurs modes d'oscillations.*

Mots-clefs du projet : *ressort, oscillation, fréquence*

TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	5
2. Méthodologie / Organisation du travail.....	5
3. Travail réalisé et résultats.....	6
3.1. Méthode analytique.....	6
3.1.1. Réseau de 3 ressorts et 2 masses.....	6
3.1.2. Généralisation à un réseau de n ressorts et n-1 masses.....	9
3.2. Les outils utilisés.....	11
3.2.1. Les outils informatiques.....	11
3.2.2. Les outils de l'expérience.....	13
3.3. Résultats.....	16
3.3.1. Modèle à deux masses.....	16
3.3.2. Présentation des systèmes à N masses:.....	20
4. Conclusions et perspectives.....	23
5. Bibliographie.....	24
6. Annexes.....	25
6.1. Code Scilab.....	25
6.2. Code POV-ray.....	27

1. INTRODUCTION

Dans le cadre de notre projet intitulé « Comportement oscillant d'un réseau de ressorts », nous sommes amenés à étudier les oscillations d'un réseau de ressorts et de masses excité comme un système mécanique unidimensionnel en faisant l'hypothèse que tous les ressorts ont la même constante de raideur et que les masses sont identiques.

Ces approximations faites, nous nous sommes intéressés aux fréquences propres de ce système mécanique. En effet, la détermination des fréquences propres a de multiples répercussions dans l'industrie (automobile, imagerie, ...) en relation avec le phénomène de résonance qu'on peut alors contrôler dans diverses applications (résistance des matériaux,...).

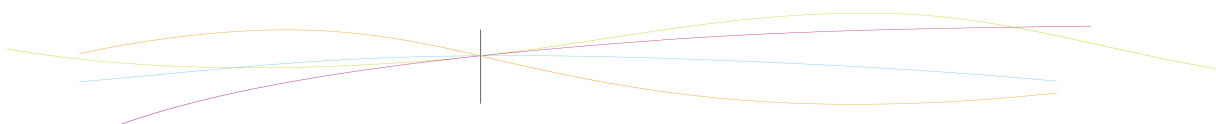
Dans l'intérêt du projet et pour s'assurer des résultats tant dans la théorie que dans la pratique, nous avons procédé avec trois approches différentes comprenant les études analytique, numérique et expérimentale. La comparaison de ces approches constitue également un aspect intéressant de ce projet.

Ainsi, nous présenterons le modèle analytique du problème physique dans un premier lieu. Ensuite, nous exploiterons les résultats théoriques en les traitant à l'aide de logiciels adaptés, dont nous expliquerons les fonctionnalités, pour réaliser une modélisation numérique du système. Enfin, nous finirons sur les résultats obtenus par l'expérience que nous avons réalisé et dont nous traiterons encore une fois les données à l'aide de logiciels de traitement d'image.

2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Lors de la première séance, nous avons abordé, avec notre encadrant, la méthode de résolution analytique pour un réseau de 3 ressorts pour cerner les objectifs principaux du projet. Étant donné que nous ne sommes qu'un binôme, nous avons réalisé la plupart des tâches ensemble. En effet, nous avons décidé d'explorer les pistes d'approfondissement les plus intéressantes proposées par notre encadrant: le traitement numérique de réseaux de ressorts plus complexes et la conception d'images de synthèse pour mieux les visualiser. Enfin, il nous a paru juste de réaliser une expérience pour vérifier nos résultats de manière empirique. Chaque tâche effectuée a nécessité 1 à 2 séances sachant que nous avons dédié les deux dernières séances à la rédaction du rapport et l'organisation de la soutenance.

Tâche à effectuer	Étudiant(s) affecté(s)
Méthode analytique pour un réseau de 3 ressorts et 2 masses	En binôme
Généralisation à un réseau de n ressorts	Mohamed Reda BRIK
Méthode numérique avec le logiciel Scilab	Léo LHUISSIER
Images de synthèse avec avec le logiciel POV-Ray	En binôme
Réalisation de l'expérience et traitement de données avec les logiciels Avi-Méca et Regressi	En binôme

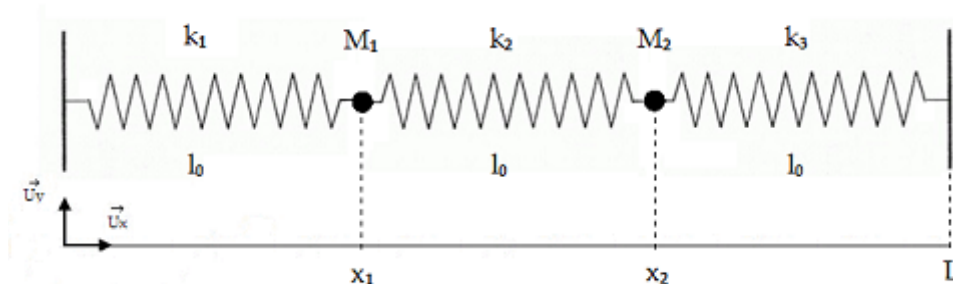


3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

3.1. Méthode analytique

3.1.1. Réseau de 3 ressorts et 2 masses

On considère un montage de longueur L constitué de 3 ressorts de constantes de raideur respectives k_1 , k_2 et k_3 et de deux systèmes M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 .



On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces appliquées au système M_1 :

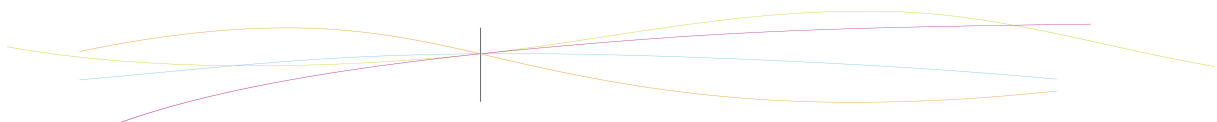
$$\begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow M_1} &= -k_1(x_1 - l_0)\vec{U}_x \\ \vec{F}_{2 \rightarrow M_1} &= k_2(x_2 - x_1 - l_0)\vec{U}_x \end{aligned}$$

Bilan des forces appliquées au système M_2 :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2 \rightarrow M_2} &= -k_2(x_2 - x_1 - l_0)\vec{U}_x \\ \vec{F}_{3 \rightarrow M_2} &= k_3(L - x_2 - l_0)\vec{U}_x \end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué aux deux systèmes:

$$\left\{ \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 \vec{U}_x &= (-k_1 x_1 + k_1 l_0 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - k_2 l_0) \vec{U}_x \\ m_2 \ddot{x}_2 \vec{U}_x &= (-k_2 x_2 + k_2 x_1 + k_2 l_0 + k_3 L - k_3 x_2 - k_3 l_0) \vec{U}_x \end{aligned} \right\}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{k_1 l_0}{m_1} - \frac{k_2 l_0}{m_1} \\ \ddot{x}_2 = \frac{-(k_2+k_3)}{m_2} x_2 + \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{k_2 l_0}{m_2} + \frac{k_3 L}{m_2} - \frac{k_3 l_0}{m_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-(k_2+k_3)}{m_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (k_1-k_2) \frac{l_0}{m_1} \\ (k_2-k_3) \frac{l_0}{m_2} + k_3 \frac{L}{m_2} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\vec{X}} = M \vec{X} + \vec{B} \text{ où } \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-(k_2+k_3)}{m_1} \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} (k_1-k_2) \frac{l_0}{m_1} \\ (k_2-k_3) \frac{l_0}{m_2} + k_3 \frac{L}{m_2} \end{pmatrix}$$

En considérant que $k_1=k_2=k_3=k$ et que $m_1=m_2=m$ on obtient l'équation suivante :

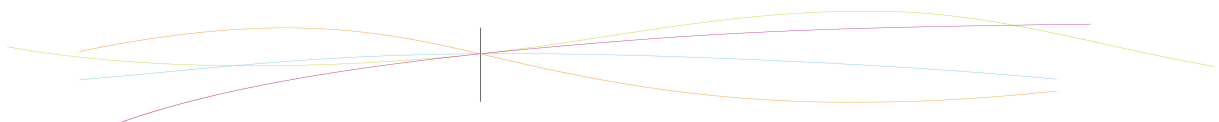
$$\ddot{\vec{X}} = M \vec{X} + \vec{B} \text{ où } \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kL}{m} \end{pmatrix}$$

À l'équilibre :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{X}}_{eq} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow M \vec{X}_{eq} + \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{X}_{eq} = -M^{-1} \vec{B} = \frac{m}{3k} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kL}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{3} \\ \frac{2L}{3} \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{Y} = \vec{X} - \vec{X}_{eq}$ on obtient une équation simplifiée :



$$\ddot{\vec{Y}} = M \dot{\vec{Y}} \quad \text{avec} \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{1eq} \\ x_2 - x_{2eq} \end{pmatrix}$$

On cherche à trouver des solutions de l'équation en écrivant $\vec{Y} = \vec{X} - \vec{X}_{eq}$ sous la forme :

$$\vec{Y} = \vec{A} e^{i\omega t} \quad \text{où } \omega \text{ est la pulsation et } \vec{A} \text{ un vecteur quelconque non nul.}$$

$$\text{Donc } \dot{\vec{Y}} = i\omega \vec{A} e^{i\omega t} \text{ et } \ddot{\vec{Y}} = -\omega^2 \vec{A} e^{i\omega t}.$$

$$\ddot{\vec{Y}} = M \dot{\vec{Y}} \Leftrightarrow -\omega^2 \vec{A} e^{i\omega t} = M \vec{A} e^{i\omega t}.$$

$$\Leftrightarrow (M + \omega^2 Id) \vec{A} e^{i\omega t} = \vec{0} \quad \text{où } Id \text{ est la matrice identité.}$$

$$\Leftrightarrow \det(M + \omega^2 Id) = 0 \quad \text{car } \vec{A} e^{i\omega t} \text{ est non nul.}$$

Calculer $\det(M + \omega^2 Id)$ reviendrait à trouver les valeurs propres de M, c'est à dire calculer les λ pour lesquelles $\det(M + \omega^2 Id) = 0$. Ainsi, la diagonalisation de M nous permettrait de trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 associées aux pulsations propres ω_1 et ω_2 tel que $\omega_1^2 = -\lambda_1$ et $\omega_2^2 = -\lambda_2$.

De la même manière que les valeurs propres liées aux pulsations propres du système, déterminer les vecteurs propres des sous-espaces vectoriels associés à M nous permettra de décrire les modes propres de vibration du système.

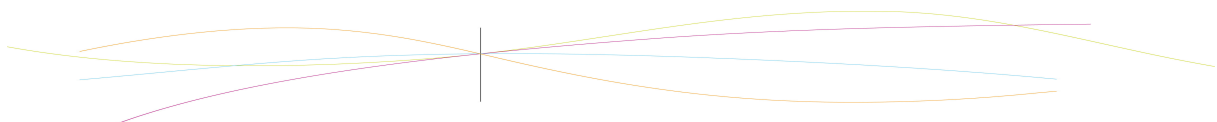
Diagonalisation de M :

On détermine le polynôme caractéristique de la matrice M:

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \frac{-2k}{m} - \lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4k}{m} \lambda + 3 \left(\frac{k}{m}\right)^2$$

$$\Delta = \left(\frac{2k}{m}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 = -3 \frac{k}{m} \\ \lambda_2 = \frac{-k}{m} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$$

Ensuite, on détermine pour chaque valeur propre, le sous-espace propre qui lui est associé .



$$\begin{aligned}
 E_{\lambda_1} &= \text{Ker}(M - \lambda_1 Id) \Leftrightarrow (M + \frac{3k}{m} Id) \cdot \vec{u}_1 = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow E_{\lambda_1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\
 E_{\lambda_2} &= \text{Ker}(M - \lambda_2 Id) \Leftrightarrow (M + \frac{k}{m} Id) \cdot \vec{u}_2 = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow E_{\lambda_2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Ces sous-espaces propres nous permettent de déterminer les vecteurs propres qui leurs sont associés.

On obtient donc une base orthonormée de vecteurs propres :

$$(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Chaque système de ressorts peut donc être décrit par une combinaison des deux modes propres associés à leurs pulsations propres, ce qui permet d'écrire la solution finale sous la forme :

$$\vec{Y} = \alpha_1 \vec{u}_1 e^{i\omega_1 t} + \alpha_2 \vec{u}_2 e^{i\omega_2 t} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}} t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

On remarque qu'on trouve autant de modes propres que de degrés de liberté du système.

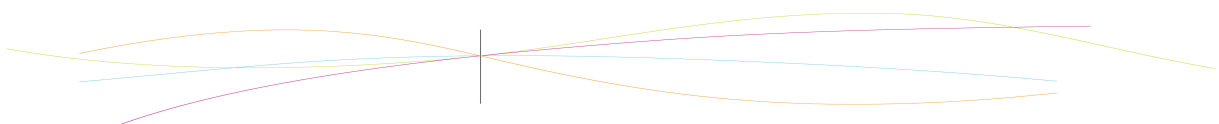
3.1.2. Généralisation à un réseau de n ressorts et n-1 masses

On considère maintenant un montage de longueur L constitué de n ressorts de constantes de raideur respectives k_1, k_2, \dots, k_n et de (n-1) systèmes de masses respectives m_1, \dots, m_n .

Bilan des forces appliquées aux systèmes :

Système 1 :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{1 \rightarrow M_1} &= -k_1(x_1 - l_0) \vec{U}_x \\
 \vec{F}_{2 \rightarrow M_1} &= k_2(x_2 - x_1 - l_0) \vec{U}_x
 \end{aligned}$$



Système 2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{2 \rightarrow M_2}} &= -k_2(x_2 - x_1 - l_0) \overrightarrow{U_x} \\ \overrightarrow{F_{3 \rightarrow M_2}} &= k_3(L - x_2 - l_0) \overrightarrow{U_x} \end{aligned}$$

etc...

Système (n-1) :

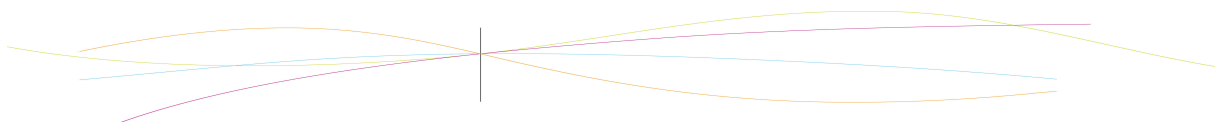
$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{(n-1) \rightarrow M_{(n-1)}}} &= -k_{(n-1)}(x_{(n-1)} - x_{(n-2)} - l_0) \overrightarrow{U_x} \\ \overrightarrow{F_{n \rightarrow M_{(n-1)}}} &= k_n(L - x_{(n-1)} - l_0) \overrightarrow{U_x} \end{aligned}$$

On considère comme précédemment que $k_1=k_2=\dots=k_n=k$ et que $m_1=m_2=\dots=m_n=m$.

Principe fondamental de la dynamique appliqué aux systèmes:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1) \\ m \ddot{x}_2 = k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \vdots \\ m \ddot{x}_{(n-1)} = k(L - 2x_{(n-1)} + x_{(n-2)}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 = \frac{k}{m}(x_2 - 2x_1) \\ \ddot{x}_2 = \frac{k}{m}(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \vdots \\ \ddot{x}_{(n-1)} = \frac{k}{m}(L - 2x_{(n-1)} + x_{(n-2)}) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{k}{m} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{k}{m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{kL}{m} \end{pmatrix}$$



Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\vec{X}} = M \dot{\vec{X}} + \vec{B} \text{ où } \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{k}{m} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{k}{m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k}{m} & \frac{-2k}{m} \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{kL}{m} \end{pmatrix}$$

La matrice M étant difficile à diagonaliser en dimension n, on utilisera les outils informatiques adaptés à la résolution du problème.

3.2. Les outils utilisés

3.2.1. Les outils informatiques

- [Scilab](#)



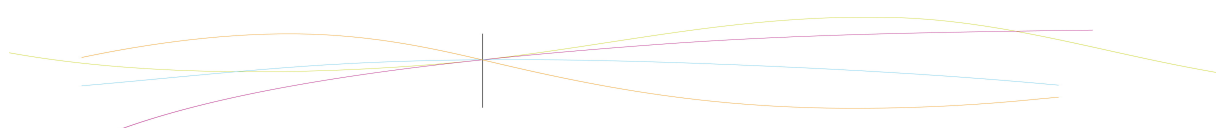
Scilab est un logiciel libre de calcul numérique fournissant un environnement de calcul pour des applications scientifiques. Il possède un langage de programmation permettant de faire des calculs numériques complexes. Il peut être utilisé pour le traitement du signal, le traitement d'images ainsi que la modélisation de systèmes mécaniques dans notre cas.

L'intérêt est de pouvoir modéliser plusieurs systèmes de ressorts selon les conditions initiales que nous imposons, de visualiser les modes propres de vibration en traçant la courbe de position des masses et de déterminer la fréquence de leurs oscillations grâce aux différentes fonctions du logiciel.

Pour un réseau de 3 ressorts et 2 masses, le problème est la résolution de l'équation différentielle $\ddot{\vec{Y}} = M \vec{Y}$ trouvée par la méthode analytique. Pour ce faire, nous avons utilisé la fonction ode du logiciel. Cette fonction permet la résolution d'équation différentielle du premier ordre, c'est pourquoi nous avons utilisé le système d'équations différentielles pour décrire notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{W}}{dt} = M \vec{Y} \\ \vec{W} = \frac{d\vec{Y}}{dt} \end{array} \right.$$

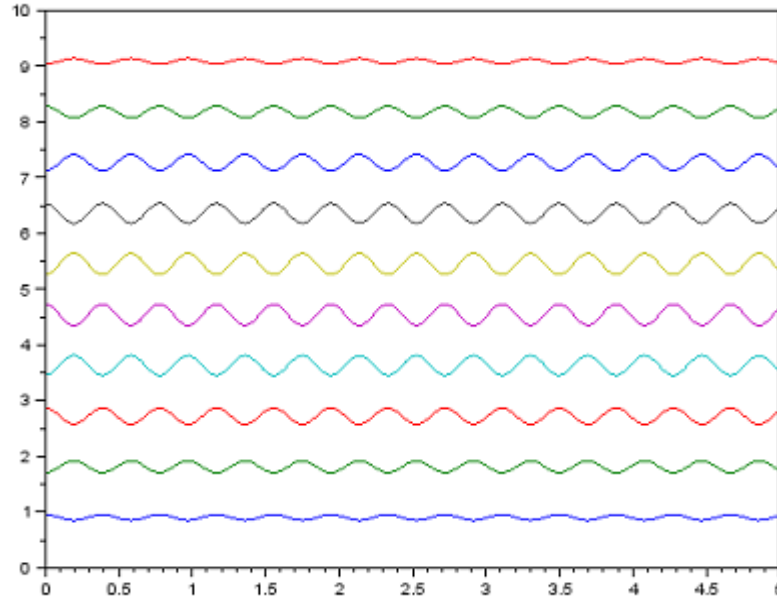
Pour un réseau de n ressorts et n-1 masses, le problème qui se pose est aussi la diagonalisation de M qui est une matrice de dimension n*n qu'il nous est impossible de diagonaliser avec la méthode



analytique. C'est pourquoi nous avons utilisé la fonction spec du logiciel qui permet de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice quelque soit le nombre de ressorts du système. De plus, nous pouvons choisir le mode propre que nous voulons modéliser.

Enfin, pour pouvoir réaliser une animation du système de ressorts avec le logiciel POV-Ray décrit ci-dessous, nous avons utilisé la fonction mfprintf qui permet de récupérer les données associées aux masses (position, vitesse) dans un fichier texte.

Le code des différentes fonctions utilisées étant long et complexe, nous l'avons mis en annexe.



Exemple d'utilisation de Scilab pour tracer la courbe de position des masses d'un réseau de 10 ressorts

- POV-Ray : Persistence of Vision Raytracer



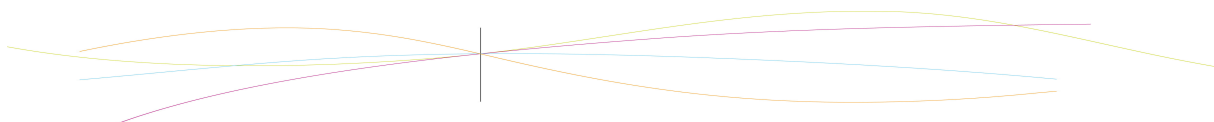
POV-Ray est un logiciel libre de synthèse d'image en 3D qui utilise des scripts de description de scène, dans lesquels tous les objets, les lumières, etc. doivent être décrits.

Nous avons utilisé ce logiciel dans un but pédagogique car il permet de réaliser des animations qui illustre précisément les modes propres que nous avons modélisé avec Scilab. En effet, un script du logiciel permet d'ouvrir un fichier texte importé depuis Scilab et d'en exploiter les données pour synthétiser, image par image, le mouvement précis des objets déclarés par le script. Cela nous a permis de synthétiser les images 3D des 2 modes propres d'oscillation d'un réseau de 3 ressorts et 2 masses. Par exemple, le logiciel produit ce type d'image de synthèse :



Il faut préciser que le logiciel nécessite aussi un fichier de format .ini contenant les paramètres de l'animation (nombre d'images, durée de l'animation, ...).

Le code des différents scripts utilisés étant long et complexe, nous l'avons mis en annexe.



3.2.2. Les outils de l'expérience

Afin de valider ou non notre modélisation, nous avons décidé de la tester avec une petite expérience assez simple.

Présentation de l'expérience :

Dispositif Expérimental :



Figure 1

Ce montage assez élémentaire est constitué de deux masses reliées par des ressorts à des parois fixes (figure 1).

Détermination de la constante de raideur :

Premièrement nous avons déterminé la constante de raideur des ressorts à l'aide d'une méthode simple (figure 2).

En effet en plaçant divers poids de différentes masses puis en leur appliquant la deuxième loi de Newton on arrive à des égalités de la forme :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

Où $\vec{P} = \text{masse} \cdot g$ représente le poids de la masse et $\vec{T} = k \cdot \text{allongement}$ la tension du ressort.

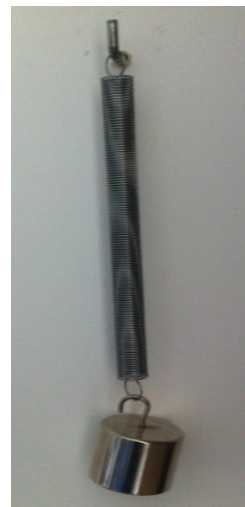


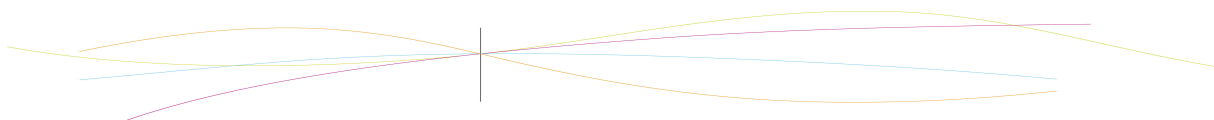
Figure 2

En projetant et en arrangeant on obtient :

$$\text{allongement} = \frac{g}{k} \cdot \text{masse}$$

Avec plusieurs séries de mesure on peut avoir une valeur assez fiable du coefficient et donc on en déduit une valeur de k.

Dans notre expérience on trouve $k \approx 19 \text{ N.m}^{-1}$



Autres données du problème :

La longueur totale du système est de 80 centimètres. Les deux masses sont respectivement de 36.6 grammes et de 37.4 grammes. Pour la suite du problème et afin de simplifier les calculs, on considérera les deux masses égales à 37,0 grammes.

De plus les masses seront lâchées depuis leurs positions initiales sans vitesse initiale.

Afin d'exploiter les données de l'expérience nous avons utilisé un caméscope afin de filmer celle-ci et de traiter les vidéos.

Configuration envisagée :

Dans le cadre de notre expérience, nous avons envisagé deux configurations possibles.

La première que nous avons faite est la configuration verticale. Celle-ci respectait plus l'hypothèse uni-dimensionnelle du problème mais cependant les mesures effectuées étaient peu stables.

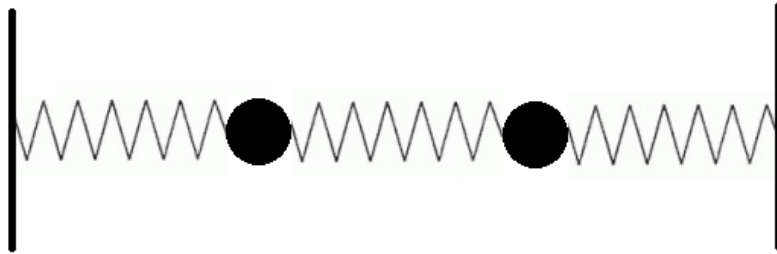


Schéma de la configuration horizontale

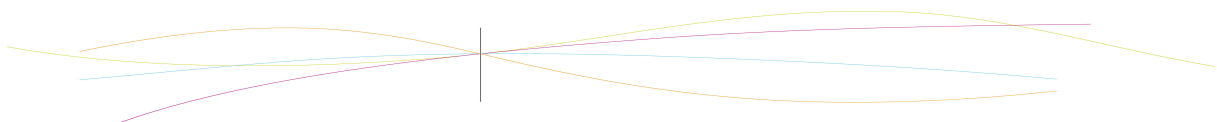
La seconde configuration effectuée est la configuration horizontale qui certes donnait des résultats plus stables mais respectait moins la propriété une dimension du problème. Malgré tout, cette petite transgression n'a aucune incidence sur la suite du problème.

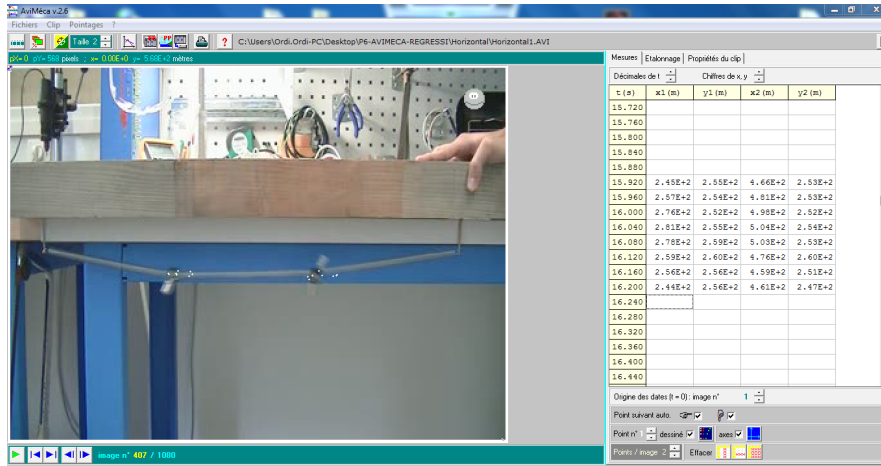
AviMéca et Regressi

Afin de pouvoir exploiter les vidéos réalisées suite à nos expériences, nous nous sommes tournés vers deux logiciels : AviMeca et Regressi.

AviMéca :

Le premier est un logiciel de pointage : c'est-à-dire que nous pointons les positions des masses à chaque image afin de former un tableau des coordonnées de chaque masse à chaque instant.



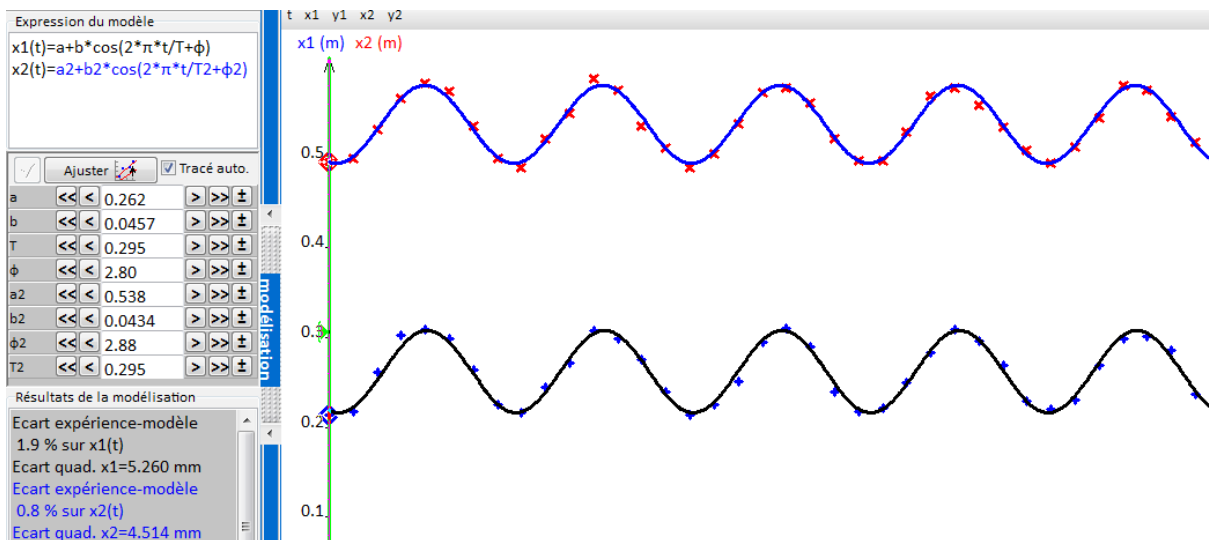


Exemple d'utilisation du logiciel AviMeca

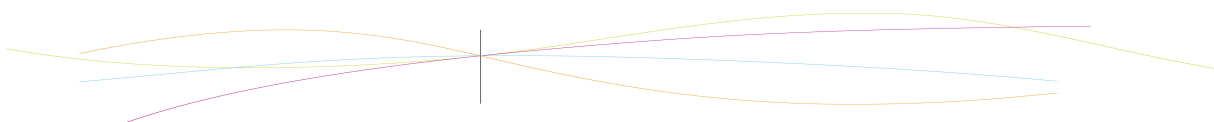
Regressi :

Ce tableau de valeurs sera exploité par le logiciel Regressi. Celui ci permet de tracer des graphes, des courbes de tendances etc... En bref, ce logiciel est extrêmement pratique puisqu'il nous a permis de tracer les courbes des trajectoires des différentes masses puis de trouver les fonctions sinusoïdales les plus proches de celles-ci.

Voici un exemple de courbe qui peut être obtenue avec Regressi :



Positions des deux masses (Système horizontal, Mode 1)



3.3. Résultats

3.3.1. Modèle à deux masses

Notre expérience consistait à exciter selon des conditions initiales bien précises un système de 3 ressorts et de deux masses. Le choix de ces conditions initiales a été fait à l'avance grâce à l'étude théorique du problème (voir partie 1).

Les Modes :

Ici nous avons choisi d'exciter les deux modes propres du système.

Pour exciter le premier mode on décale par rapport aux positions d'équilibre les deux masses de la même distance et dans la même direction (figure 3).

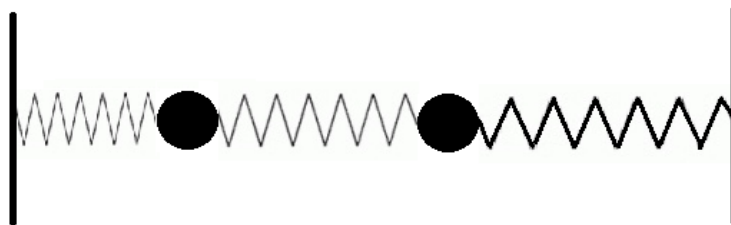


Figure 3

Ce système représente le mode de vibration fondamental du système. C'est le mode de vibration le plus lent. Les deux masses devraient osciller en phase autour de leurs positions d'équilibre.

Pour exciter le second mode, on décale les masses de la même distance mais dans des directions opposées (figure 4).

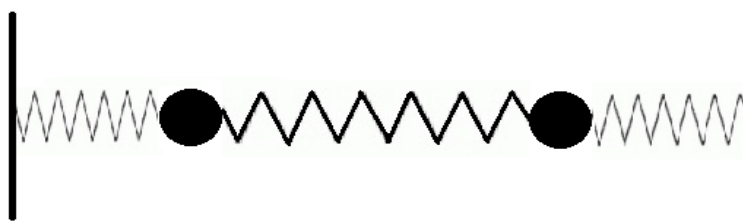


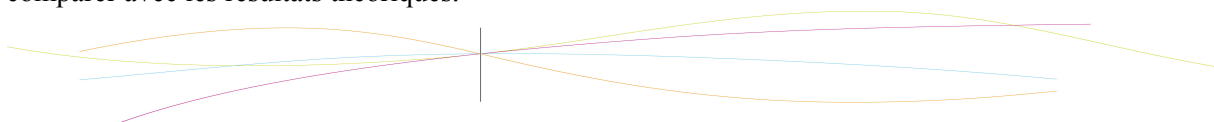
Figure 4

Ce mode est plus rapide que le précédent. La partie 1 nous a montré que le rapport de leur fréquence d'oscillation devrait être $\sqrt{3}$. Ici les deux masses devraient osciller en opposition de phase.

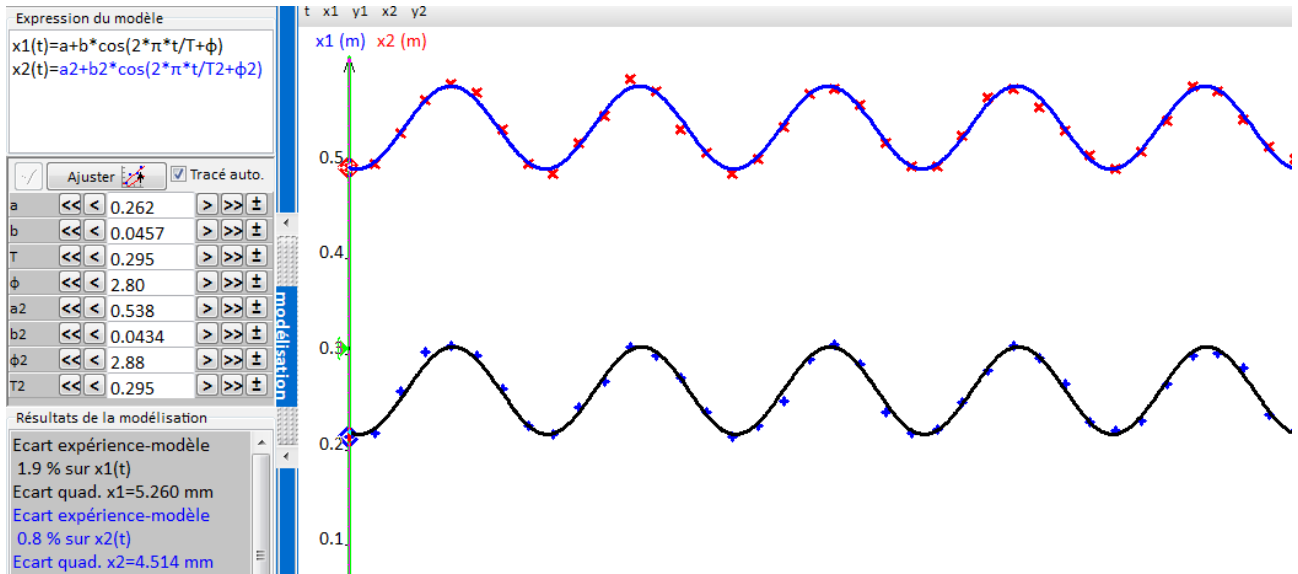
Traitement des données :

Comme nous l'avons dit précédemment, nous avons filmé nos expériences grâce à un caméscope puis nous les avons traités afin d'obtenir des courbes analysables.

Ainsi nous avons pu extraire les courbes des positions des masses en fonction du temps pour les deux modes. Nous avons donc approchés par des fonctions sinusoïdales ces courbes afin de les comparer avec les résultats théoriques.

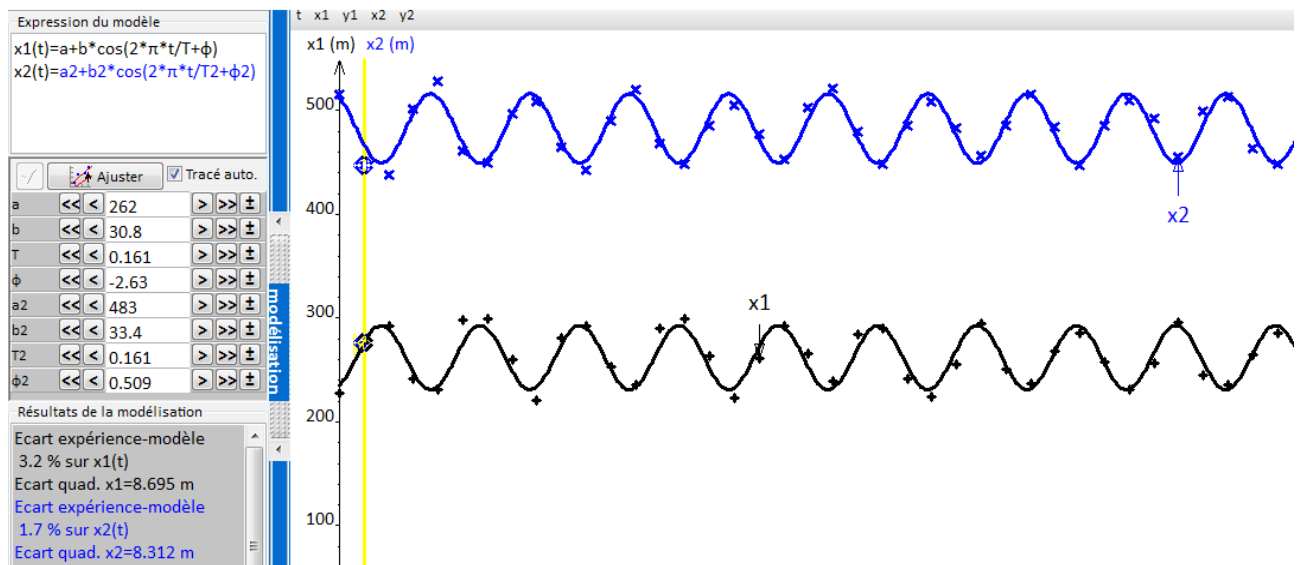


Voici les courbes / fonctions obtenues :



Ci dessus la courbe des positions des masses pour le mode 1 (le mode fondamental).

Et ci dessous la courbe des positions des masses pour le mode 2 (attention les distances ne sont pas étalonnées pour le 2nd mode mais les périodes restent correctes) :



De rapides observations nous permettent de vérifier que notre expérience concorde avec notre modèle.

Les masses se déplacent bien en phase/en opposition de phase à la même fréquence.

On peut aussi relever leur période :

$$T_1 \approx 0,295 \text{ s}$$

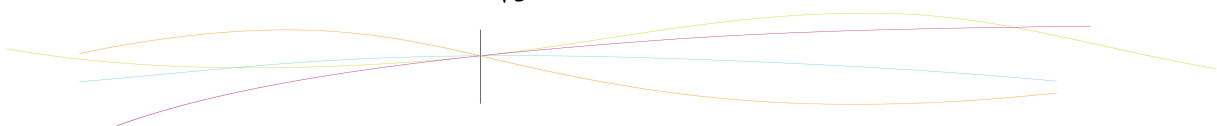
$$T_2 \approx 0,161 \text{ s}$$

De plus en calculant leur quotient on trouve :

$$q = \frac{T_1}{T_2} = \frac{0,295}{0,161} = 1,832$$

Sachant qu'on devrait théoriquement trouver $\sqrt{3}$, on peut faire un calcul d'écart relatif :

$$\frac{|q - \sqrt{3}|}{\sqrt{3}} \approx 0,058$$



Un écart relatif de moins de 5,8% sur le rapport des fréquences nous semble acceptable.

De plus, on peut calculer les valeurs théoriques de ces fréquences à l'aide des formules trouvées en partie 1. Ainsi on devrait trouver respectivement pour les deux périodes :

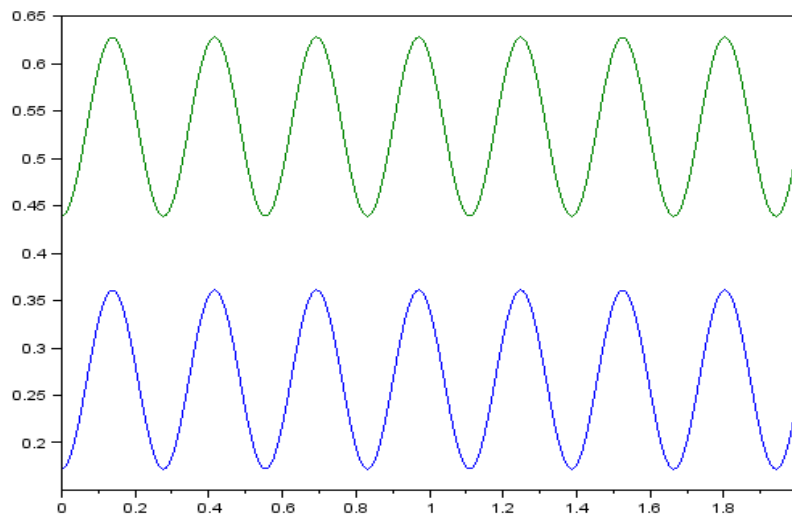
$$T_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,277 \text{ s} \qquad T_2 = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{m}{k}} = 0,160 \text{ s}$$

De même ici les écarts relatifs sont respectivement pour les deux périodes de 5,0% et de 0,6%.

Parallèle avec les résultats Scilab :

A l'aide de Scilab nous avons pu numériquement résoudre nos équations obtenues dans la partie 1, tracer leur courbe, et de comparer avec les expériences (voir le code en annexe 6.1).

Ainsi on trouve pour les mêmes intervalles de temps que précédemment des courbes similaires. Voici les résultats pouvant être obtenus avec les données du problème :



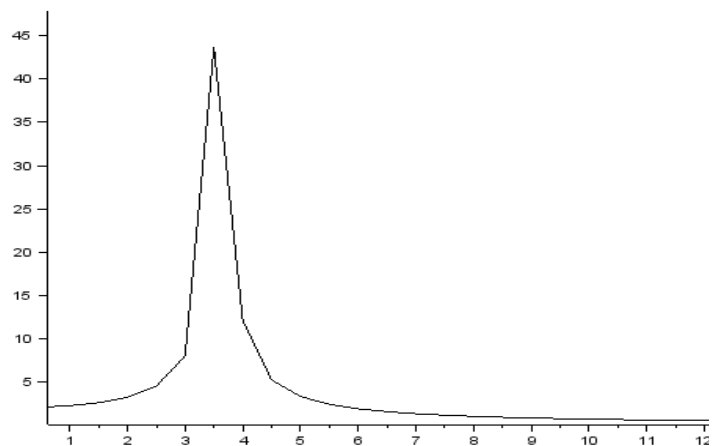
On peut voir ici la courbe des positions (en mètres) des deux masses en fonction du temps (en secondes). On peut noter qu'ici aussi les deux signaux sont bien en phases.

Scilab nous offre aussi la possibilité d'effectuer une analyse de Fourier afin de déterminer la fréquence des oscillations du système :

Ici on trouve donc une fréquence et donc un période de :

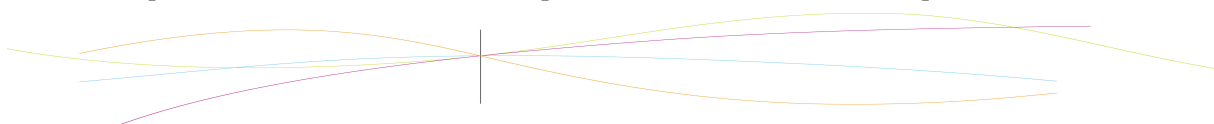
$$freq \approx 3,6 \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{1}{freq} \approx 0,28 \text{ s}$$



Analyse de Fourier

Ce qui concorde avec nos résultats expérimentaux et le résultat théorique attendu.



Récapitulatif :

On peut résumer les résultats obtenus sous forme de tableau par exemple :

Résultats	Expérimentaux	Numériques	Analytiques
Périodes mode 1	0,295 s	0,28 s	0,277 s
Périodes mode 2	0,161 s	0,16 s	0,160 s
Rapports Périodes	1,82	1,7%	$\sqrt{3} \approx 1,732$
plus grand % d'erreur avec Analytiques :	5,80%	0,00%	-

On remarque qu'il y a tout de même quelques écarts entre les résultats expérimentaux et théoriques. Ces écarts peuvent avoir plusieurs explications et plusieurs origines.

Tout d'abord par rapport à nos hypothèses et aux limites de notre modèle. En effet nous avons complètement négligé les forces de frottements et avons considéré que tous les ressorts et masses étaient identiques. Les incertitudes sur ces hypothèses sont assez difficiles à évaluer.

Ensuite il peut y avoir des imprécisions au niveaux de nos mesures expérimentales tant bien au niveau du pointage vidéo qui a servi à réaliser les courbes expérimentales qu'au niveau de l'évaluation des différents paramètres qui ont été utilisés ensuite dans nos formules théoriques. Ces incertitudes pourraient être plus simple à estimer.

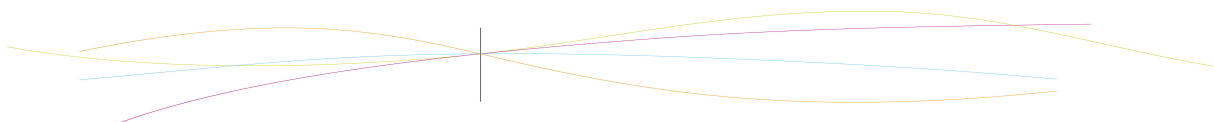
Vidéos POV :

Enfin grâce au logiciel POV nous avons pu réaliser des images de synthèse du système et ainsi monter de petites vidéos représentant le système de ressort en mouvement :



Image obtenu grâce à POV

Ces petites vidéos ont un but pédagogique et permettent de mieux visualiser les mouvement des masses et des ressorts.



3.3.2. Présentation des systèmes à N masses:

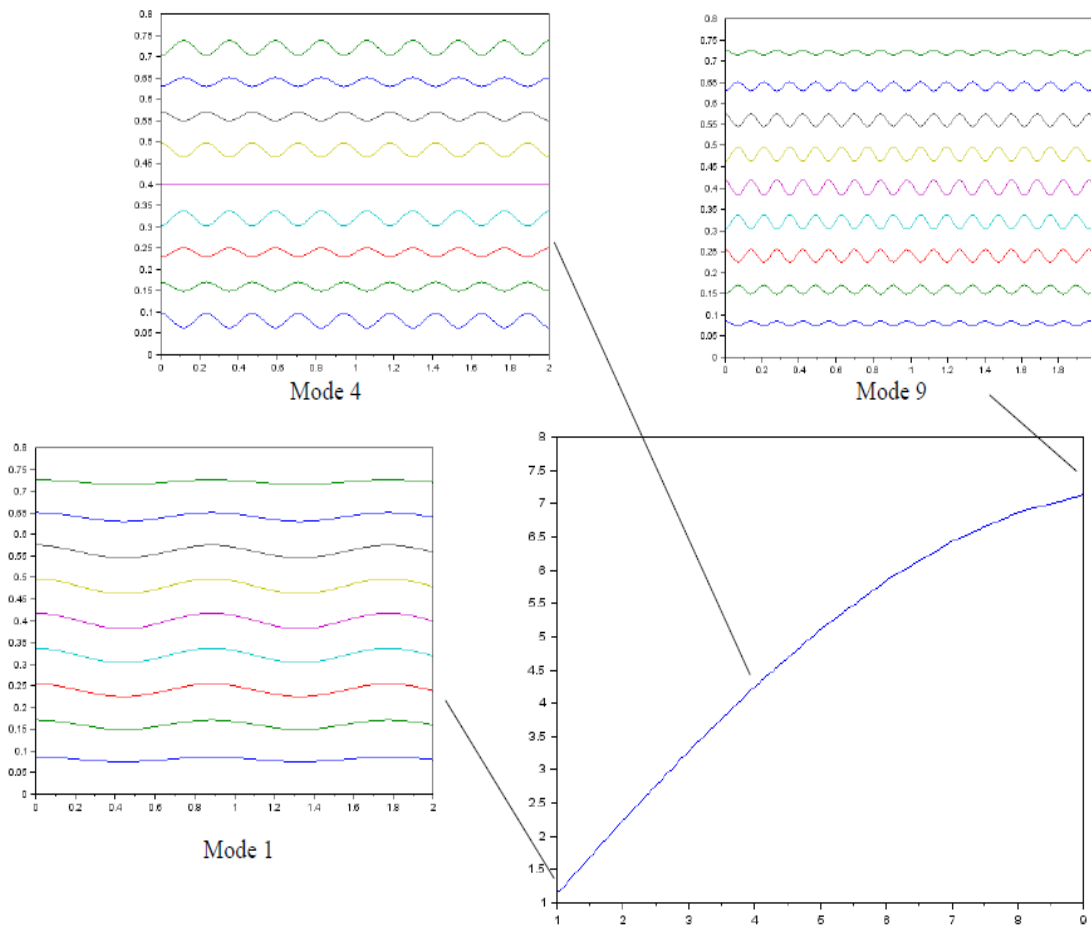
Dans notre précédente étude, on ne s'intéressait qu'à un modèle à deux masses. Cependant notre programme Scilab nous a permis d'étudier des systèmes avec un nombre très élevé de masses et il nous a semblé important d'exposer ici les résultats les concernant.

Malheureusement nous n'avons pas pu exploiter à 100% tous les résultats obtenues ni explorer toutes pistes possibles car cela ne rentrait pas complètement dans notre problématique.

Illustrations des différents modes possibles :

Ici les courbes ont été obtenues grâce à un système similaires au précédent mais avec 9 masses et 10 ressorts.

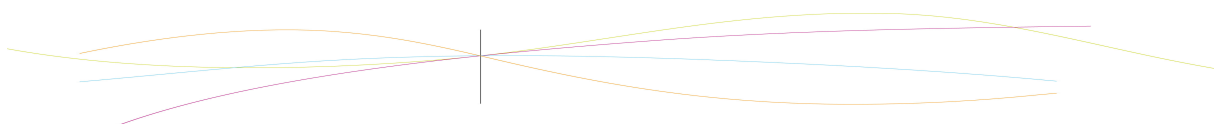
Étant donné que nous avons 9 masses pouvant chacune se déplacer dans une direction, notre système possède 9 degrés de liberté et donc 9 modes activables. Voici une courbe montrant leur fréquence en fonction du mode activé :



Courbe des fréquences propres en fonction du mode activé et courbes des positions en fonctions du temps (pour les modes 1, 4, 9)

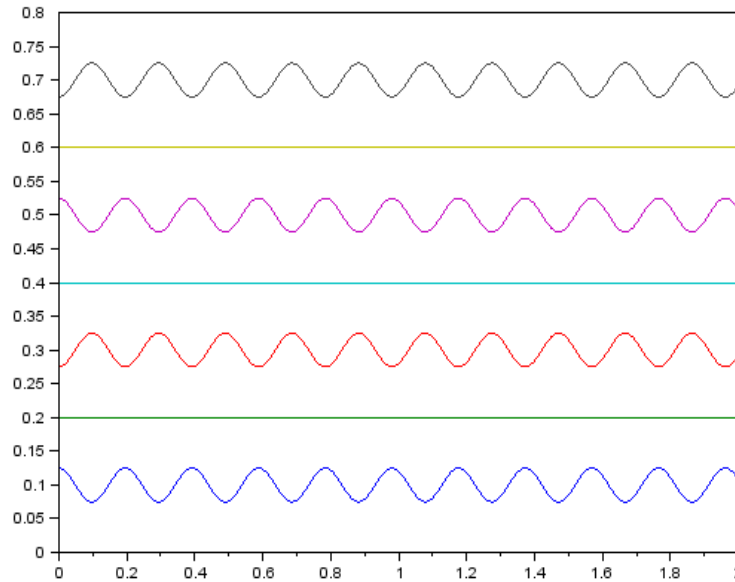
Comme on le voit sur ce graphique, pour les mêmes masses et les mêmes ressorts on peut atteindre une amplitude de fréquences beaucoup plus large qu'avec deux masses.

De plus on peut remarquer que plus il y a de ressorts en opposition de phase, plus la fréquence est élevée (par exemple le mode 9 possède tous ses ressorts deux à deux en opposition de phase alors que le mode 1 les a tous en phase).



Enfin on peut remarquer un phénomène assez impressionnant, il s'agit de l'apparition de ressort immobile pour les systèmes à un nombre impair de ressort (comme pour le mode 4).

On peut alors parler de nœuds et de ventres. On peut évidemment observer plusieurs nœuds sur un même système comme on le voit ici sur ce système à 7 masses. On en voit ici 3.



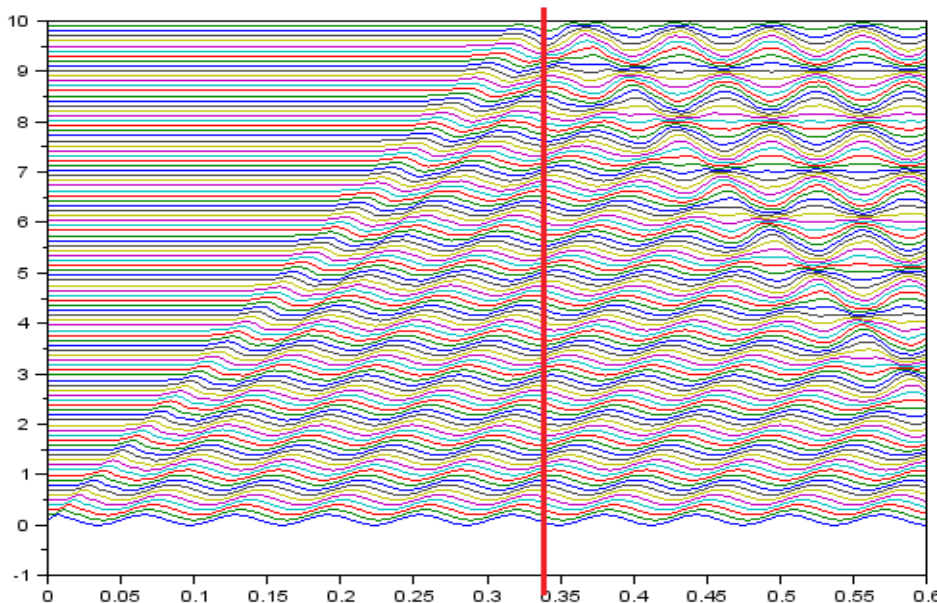
Courbes des positions des 7 masses en fonction du temps

Ouverture et autres applications :

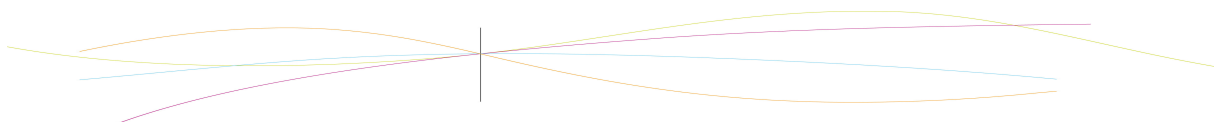
En augmentant encore le nombre de masse on élargit de plus en plus le champ des possibilités et les applications qui s'offrent alors à nous sont très variées.

Ainsi par exemple on peut modéliser des transferts d'énergie sous forme de vibration (comme les ondes sonores) grâce à ce modèle. En effet le programme que nous avons codé nous permet d'exciter une des paroi avec un signal quelconque et d'étudier les réactions du système.

Ici on peut voir la propagation du signal le long du système de ressort. Après la ligne rouge, le signal se réverbère sur la paroi opposée:



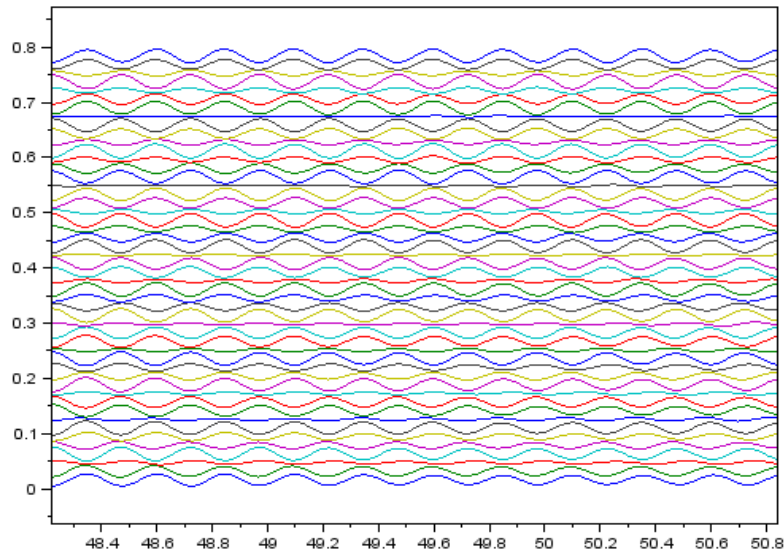
Courbe des positions des 100 masses en fonction du temps avec une excitation sinusoïdale d'une des paroi.



Cependant il faut choisir la fréquence d'oscillation avec soin. En effet l'onde ne se propage que si la fréquence d'excitation est comprise entre les fréquence des modes propres. Ce qui est logique car si celle ci n'est pas dans cet intervalle, aucun mode ne sera activé.

De plus, en excitant la paroi avec une fréquence donnée, le système tendra à se rapprocher du mode propre ayant la fréquence la plus proche.

Expliquons cela avec un exemple. Ici on excite un système de 50 ressorts avec une fréquence de 4 Hertz. Après le régime de transition on obtient un graphe du type :

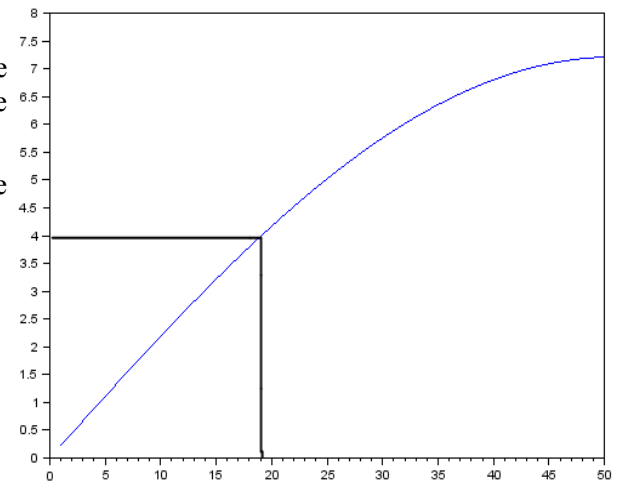


Position des masses pour une fréquence de 50Hz en fonction du temps

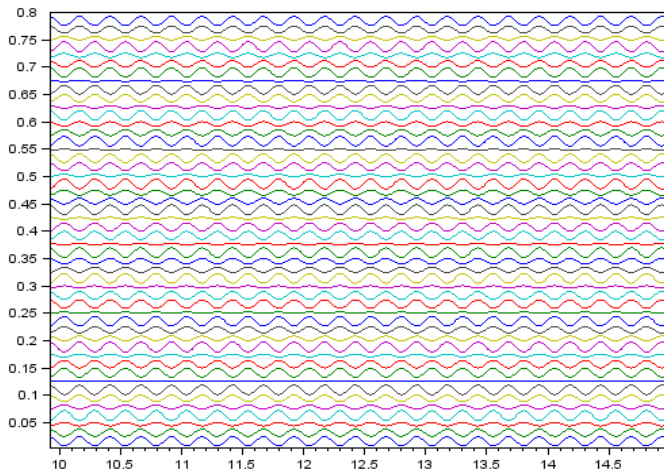
Ainsi grâce à la courbe des fréquences d'oscillation en fonctions des modes on peut trouver le mode propre se rapprochant le plus de 4 Hz. Il s'agit du mode 19 :

Ainsi en traçant le mode 19 on retrouve bien une courbe se rapprochant de celui trouvé avec une fréquence de 4 Hz.

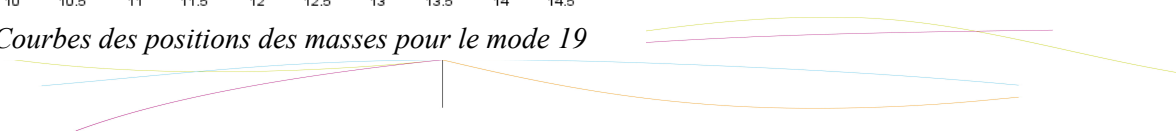
Le système tend donc bien à se caler sur le mode propre le plus proche.



Courbe des fréquences propres en fonction du mode activé



Courbes des positions des masses pour le mode 19



4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Pour conclure, on peut dire que ce travail a été très enrichissant.

Nous avons pu répondre à la problématique posée et modéliser le comportement oscillant d'un système de ressort. Nous sommes passé par les trois approches annoncées:

L'analyse mathématique et la résolution matricielle du système nous ont permis de poser le problème et d'en appréhender les bases. On a vu ainsi un exemple étonnant de l'utilité des diagonalisations de matrices et de leur application.

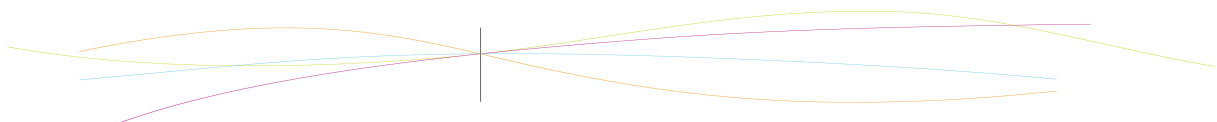
Nous nous sommes ensuite intéressés à une résolution numérique du problème qui nous a permis d'étendre notre champ d'action à un nombre *illimité* de masses. Nous avons dans le même temps créé des films d'images de synthèse pour modéliser nos calculs.

Enfin nous avons réalisé deux expériences afin d'illustrer notre problème.

Ce projet nous a donné l'opportunité de réaliser un véritable travail scientifique de groupe (même si nous n'étions que deux). Nous avons donc appris de nouvelles méthodes de travail et d'organisation. Nous avons aussi énormément appris sur la rédaction d'un rapport scientifique.

Pour finir il faut dire qu'il a été vraiment plaisant de mener à terme ce projet et nous remercions notre professeur encadrant Jérôme Yon pour l'aide qu'il nous a apporté.

Concernant la poursuite du projet, il reste évidemment énormément de chose à creuser, notamment au niveau des systèmes possédant un nombre élevé de ressorts (vitesse de propagation des ondes, modélisation de molécules, modélisation d'ondes sonores etc...)



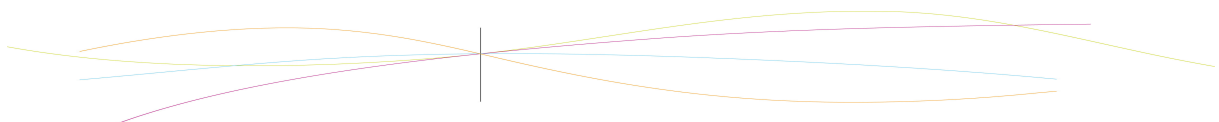
5. BIBLIOGRAPHIE

Afin de réaliser ce projet nous n'avons pas utilisé énormément de documentation. Pour faire les codes des différents logiciels nous avons principalement utilisé les aides de ceux-ci.

Cependant pour ceux qui voudraient approfondir leurs connaissances nous recommandons :

Cours en ligne de l'EPFL : <http://alg-geo.epfl.ch/cours/alglin0809/al1.pdf> (valide à la date du 16/06/2013)

Site officiel de Scilab : <http://www.scilab.org> (valide à la date du 16/06/2013)



6. ANNEXES

6.1. Code Scilab

Voici le **code Scilab** qui nous permet de réaliser tous les calculs numériques :

```
clear;
//W représente des écarts à l'équilibre et X des positions
//Définition des données du problème
Nb=2 //nombre de masses
L=0.8 //Longueur du système
k=19 //constante de raideur des ressorts
m=0.037 //Valeur des masses
Xeq=([(1:Nb]*L/(Nb+1)),zeros(1,Nb)]; //positions d'équilibre des masses
Mod=2; // mod à activer
C=1; // Coefficient pour augmenter l'amplitude du signal
fre=4; //fréquence du signal
a=0.05; // coefficient d'amplitude du signal

//Calcul de la matrice de raideur M
A=2*ones(1,Nb);
B=-1*ones(1,Nb-1);
M=(k/m)*(diag(A)+diag(B,1)+diag(B,-1));

//Valeurs propres
[Vectpr,Valpr]=spec(M);
Freqpr=sqrt((diag(Valpr)))/(%pi*2);

//Ecart à l'équilibre initial des masses (plusieurs configurations, retirer les // pour activer la
configuration
Wi=C*L/(2*Nb+2)*[Vectpr(:,Mod)',zeros(1,Nb)]'; // pour les modes propres
//Wi=[L/(2*Nb+2)*rand(1,Nb),zeros(1,Nb)]'; // pour une configuration aléatoire
//Wi=[zeros(1,2*Nb)]'; // pour une les oscillations sinusoïdales
```

```
//Reglage du graphique
NbrePoints=4000;
Tmin=0;
Tmax=1;
temps=linspace(Tmin,Tmax,NbrePoints)';

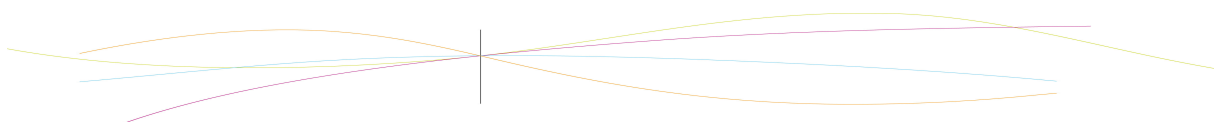
// Graphe des fréquences propres
scf(0);
clf;
plot([1:Nb],Freqpr);

//Fonction de l'équadiff dW/dt = f(W)
function dWdt=f(t,W);
C=[zeros(Nb,Nb),eye(Nb,Nb); -M,zeros(Nb,Nb)];
dWdt=C*W;
dWdt(1)=dWdt(1)//+a*cos(%pi*2*fre*t); //si on veut mettre une excitation
endfunction;

//Equadiff
W=ode(Wi,0.0,temps,f);
Xtemps=Xeq*ones(1,NbrePoints)+W;

//Courbe de position des masses
scf(1);
clf;
plot (temps,Xtemps(1:Nb,:));
//plot (temps,X(Nb/2,:));

//Analyse de Fourier
scf(3);
clf;
Sr=(NbrePoints-1)/(Tmax-Tmin);
y=fft(Xtemps(1,:));
fr=Sr*(0:(NbrePoints/2))/NbrePoints;
n=size(fr,'*');
plot2d(fr,abs(y(1:n)))
```



```
//Ecriture resultats
fichierPov=mopen('donnees.txt','w');
for i=1:NbrePoints;
mfprintf(fichierPov,"%f, ",Xtemps(1,i));
mfprintf(fichierPov,"%f, ",Xtemps(2,i));
end
mclose(fichierPov);
```

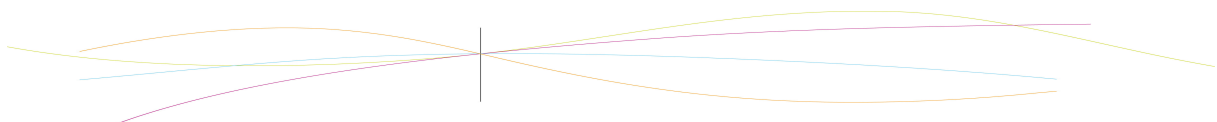
6.2. Code POV-ray

Voici le code POV :

```
global_settings { assumed_gamma 1.0 }
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"

#declare Camera_0 = camera {angle 25
    location <0.0 , 0.0 ,-50>
    right   x*image_width/image_height
    look_at <0.0 , 0.0 , 0.0>}
camera{Camera_0}
light_source{< 1500,2500,-2500> color White}
sky_sphere { pigment { color rgb <1.0,1.0,1.0>
    } // end of pigment
} //end of skysphere

//Gestion des données à lire
#fopen infos "donnees.txt" read
#declare Count=0;
#while (Count <= frame_number)
    #read (infos,Masse1)
    #read (infos,Masse2)
    #declare Count=Count+1;
#end
#fclose infos
```

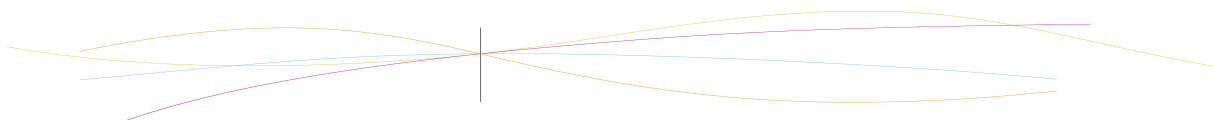


```
#declare Spiral =
  union{
    #local temp = clock;
    #local N_per_Rev = 300; // Number of Elements per revolutions
    #local N_of_Rev = 10.00; // Total number of revolutions
    #local H_per_Ref = (Masse1) / N_of_Rev;// Height per revolution
    #local Nr = 0; // start loop
    #while (Nr< N_per_Rev*N_of_Rev)
      sphere{ <0,0,0>,0.025
        translate<0.25, -Nr*H_per_Ref/N_per_Rev, 0>
        rotate<0, Nr * 360/N_per_Rev,0>
        texture{ Chrome_Metal
          finish {ambient 0.15 diffuse 0.85 phong 1}}
        }
      #local Nr = Nr + 1; // next Nr
    #end

    sphere { <0,0,0>, 0.4
      translate<0,-Nr*H_per_Ref/N_per_Rev-0.2,0>
      texture { pigment {color rgb<0.3,0.,0>}
        finish {ambient 0.15 diffuse 0.85 phong 1}}
      }
    }

  object { Spiral translate< 0*clock,7.5,0>
  }
}
```

```
#declare Spiral2 =
  union{
    #local temp = clock;
    #local N_per_Rev = 300; // Number of Elements per revolutions
    #local N_of_Rev = 10.00; // Total number of revolutions
    #local H_per_Ref = (Masse2 - Masse1) / N_of_Rev;// Height per revolution
    #local Nr = 0; // start loop
```



```

#while (Nr< N_per_Rev*N_of_Rev)
    sphere{ <0,0,0>,0.025
    translate<0.25, -Nr*H_per_Ref/N_per_Rev, 0>
    rotate<0, Nr * 360/N_per_Rev,0>
    texture{ Chrome_Metal
    finish {ambient 0.15 diffuse 0.85 phong 1}}
    }
    #local Nr = Nr + 1; // next Nr
#end

sphere { <0,0,0>, 0.4
translate<0,-Nr*H_per_Ref/N_per_Rev-0.2,0>
texture { pigment {color rgb<0.3,0.,0>}
finish {ambient 0.15 diffuse 0.85 phong 1}}
}
}

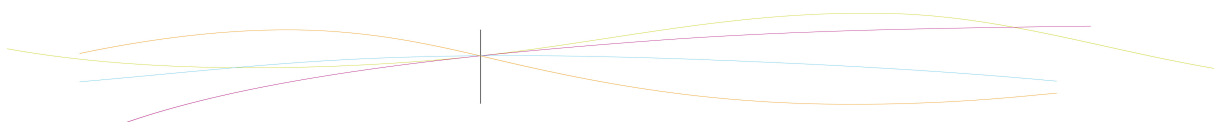
object { Spiral2 translate< 0*clock,7.5-Masse1,0>
}

```

```

#declare Spiral3 =
union{
    #local temp = clock;
    #local N_per_Rev = 300; // Number of Elements per revolutions
    #local N_of_Rev = 10.00; // Total number of revolutions
    #local H_per_Ref = (10-Masse2) / N_of_Rev;// Height per revolution
    #local Nr = 0; // start loop
    #while (Nr< N_per_Rev*N_of_Rev)
        sphere{ <0,0,0>,0.025
        translate<0.25, -Nr*H_per_Ref/N_per_Rev, 0>
        rotate<0, Nr * 360/N_per_Rev,0>
        texture{ Chrome_Metal
        finish {ambient 0.15 diffuse 0.85 phong 1}}
        }
        #local Nr = Nr + 1; // next Nr
    #end
}

```



```
object { Spiral3 translate< 0*clock,7.5-Masse2,0>
}
```

Avec le fichier INI correspondant :

Antialias=On

Antialias_Threshold=0.1

Antialias_Depth=2

Input_File_Name=AnimRessort.pov

Initial_Frame=1

Final_Frame=50

Initial_Clock=0

Final_Clock=1

Cyclic_Animation=off

Pause_when_Done=off

