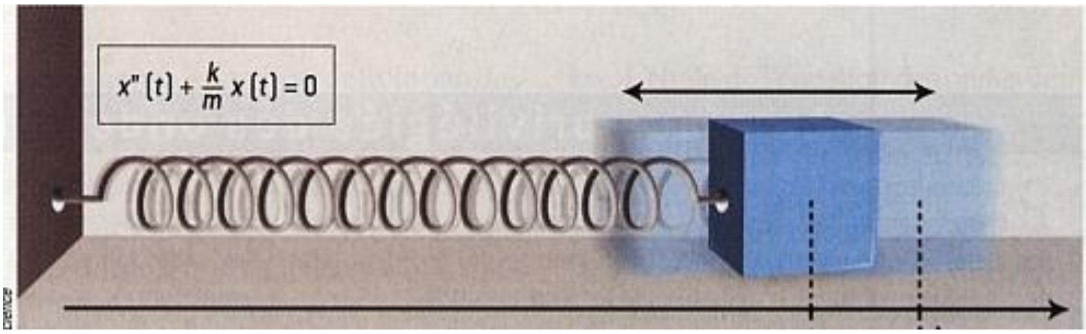
À taille humaine,
à l'échelle du monde

Projet de Physique P6

STPI/P6-14/2012 – 2013

OSCILLATEUR - MASSE ET RESSORT



Etudiants :

Baptiste DURAND **Sara MNI**

Déborah OUIN

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : ***17/06/2013***

Référence du projet : ***STPI/P6-14/2012 – 2013***

Intitulé du projet : ***Oscillateur – Masse et ressort***

Type de projet : ***bibliographique et modélisation***

Objectifs du projet:

A partir de différents cas de forces sur un oscillateur masse et ressort horizontal, trouver les équations de mouvement et calculer les solutions des équations différentielles par la méthode de Laplace et par méthode numérique. Modéliser les oscillations du ressort de façon théorique et numérique (Pascal et Maple).

Mots-clefs du projet: ***équations différentielles, masse-ressort, modélisation, Laplace***

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE ROUEN
Département Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur
BP 8 – avenue de l'Université - 76801 Saint Etienne du Rouvray - tél : +33(0) 2 32 95 66 21 - fax : +33(0) 2 32 95 66 31

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION

Dans le cadre de notre formation d'ingénieur à l'INSA de Rouen, nous avons souvent eu des projets en groupe à réaliser, comme un projet en mathématiques ou encore en informatique. Après tous ces projets voici celui de P6, qui concerne l'étude d'oscillateurs masse et ressort. Ce nouveau sujet s'inscrit dans l'optique de l'INSA qui est de former des ingénieurs capables de travailler en groupe, mais aussi de travailler sur un sujet diversifié. En effet, notre sujet rassemblait de la programmation, de l'analyse numérique, des calculs mathématiques, et une approche physique toujours présente.

L'objectif de notre projet était de faire une modélisation des oscillations d'un système masse et ressort horizontal de façon théorique, puis numérique avec Maple et de retrouver cette modélisation sur Pascal. Nous avons aussi appris à résoudre des équations différentielles grâce aux transformées de Laplace, puis de vérifier nos résultats sur Maple.

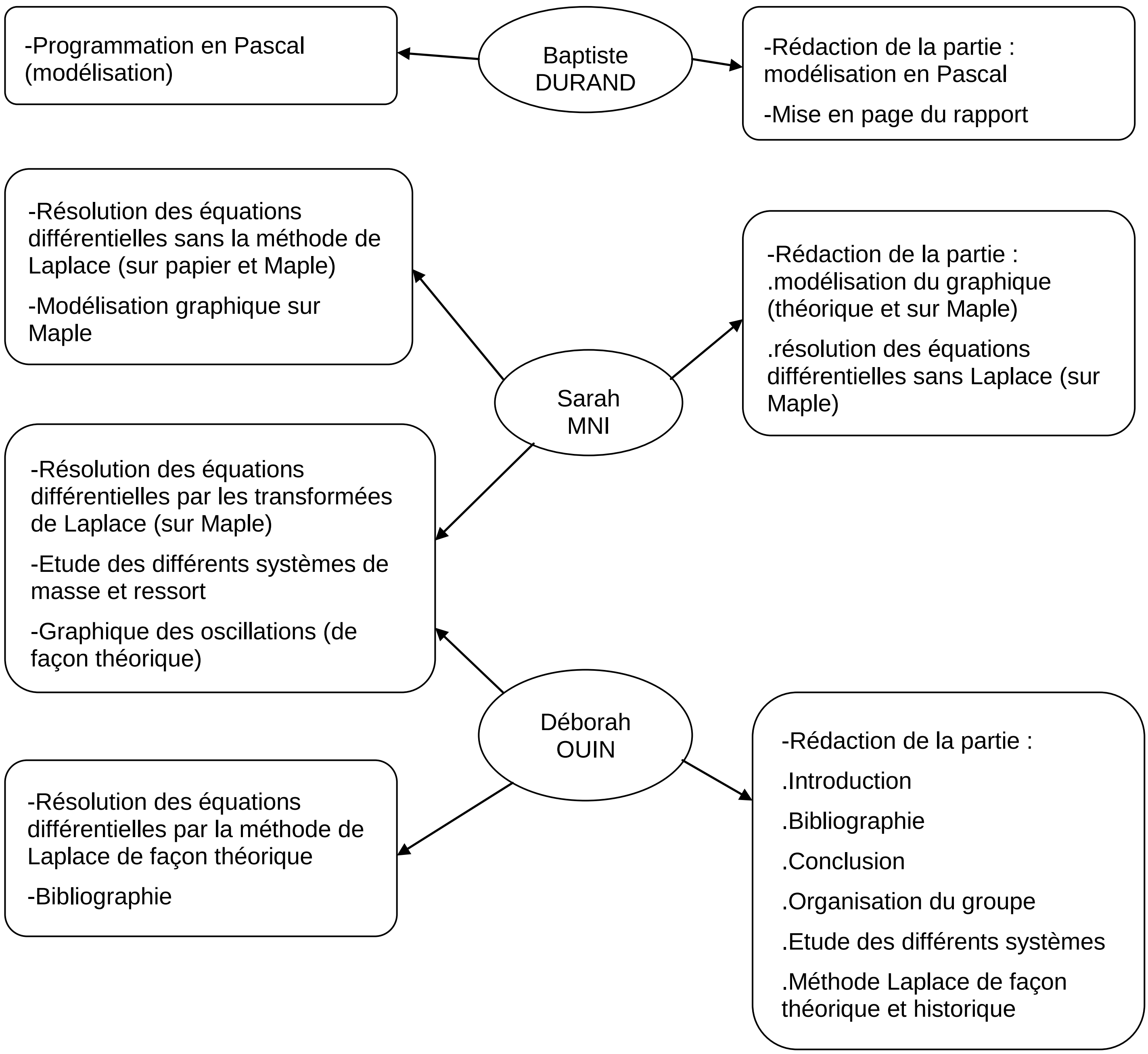
Ce projet était assez conséquent car nous avons travaillé chaque semaine pendant une heure et demie dans la salle informatique durant cinq mois, sans compter les heures de travail chez nous. Lors des deux premières séances, nous avons essayé de prendre connaissance du sujet. Ensuite, nous avons chacun travaillé sur une partie du sujet, tout en essayant de voir et comprendre le travail des autres personnes.

Le fait que l'on soit dans des thématiques différentes a été bénéfique pour l'avancée de notre projet, car nous étions complémentaires en termes de connaissances et de compétences.

Dans ce dossier, nous allons d'abord présenter les méthodes et l'organisation du groupe pour ce projet. Ensuite, nous passerons à l'étude des différents systèmes masse et ressort étudiés avec leurs conditions initiales et leurs équations différentielles obtenues. Par la suite, nous nous attacherons à l'aspect mathématique et aux différentes méthodes d'analyse établies afin d'obtenir une solution approchée de nos équations différentielles. Enfin, nous nous intéresserons à la modélisation des oscillations.

2. ORGANISATION DU TRAVAIL

Ce sujet nous a été attribué après un sondage qui tenait compte de nos préférences, mais aussi de nos horaires de libres. Le groupe a donc été formé en ne tenant pas compte des affinités. Nous avons dû alors apprendre à travailler ensemble, se partager le travail et communiquer pendant et hors de la séance dédiée au projet. Pendant les deux premières séances, nous avons tous fait des recherches sur le sujet, afin de se l'approprier. Ensuite, nous avons essayé de cibler les compétences de chacun afin de se répartir le travail, ce qui était pour nous la meilleure solution. Une personne s'occupait de la programmation et les deux autres, plus de la partie théorique. Nous nous sommes donc répartis le travail, selon l'organigramme ci-dessous :



3. TRAVAIL REALISE ET RESULTATS

3.1. Les différents cas d'oscillateurs masse et ressort étudiés

3.1.1. Masse et ressort horizontal avec frottements solides

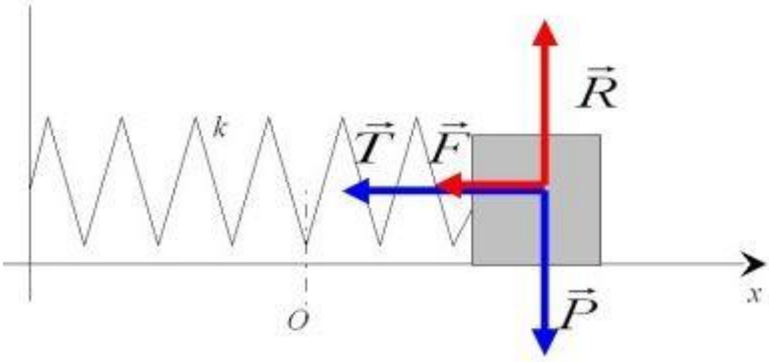


Image extraite de :

http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M01_G04/res/fig_13.jpg

Nous avons étiré un solide d'une position initiale xo.

Le référentiel est galiléen et le système considéré est le solide s.

Les forces appliquées sur le solide sont : -les frottements : $\vec{F}$ avec $||\vec{F}||$=F=constante
-la force de rappel : $\vec{T}$
-le poids du solide : $\vec{P}$
-la réaction du sol : $\vec{R}$

D'après la 2ème loi de Newton, nous avons : m $\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}$

Si nous projetons selon (O,x), nous avons : mx''= -Cx + λ F avec λ =1 si x'(t)<0 (le solide se déplace dans le sens contraire de l'axe) et λ =-1 si x'(t)>0 (le solide se déplace dans le sens de l'axe).

Nous obtenons alors comme équation différentielle : x'' + C/m*x = λ *F/m

Avec : m : la masse du solide (>0) et k : la constante de raideur du ressort (>0)

Pour résoudre cette équation différentielle, nous avons pris comme conditions intiales :

x'(0)=0 et x(0)=xo>0 : il y a donc mouvement.

La résolution de cette équation, nous a donné comme solution : x(t)=Acos(ωt)+λ*F/C

Avec A=xo-λ*F/C et $\omega=\sqrt{\frac{C}{m}}$ qui représente les pulsations propre en rad/s

D'où l'expression de la vitesse : x'(t)=-A.ω.sin(ωt)

3.1.2. Masse et ressort horizontal sans frottements solides

Il s'agit de la même équation qu'au-dessus, sans le terme des frottements on obtient donc : x''+C/m*x=0.

Cette équation représente l'équation homogène de l'équation différentielle avec les frottements.

La solution de cette équation est : x(t)=xo*cos(ωt)

3.1.3. *Masse et ressort horizontal avec un frein*

Toutes les solutions des équations différentielles des différents cas ont été calculées par Maple avec les transformées de Laplace (cf annexe).

La plupart des équations ont aussi été résolu par la méthode de résolution des équations différentielles avec l'équation caractéristique et la méthode des transformées de Laplace.

3.1.3.1. *Sans forces extérieures*

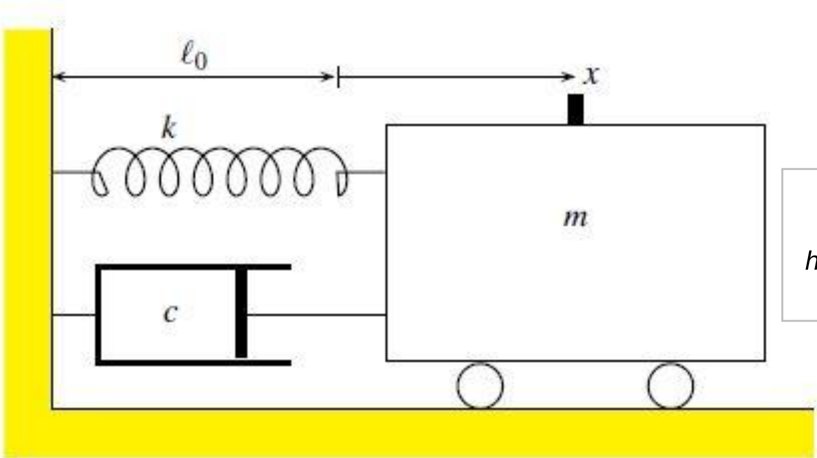


Image extraite de :

http://www2.ulg.ac.be/mathgen/cours/meca/Ref/Oscillateurs.pdf

Soit un référentiel terrestre et le système étudié est le solide de masse m.

Les forces appliquées sur ce solide sont : -le poids : $\vec{P}$

-la réaction normale du sol : $\vec{R}$

-la force de rappel du ressort : $\vec{T}$

-la force de frottement de l'amortisseur : $\vec{f}$ (suit la loi de Coulomb car le système est un solide matériel qui glisse à une vitesse $\vec{v} = \vec{x'}$ sur un support solide qui est soumis à la force de frottement $\vec{f}$)

D'après la 2ème loi de Newton, on a : m $\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T}$

Après une projection selon l'axe x, on obtient : mx'' + k*x' + C*x=0

Avec : m : la masse du solide

k : la constante d'amortissement de l'amortisseur

C : la constante de raideur du solide

Posons : $\omega o = \sqrt{\frac{C}{m}}$ et $\zeta = \frac{1}{2}\frac{k}{\sqrt{Cm}}$

On obtient donc comme équation différentielle :

$x''+2\zeta\omega o\, x'+\omega o^2 x=0$ avec ω_0 : la fréquence propre (s^{-1}) et ζ: le facteur d'amortissement du système.

Nous avons choisi comme conditions initiales : x(0)=xo et x'(0)=vo.

Le facteur d'amortissement peut prendre différentes valeurs :

Soit ζ=0 pour un oscillateur harmonique (Oscillateur idéal dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale, dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques du système et dont l'amplitude est constante) avec comme solution :

$$x(t) = xo\cos(wot) + \frac{vo \cdot \sin(wot)}{wo}$$

Soit ζ=1, dans le cas d'un régime critique : pas d'oscillations mais un amortissement très rapide, avec comme solution : $x(t) = e^{-wo\,t}\left(t\,vo + xo\,(1 + wo\,t)\right)$

Soit ζ>1, il s'agit d'un retour à l'équilibre sans oscillations, avec comme solution :

$$x(t) = \frac{e^{z1\,t}(vo - xo\,z2) + (xo\,z1 - vo)\,e^{z2\,t}}{-z2 + z1}$$

(avec z1 et z2 réels négatifs)

Soit ζ<1, nous obtenons des oscillations amorties (pseudo-périodique), avec comme solution : $x(t) = e^{-t\,\varsigma\,wo}\left(xo\cos(wt) + \frac{(\varsigma\,wo\,xo + vo)\sin(wt)}{w}\right)$ $avec\ w = wo\sqrt{1 - \varsigma^2}$

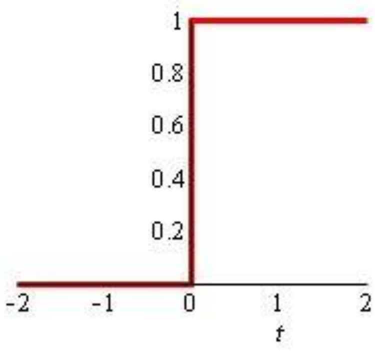
3.1.3.2. Avec une force extérieure qui a l'équation d'une force échelon

La fonction échelon est une fonction discontinue représentée ci-dessous :

```
> restart:
> F := piecewise(t < 0, 0, t > 0, 1);
```

$$F := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t \end{cases}$$

```
> plot(F, t=-2..2);
```



Nous obtenons donc comme équation différentielle : $x'' + 2\zeta\omega o x' + \omega^2 x = F(t)$

(voir les solutions dans l'annexe)

3.1.3.3. Avec une force extérieure qui est de la forme Fosin(wot)

Cette fonction est continue.

Nous avons donc résolu comme équation différentielle : $x'' + 2\zeta\omega o x' + \omega^2 x = Fo\sin(\omega o t)$

(voir les solutions dans l'annexe)

3.2. La résolution des différentes équations différentielles par la méthode des transformées de Laplace

3.2.1. La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une méthode de résolution algébrique des équations différentielle. En effet, il s'agit d'un outil mathématique qui transforme une équation différentielle en une équation algébrique. Les propriétés variées de la transformée font que ces équations algébriques sont souvent plus simples à résoudre.

L'opérateur de Laplace transforme une fonction f(t) ou dans notre cas x(t), en une fonction F(s) où s est appelée variable de Laplace. F(s) peut aussi se noter L{x(t)}= $\int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt$

La transformée de Laplace à plusieurs propriétés dont : la transformée de Laplace est bijective et donc on peut trouver son inverse, la variable de Laplace est linéaire, additive, on peut l'intégrer ou la dériver,….

3.2.2. Résolution d'un cas oscillateur masse et ressort par la transformée de Laplace

Pour résoudre une équation différentielle par la transformée de Laplace, il faut suivre les étapes qui suivent : 1. Appliquer la transformée de Laplace sur toute l'équation

2. Utilisées les différentes propriétés mentionnées au-dessus pour obtenir une équation algébrique
3. Remplacer les termes que l'on peut, par leurs conditions initiales
4. Essayer d'isoler d'un côté L{x(t)}
5. Décomposer de l'autre côté, en éléments simples
6. Utiliser la table des transformées inverses pour trouver la solution

Prenons l'exemple d'un oscillateur masse et ressort avec frein, sans forces extérieures avec ζ=1 (donc c=$2\sqrt{(km)}$), on a alors : x''(t)+2ωo x'(t)+ω²x(t)=0

Etape 1 : s^2*L{x} - s*x(0) - x'(0) + 2ωosL{x} - 2ωox(0) + ωo²L{x}=0

Etape 2 : s^2*L{x} + 2ωosL{x} + ωo²L{x}= s*x(0) + x'(0) + 2ωo*x(0)

Etape 3 : L{x} (s^2 + 2ωos + ωo²) = s*xo + vo + 2ωo*xo

Etape 4 : L{x} = (s*xo+ vo+ 2ωo*xo)/(s+ωo)²= (s*xo + vo + ωo*xo + ωo*xo)/ (s+ωo)²

L{x} = (s*xo + ωo*xo)/ (s+ωo)² + (vo + ωo*xo)/ (s+ωo)²

L{x} = xo/(s+ωo) + (wo*xo+vo)/ (s+ωo)²

Etape 5: x(t)= exp(-ωot)*(xo+(wo*xo+vo)t)

3.2.3. Résolution d'une équation différentielle avec Laplace sur Maple.

A l'aide de Maple, nous avons vérifié les solutions des équations différentielles des différents cas, trouvées par la méthode classique ou la transformée de Laplace. Voici la vérification de l'exemple précédent par Maple :

```
> restart, with(inttrans)
restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert,
    invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]
> laplace(f(t), t, s);
```

$$laplace(f(t), t, s)$$

```
> Avecfrottement := diff(x(t), t, t) + 2·wo·diff(x(t), t) + wo^2·x(t) = 0
```

$$Avecfrottement := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\, wo \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + wo^2 x(t) = 0$$

```
> Avecfrottement1 := laplace(Avecfrottement, t, s);
```

$$Avecfrottement1 := s^2\, laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\, x(0) + 2\, wo\, s\, laplace(x(t), t, s) - 2\, wo\, x(0) + wo^2\, laplace(x(t), t, s) = 0$$

```
> Avecfrottement12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, Avecfrottement1);
```

$$Avecfrottement12 := s^2\, laplace(x(t), t, s) - vo - s\, xo + 2\, wo\, s\, laplace(x(t), t, s) - 2\, wo\, xo + wo^2\, laplace(x(t), t, s) = 0$$

```
> Avecfrottement13 := solve(Avecfrottement12, laplace(x(t), t, s));
```

$$Avecfrottement13 := \frac{2\, wo\, xo + vo + s\, xo}{s^2 + 2\, wo\, s + wo^2}$$

```
> invlaplace(Avecfrottement13, s, t);
```

$$e^{-wo\, t} \left(t\, vo + xo\, (1 + wo\, t) \right)$$

3.3. Modélisation des oscillations avec frottements (sans frein)

3.3.1. Etude théorique

On reprend la solution de l'équation différentielle pour le cas d'un système masse-ressort horizontal avec forces de frottements λ F :

Nous choisirons dans la suite xo= $\frac{12F}{C}$,afin d'obtenir un graphique clair avec 3 maximums et 3 minimums, pour cela nous avons fait une étude afin de connaitre un intervalle pour xo.

$$\mathbf{1}\bullet\ si\ |C\cdot xo| < |F| \ \Rightarrow \textbf{\textit{le système s'arrête}}$$

$$\textbf{\textit{sinon}}\ |F| < |C\cdot xo| \Leftrightarrow \frac{F}{C} < xo < -\frac{F}{C}$$

$\mathbf{x' < 0}$:

$$x'(t) = -\left(xo - \frac{\lambda F}{C}\right)\cdot w\cdot sint(wt)$$

$$(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}) \Rightarrow x'(t) = -\left(xo - \frac{F}{C}\right)\cdot w\cdot \sin(wt)$$

$$x'(t) = 0 \Rightarrow wt = \pi\ soit\ t = \frac{T}{2}$$

$$x(t) = A\cdot\cos(wt) + \frac{\lambda F}{C},\quad avec\ A = xo - \frac{\lambda F}{C}$$

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = -xo + \frac{2F}{C}\ (c'est\ la\ nouvelle\ position\ xo\ du\ système)$$

$$\mathbf{2}\bullet\ si\ |C\cdot xo| < |F| \ \Rightarrow \textbf{\textit{le système s'arrête}}\ \left(xo = -xo + \frac{2F}{C}\right)$$

$$sinon\ |F| < |C\cdot xo| \Leftrightarrow \frac{F}{C} < xo < \frac{3F}{C}$$

$\mathbf{x' > 0\ ;\ \boldsymbol{\lambda} = -1:}$

$$x'(t) = -\left(-xo + \frac{2F}{C} + \frac{F}{C}\right)\cdot w\cdot\sin(wt) = -\left(-xo + \frac{3F}{C}\right)\cdot w\cdot\sin(wt)$$

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = xo - \frac{4F}{C}$$

On reprend la solution de l’équation différentielle pour le cas d’un système masse-ressort horizontal avec forces de frottements λ F :

$$> x(t) = \left(xo - \frac{\lambda F}{C}\right)\cos(wt) + \frac{\lambda F}{C}$$

1. $Posons : xo = \frac{12F}{C}\quad ;\ \lambda = 1$

$$x(t) = \frac{11F}{C}\cos(wt) + \frac{F}{C}$$

$$x'(t) = -\frac{11F}{C}\cdot w\sin(wt)$$

$$x'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 0\ ou\ t = \frac{T}{2}\ pour\ t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$$

t	0	$T/2$
x'	$-$	
x	$12F/C$ $\longrightarrow$	$-10F/C$

> 2. $xo = -\dfrac{10F}{C}$; $\lambda = -1$

$$x(t) = -\frac{9F}{C}\cos(wt) - \frac{F}{C}$$

$$x'(t) = \frac{9F}{C}\cdot w\sin(wt)$$

t	0	$T/2$
x'	$+$	
x	$-10F/C$ $\nearrow$	$8F/C$

Ainsi, à chaque fois on continue à remplacer xo par sa nouvelle valeur jusqu'à ce qu'on retrouve xo=0m donc on obtient |C*xo|=0 < |F|, d'où l'arrêt du système dans la zone d’équilibre.

Ces tableaux de variations nous ont permis de tracer à la main l'oscillation de x(m) en fonction de t(s), et avec Maple on a pu retrouver le même graphe.

3.3.2. Graphique sur Maple

> $restart : f := piecewise(t < Pi, 11\cos(t) + 1, t < 2Pi, -9\cos(t + Pi) - 1, t < 3Pi, 7\cos(t + 2Pi) + 1, t < 4Pi, -5\cos(t + 3Pi) - 1, t < 5Pi, 3\cos(t + 4Pi) + 1, t > 5Pi, -\cos(t + 5Pi) - 1);$

$$f := \begin{cases} 11\cos(t) + 1 & t < \pi \\ 9\cos(t) - 1 & t < 2\pi \\ 7\cos(t) + 1 & t < 3\pi \\ 5\cos(t) - 1 & t < 4\pi \\ 3\cos(t) + 1 & t < 5\pi \\ \cos(t) - 1 & 5\pi < t \end{cases}$$

> $P1 := plot(f, t = 0..6Pi, title = (Graphique\ représentant\ les\ oscillations\ avec\ force\ de\ frottement\ F = cte), titlefont = ["ROMAN", 20]);$

$$P1 := PLOT(...)$$

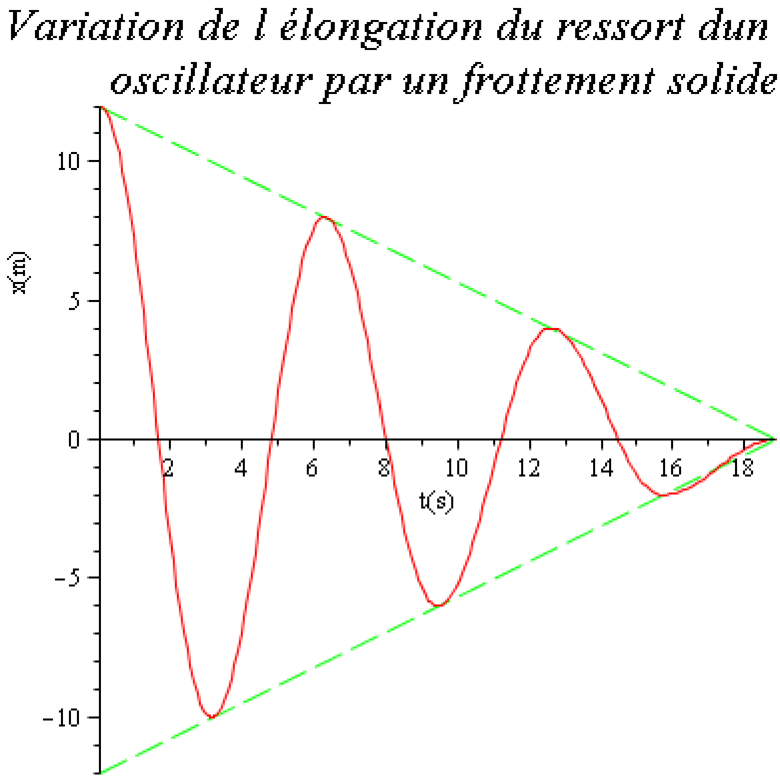
> $P2 := plot\left(-\dfrac{2}{Pi}\cdot t + 12, t = 0..6Pi\right);$

$$P2 := PLOT(...)$$

> $P3 := plot\left(\dfrac{2}{Pi}\cdot t - 12, t = 0..6Pi\right);$

$$P3 := PLOT(...)$$

> $with(plots) : display(\{P1, P2, P3\}, labels = ["t(s)", "x(m)"], labeldirections = ["horizontal", "vertical"]);$



Ce graphique représente des oscillations amorties dues aux forces de frottements. Nous pouvons constater que les frottements solides génèrent deux droites, une issue des maximums qui représente les élongations maximales et une issue des minimums qui représente les élongations minimales. A partir de l'instant t= 19s, le système s'arrête car il est dans la zone d'équilibre (c'est-à-dire quand $|C \cdot xo| < |F|$)

Tant que $|F| < |C \cdot xo|$, le mouvement continue. Les élongations maximales prennent successivement les valeurs : $x(0)$; $x(0) - \frac{4 \cdot F}{C}$; $x(0) - \frac{8 \cdot F}{C}$;...

Et les élongations minimales prennent successivement les valeurs : $-\left(x(0) - \frac{2 \cdot F}{C}\right)$; $-\left(x(0) - \frac{6 \cdot F}{C}\right)$;...

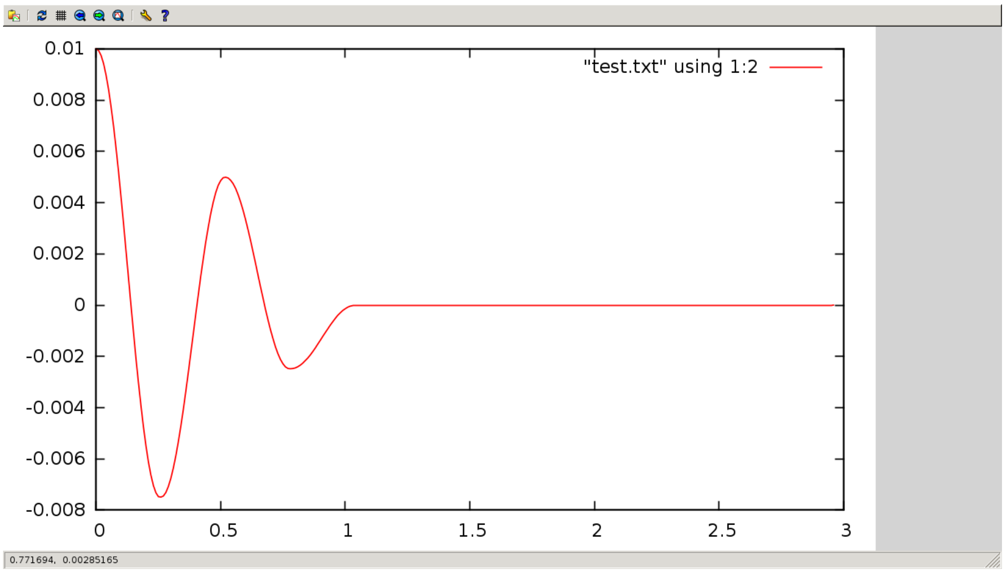
3.3.3 Etude et modélisation en Pascal

Le programme Pascal que nous avons réalisé consiste en la détermination à chaque instant de la position et de la vitesse du solide. L'accélération est calculée à partir des paramètres initiaux que l'on peut définir en début d'étude, tel que le coefficient de frottement, la constante de raideur du ressort, la masse, la position initiale et le pas. Ainsi on calcule la vitesse puis la position. A chaque demi-période, de nouvelles conditions initiales sont définies et le système est évalué pour savoir si l'étude continue. Le programme cesse de calculer les valeurs de vitesse et position lorsque l'équilibre est atteint, c'est-à-dire lorsque |C*Xo|<|F|. L'ensemble des valeurs stockées dans des tableaux est enregistrée dans un fichier texte que l'on peut utiliser par la suite.

Lors de la réalisation du programme en Pascal, l'enjeu principal était de réduire les approximations liées aux calculs faits par la machine. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta qui sur le principe d'itération. Ainsi, pour chaque instant t la vitesse et la position sont calculés grâce à 4 valeurs intermédiaires et ainsi avoir une valeur beaucoup plus précise.

En effet on a l'erreur $|E|<k*h^4$ avec h le pas. Lorsque l'on diminue le pas l'erreur tend très vite vers 0.

Grace à cette méthode, des résultats satisfaisants ont pu être observés lors du tracé des valeurs obtenues en utilisant Gnuplot.



Ici le graphique représente la position du solide en mètre en fonction du temps en seconde. Les paramètres initiaux choisis sont tels que Xo=8F/C. On constate bien un amortissement et un arrêt du mouvement après 2 périodes.

La détermination des paramètres permet de définir un système dont les valeurs portent une réalité physique. Le programme pascal conçue nous a permis d'avoir une vision approchée mais néanmoins précise et cohérentes des oscillations qui peuvent s'effectuées.

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce projet, nous avons pu étudier plus en détails les équations différentielles de différents système masse et ressort. Pour cela, nous avons dû revoir certaines notions mathématiques et en apprendre une nouvelle qui est la méthode de résolution par les transformées de Laplace. Grâce à ce projet nous avons donc pu apprendre ou améliorer nos connaissances sur l'utilisation de Maple et du langage Pascal.

Mais le projet nous a alors semblait plus mathématique que physique. En effet, nous nous attendions plus à réaliser des travaux pratiques sur différentes cas de systèmes masse et ressort, puis étudier les données trouvées au lieu de résoudre des équations différentielles et faire de la modélisation. Même si la physique restait présente en fond en permanence, nous avons fait la plupart du temps, la résolution de différentes équations différentielles ou la modélisation du cas étudié, ce qui nous a un peu perturbés.

Pour la résolution des équations avec la méthode de Laplace et la modélisation, l'aide du professeur Bernard Gleyse nous a été très utile, compte tenu des difficultés éprouvées notamment dans le programme Pascal qui s'est trouvé compliqué à élaborer.

En outre, nous avons vite réussi à nous répartir le travail. Au final, nous avons apprécié ce projet, par la bonne entente dans le groupe et la découverte de nouvelles connaissances. Le travail demandé a été difficile à finir, vu que nous étions que trois dans le groupe. Pour la perspective du projet, il serait bien de faire des études expérimentales sur les différents cas étudiés. Mais nous comprenons aussi qu’il est difficile de mettre en place une nouvelle étude expérimentale, c’est pourquoi nous avons pensé comme sujet de P6 : installer son propre tp d’un système masse et ressort, puis l’étudier.

5. BIBLIOGRAPHIE

ASHERMAN, JOUDI, MARKOVSKI, VANIER, ZRYOUL, « Résolution d'équations différentielles avec la transformée de Laplace » (projet de mathémathiques), 2012/2013.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_masse-ressort (valide à la date du 11 février 2013)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_harmonique (valide à la date du 11 février 2013)

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html#manip (valide à la date du 11 février 2013)

http://www.physagreg.fr/CoursTS/Physique/Cours/Physique-D-chap14-systeme_solide_ressort.pdf (valide à la date du 11 février 2013)

http://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/resum/14_osc_hor1.html (valide à la date du 14 février 2013)

http://fpassebon.pagesperso-orange.fr/oscillateur_mk.html (valide à la date du 14 février 2013)

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/harmores.html (valide à la date du 14 février 2013)

http://thierry.col2.free.fr/restreint/exovideo_lycee/resum/14_osc_hor2.html (valide à la date du 14 février 2013)

http://physiquecollege.free.fr/physique_chimie_college_lycee/lycee/terminale_TS/penduleHorizontal.htm (valide à la date du 14 février 2013)

http://www.chimix.com/an9/concours9/min91.htm (valide à la date du 14 février 2013)

http://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Acoustics/Forced_Oscillations_%28Simple_Spring-Mass_System%29 (valide à la date du 19 février 2013)

http://www.poly-prepas.com/images/files/Physique.%20Cours%20Oscillateurs%20M%C3%A9caniques.pdf (valide à la date du 19 février 2013)

http://www2.ulg.ac.be/mathgen/cours/meca/Ref/Oscillateurs.pdf (valide à la date du 8 avril 2013)

http://igm.univ-mlv.fr/~incerti/1213/M2SIS/M2-IMAC3-2012-MP.4.pdf (valide à la date du 8 avril 2013)

http://sesamp.fr/pro/Enseignements_files/MGM755_Cours%20de%20vibrations_SAMPER.pdf (valide à la date du 6 mai 2013)

http://www.seg.etsmtl.ca/math/TRLAPLAC.PDF (valide à la date du 6 mai 2013)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Application_de_la_transform%C3%A9e_de_Laplace_aux_%C3%A9quations_diff%C3%A9rentielles (valide à la date du 1 juin 2013)

6. ANNEXES

6.1. Résolution des équations des différents cas sur Maple (avec Laplace)

1) Resolution de l'equation diff sans frottement :

```
> restart : restart, with(inttrans)
```

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

```
> laplace(f(t), t, s);
```

$$laplace(f(t), t, s)$$

> SansFrottement := diff(x(t), t, t) + $\frac{k}{m}$ ·x(t) = 0;

$$SansFrottement := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + \frac{k x(t)}{m} = 0$$

```
> SansFrottement1 := laplace(SansFrottement, t, s);
```

$$SansFrottement1 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\,x(0) + \frac{k\,laplace(x(t), t, s)}{m} = 0$$

```
> SansFrottement2 := subs(D(x)(0) = 0, x(0) = xo, SansFrottement1);
```

$$SansFrottement2 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - s\,xo + \frac{k\,laplace(x(t), t, s)}{m} = 0$$

```
> SansFrottement3 := solve(SansFrottement2, laplace(x(t), t, s));
```

$$SansFrottement3 := \frac{s\,xo\,m}{s^2\,m + k}$$

```
> invlaplace(SansFrottement3, s, t);
```

$$xo\,\cosh\left(\frac{\sqrt{-m\,k}\;t}{m}\right)$$

2)Resolution de l'équation diff avec frottements:

```
> restart, with(inttrans)
```

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

```
> laplace(f(t), t, s);
```

$$laplace(f(t), t, s)$$

> SansFrottement := diff(x(t), t, t) + $\frac{k}{m}$ ·x(t) = λF;

$$SansFrottement := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + \frac{k x(t)}{m} = \lambda F$$

```
> SansFrottement1 := laplace(SansFrottement, t, s);
```

$$SansFrottement1 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\,x(0) + \frac{k\,laplace(x(t), t, s)}{m} = \frac{\lambda F}{s}$$

```
> SansFrottement2 := subs(D(x)(0) = 0, x(0) = xo, SansFrottement1);
```

$$SansFrottement2 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - s\,xo + \frac{k\,laplace(x(t), t, s)}{m} = \frac{\lambda F}{s}$$

```
> SansFrottement3 := solve(SansFrottement2, laplace(x(t), t, s));
```

$$SansFrottement3 := \frac{(\lambda F + s^2\,xo)\,m}{s\,(s^2\,m + k)}$$

> invlaplace(SansFrottement3, s, t);

$$\frac{m\,\lambda F}{k}+\frac{(xo\,k-m\,\lambda F)\cosh\left(\frac{\sqrt{-m\,k}\,t}{m}\right)}{k}$$

3)Resolution de l'équation diff avec frein:

> restart, with(inttrans)

restart, [*addtable*, *fourier*, *fouriercos*, *fouriersin*, *hankel*, *hilbert*, *invfourier*, *invhilbert*, *invlaplace*, *invmellin*, *laplace*, *mellin*, *savetable*]

> laplace(f(t), t, s);

$$laplace(f(t), t, s)$$

> AvecFrottement := diff(x(t), t, t) + 2·ς·wo·diff(x(t), t) + wo²·x(t) = 0;

$$AvecFrottement := \frac{d^2}{dt^2}x(t)+2\,\varsigma\,wo\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)+wo^2\,x(t)=0$$

> AvecFrottement1 := laplace(AvecFrottement, t, s);

$$AvecFrottement1 := s^2\,laplace(x(t), t, s)-\mathrm{D}(x)(0)-s\,x(0)+2\,\varsigma\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s\; -2\,\varsigma\,wo\,x(0)+wo^2\,laplace(x(t), t, s)=0$$

> AvecFrottement2 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, AvecFrottement1);

$$AvecFrottement2 := s^2\,laplace(x(t), t, s)-vo-s\,xo+2\,\varsigma\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s)-2\,\varsigma\,wo\,xo+wo^2\,laplace(x(t), t, s)=0$$

> AvecFrottement3 := solve(AvecFrottement2, laplace(x(t), t, s));

$$AvecFrottement3 := \frac{2\,\varsigma\,wo\,xo+vo+s\,xo}{s^2+2\,\varsigma\,wo\,s+wo^2}$$

> invlaplace(AvecFrottement3, s, t);

$$e^{-t\,\varsigma\,wo}\left(xo\cosh\left(t\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}\right)+\frac{(\varsigma\,wo\,xo+vo)\sinh\left(t\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}\right)}{\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}}\right)$$

Cas où $\varsigma = 0$:

> $sol := subs\left(\varsigma=0, e^{-t\,\varsigma\,wo}\left(xo\cosh\left(t\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}\right)+\frac{(\varsigma\,wo\,xo+vo)\sinh\left(t\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}\right)}{\sqrt{(\varsigma^2-1)\,wo^2}}\right)\right);$

$$sol := e^0\left(xo\cosh\left(t\sqrt{-wo^2}\right)+\frac{vo\sinh\left(t\sqrt{-wo^2}\right)}{\sqrt{-wo^2}}\right)$$

> *simplify*(*sol*);

$$\frac{xo\cosh\left(t\sqrt{-wo^2}\right)\sqrt{-wo^2}+vo\sinh\left(t\sqrt{-wo^2}\right)}{\sqrt{-wo^2}}$$

Cas où $\varsigma = 1$:

> restart, with(inttrans)

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> laplace(f(t), t, s);

$$laplace(f(t), t, s)$$

> Avecfrottement := diff(x(t), t, t) + 2·wo·diff(x(t), t) + wo^2·x(t) = 0

$$Avecfrottement := \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\,wo\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + wo^2\,x(t) = 0$$

> Avecfrottement1 := laplace(Avecfrottement, t, s);

$$Avecfrottement1 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\,x(0) + 2\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,wo\,x(0) + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = 0$$

> Avecfrottement12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, Avecfrottement1);

$$Avecfrottement12 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - vo - s\,xo + 2\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,wo\,xo + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = 0$$

> Avecfrottement13 := solve(Avecfrottement12, laplace(x(t), t, s));

$$Avecfrottement13 := \frac{2\,wo\,xo + vo + s\,xo}{s^2 + 2\,wo\,s + wo^2}$$

> invlaplace(Avecfrottement13, s, t);

$$e^{-wo\,t}\,(t\,vo + xo\,(1 + wo\,t))$$

Cas où $\varsigma > 1$:

> restart, with(inttrans)

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> laplace(f(t), t, s);

$$laplace(f(t), t, s)$$

> Avecfrottement := (z2 − z1)·diff(x(t), t, t) + (z1^2 − z2^2)·diff(x(t), t) + (z1·z2^2 − z1^2·z2)x(t) = 0

$$Avecfrottement := (z2 - z1)\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + (z1^2 - z2^2)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + (z1\,z2^2 - z1^2\,z2)\,x(t) = 0$$

> Avecfrottement1 := laplace(Avecfrottement, t, s);

$$Avecfrottement1 := (-z2 + z1)\,(-x(0)\,z1 + D(x)(0) + s\,x(0) - x(0)\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t), t, s) - z1\,s^2\,laplace(x(t), t, s) + z1^2\,s\,laplace(x(t), t, s) - z2^2\,s\,laplace(x(t), t, s) + laplace(x(t), t, s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t), t, s)\,z1^2\,z2 = 0$$

> Avecfrottement12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, Avecfrottement1);

$$Avecfrottement12 := (-z2 + z1)\,(-xo\,z1 + vo + s\,xo - xo\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t), t, s) - z1\,s^2\,laplace(x(t), t, s) + z1^2\,s\,laplace(x(t), t, s) - z2^2\,s\,laplace(x(t), t, s) + laplace(x(t), t, s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t), t, s)\,z1^2\,z2 = 0$$

> Avecfrottement13 := solve(Avecfrottement12, laplace(x(t), t, s));

$$Avecfrottement13 := \frac{-xo\,z1 + vo + s\,xo - xo\,z2}{-z1\,s + z1\,z2 + s^2 - z2\,s}$$

> invlaplace(Avecfrottement13, s, t);

$$\frac{e^{z1\,t}\,(vo - xo\,z2) + (xo\,z1 - vo)\,e^{z2\,t}}{-z2 + z1}$$

Frein avec Fonction Echelon :

> restart, with(inttrans)

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> laplace(f(t), t, s);

$$laplace(f(t), t, s)$$

> AvecFrottement := diff(x(t), t, t) + 2·ς·wo·diff(x(t), t) + wo^2·x(t) = Heaviside(t);

$$AvecFrottement := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 2\,\varsigma\,wo\left(\frac{d}{dt}\,x(t)\right) + wo^2\,x(t) = \mathrm{Heaviside}(t)$$

> AvecFrottement1 := laplace(AvecFrottement, t, s);

$$AvecFrottement1 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - \mathrm{D}(x)(0) - s\,x(0) + 2\,\varsigma\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,\varsigma\,wo\,x(0) + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{1}{s}$$

> AvecFrottement2 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, AvecFrottement1);

$$AvecFrottement2 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - vo - s\,xo + 2\,\varsigma\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,\varsigma\,wo\,xo + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{1}{s}$$

> AvecFrottement3 := solve(AvecFrottement2, laplace(x(t), t, s));

$$AvecFrottement3 := \frac{1 + 2\,\varsigma\,wo\,xo\,s + vo\,s + s^2\,xo}{s\,(s^2 + 2\,\varsigma\,wo\,s + wo^2)}$$

> invlaplace(AvecFrottement3, s, t);

$$\frac{\sinh\left(t\sqrt{(\varsigma^2 - 1)\,wo^2}\right)e^{-t\,\varsigma\,wo}\,(-\varsigma + \varsigma\,wo^2\,xo + vo\,wo)}{\sqrt{(\varsigma^2 - 1)\,wo^2}\;wo} + \frac{1 + (-1 + wo^2\,xo)\cosh\left(t\sqrt{(\varsigma^2 - 1)\,wo^2}\right)e^{-t\,\varsigma\,wo}}{wo^2}$$

Cas où $\varsigma = \mathbf{1}$:

```
> restart
> with(inttrans)
```

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*]

```
> laplace(f(t), t, s);
```

$$laplace(f(t), t, s)$$

```
> AvecfronttementFonctionContinue := diff(x(t), t, t) + 2 wo diff(x(t), t) + wo^2 x(t)
      = Heaviside(t)
```

$$AvecfronttementFonctionContinue := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 2\,wo\left(\frac{d}{dt}\,x(t)\right) + wo^2\,x(t) = \mathrm{Heaviside}(t)$$

```
> AvecfronttementFonctionContinue1 := laplace(AvecfronttementFonctionContinue, t, s);
```

$$AvecfronttementFonctionContinue1 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - \mathrm{D}(x)(0) - s\,x(0) + 2\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,wo\,x(0) + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{1}{s}$$

```
> AvecfronttementFonctionContinue12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo,
      AvecfronttementFonctionContinue1);
```

$$AvecfronttementFonctionContinue12 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - vo - s\,xo + 2\,wo\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,wo\,xo + wo^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{1}{s}$$

```
> AvecfronttementFonctionContinue13 := solve(AvecfronttementFonctionContinue12,
      laplace(x(t), t, s));
```

$$AvecfronttementFonctionContinue13 := \frac{1 + 2\,wo\,xo\,s + vo\,s + s^2\,xo}{s\left(s^2 + 2\,wo\,s + wo^2\right)}$$

```
> invlaplace(AvecfronttementFonctionContinue13, s, t);
```

$$\frac{1 + \left(-wo\,t + wo^3\,t\,xo + wo^2\,t\,vo - 1 + wo^2\,xo\right)\mathrm{e}^{-wo\,t}}{wo^2}$$

Cas où $\varsigma > 1$:

```
> restart, with(inttrans)
```

restart, [*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*]

```
> laplace(f(t), t, s);
```

$$laplace(f(t), t, s)$$

```
> Avecfrottement := (z2 - z1)·diff(x(t), t, t) + (z1^2 - z2^2)·diff(x(t), t) + (z1·z2^2 - z1^2
      ·z2)x(t) = Heaviside(t);
```

$$Avecfrottement := (z2 - z1)\left(\frac{d^2}{dt^2}\,x(t)\right) + \left(z1^2 - z2^2\right)\left(\frac{d}{dt}\,x(t)\right) + \left(z1\,z2^2 - z1^2\,z2\right)x(t) = \mathrm{Heaviside}(t)$$

```
> Avecfrottement1 := laplace(Avecfrottement, t, s);
```

$$Avecfrottement1 := (-z2+z1)\,(-x(0)\,z1 + \mathrm{D}(x)(0) + s\,x(0) - x(0)\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t),t,s) - z1\,s^2\,laplace(x(t),t,s) + z1^2\,s\,laplace(x(t),t,s) - z2^2\,s\,laplace(x(t),t,s) + laplace(x(t),t,s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t),t,s)\,z1^2\,z2 = \frac{1}{s}$$

> Avecfrottement12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, Avecfrottement1);

$$Avecfrottement12 := (-z2+z1)\,(-xo\,z1 + vo + s\,xo - xo\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t),t,s) - z1\,s^2\,laplace(x(t),t,s) + z1^2\,s\,laplace(x(t),t,s) - z2^2\,s\,laplace(x(t),t,s) + laplace(x(t),t,s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t),t,s)\,z1^2\,z2 = \frac{1}{s}$$

> Avecfrottement13 := solve(Avecfrottement12, laplace(x(t), t, s));

$$Avecfrottement13 := \frac{-1 - s\,z2\,vo - z2\,s^2\,xo + s\,xo\,z2^2 - s\,xo\,z1^2 + s\,z1\,vo + z1\,s^2\,xo}{s\,(-z2\,s^2 + z1\,s^2 - z1^2\,s + z2^2\,s - z1\,z2^2 + z1^2\,z2)}$$

> invlaplace(Avecfrottement13, s, t);

$$\frac{1}{(-z2+z1)^2\,z1\,z2}\Big(z2\,\big(1 + (-1 - z1\,z2\,vo - xo\,z1^2\,z2 + xo\,z1\,z2^2 + z1^2\,vo)\,e^{z1\,t}\big) + \big(-1 + (1 + z2^2\,vo + xo\,z1^2\,z2 - z1\,z2\,vo - xo\,z1\,z2^2)\,e^{z2\,t}\big)\,z1\Big)$$

Cas où $\varsigma = 0$:

> restart

> with(inttrans)

[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> laplace(f(t), t, s);

$$laplace(f(t),t,s)$$

> AvecfronttementFonctionContinue := diff(x(t), t, t) + wo^2x(t) = Heaviside(t)

$$AvecfronttementFonctionContinue := \frac{d^2}{dt^2}x(t) + wo^2\,x(t) = \mathrm{Heaviside}(t)$$

> AvecfronttementFonctionContinue1 := laplace(AvecfronttementFonctionContinue, t, s);

$$AvecfronttementFonctionContinue1 := s^2\,laplace(x(t),t,s) - \mathrm{D}(x)(0) - s\,x(0) + wo^2\,laplace(x(t),t,s) = \frac{1}{s}$$

> AvecfronttementFonctionContinue12 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, AvecfronttementFonctionContinue1);

$$AvecfronttementFonctionContinue12 := s^2\,laplace(x(t),t,s) - vo - s\,xo + wo^2\,laplace(x(t),t,s) = \frac{1}{s}$$

> AvecfronttementFonctionContinue13 := solve(AvecfronttementFonctionContinue12, laplace(x(t), t, s));

$$AvecfronttementFonctionContinue13 := \frac{1 + vo\,s + s^2\,xo}{s\,(s^2 + wo^2)}$$

> invlaplace(AvecfronttementFonctionContinue13, s, t);

$$\frac{vo\sin(wo\,t)}{wo} + \frac{1 + (xo\,wo^2 - 1)\cos(wo\,t)}{wo^2}$$

Frein avec force extérieure $F(t) = Fosin(wot)$:

Cas où $\varsigma = 0$:

> restart, with(inttrans)

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> $EQ1 := diff(x(t), t, t) + \omega o^2 \cdot x(t) = Fo \cdot \sin(\omega o \cdot t)$

$$EQ1 := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + \omega o^2\,x(t) = Fo\sin(\omega o\,t)$$

> $EQ := laplace(EQ1, t, s);$

$$EQ := s^2\,laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\,x(0) + \omega o^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{Fo\,\omega o}{s^2 + \omega o^2}$$

> $EQ2 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, EQ);$

$$EQ2 := s^2\,laplace(x(t), t, s) - vo - s\,xo + \omega o^2\,laplace(x(t), t, s) = \frac{Fo\,\omega o}{s^2 + \omega o^2}$$

> $EQ3 := solve(EQ2, laplace(x(t), t, s));$

$$EQ3 := \frac{Fo\,\omega o + vo\,s^2 + vo\,\omega o^2 + s^3\,xo + s\,xo\,\omega o^2}{(s^2 + \omega o^2)^2}$$

> $invlaplace(EQ3, s, t);$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\cos(\omega o\,t)\,(-2\,xo\,\omega o + Fo\,t)}{\omega o} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\omega o\,t)\,(2\,vo\,\omega o + Fo)}{\omega o^2}$$

Cas où $\varsigma = \mathbf{1}$ **:**

> restart, with(inttrans)

restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]

> $EQ1 := diff(x(t), t, t) + 2 \cdot \omega o \cdot diff(x(t), t) + \omega o^2 \cdot x(t) = Fo \cdot \sin(\omega o \cdot t)$

$$EQ1 := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 2\,\omega o\left(\frac{d}{dt}\,x(t)\right) + \omega o^2\,x(t) = Fo\sin(\omega o\,t)$$

> $EQ := laplace(EQ1, t, s);$

$$EQ := s^2\,laplace(x(t), t, s) - D(x)(0) - s\,x(0) + 2\,\omega o\,s\,laplace(x(t), t, s) - 2\,\omega o\,x(0)$$

$$+\omega o^2\, laplace(x(t),t,s) = \frac{Fo\,\omega o}{s^2+\omega o^2}$$

> $EQ2 := subs(D(x)(0) = vo,\ x(0) = xo,\ EQ);$

$$EQ2 := s^2\, laplace(x(t),t,s) - vo - s\,xo + 2\,\omega o\, s\, laplace(x(t),t,s) - 2\,xo\,\omega o + \omega o^2\, laplace(x(t),t,s) = \frac{Fo\,\omega o}{s^2+\omega o^2}$$

> $EQ3 := solve(EQ2, laplace(x(t),t,s));$

$$EQ3 := \frac{Fo\,\omega o + 2\,xo\,\omega o\, s^2 + 2\,xo\,\omega o^3 + vo\, s^2 + vo\,\omega o^2 + s^3\, xo + s\,xo\,\omega o^2}{(s^2+\omega o^2)\,(s^2+2\,\omega o\, s+\omega o^2)}$$

> $invlaplace(EQ3, s, t);$

$$\frac{1}{2}\,\frac{-Fo\cos(\omega o\, t) + \left(Fo\, t\,\omega o + 2\,\omega o^3\, t\, xo + 2\,\omega o^2\, t\, vo + Fo + 2\,xo\,\omega o^2\right) e^{-\omega o\, t}}{\omega o^2}$$

Cas où $\varsigma < 1$:

> $restart, with(inttrans)$

$restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$

> $EQ1 := diff(x(t),t,t) + 2\cdot\zeta\cdot\omega o\cdot diff(x(t),t) + \omega o^2\cdot x(t) = Fo\cdot\sin(\omega o\cdot t)$

$$EQ1 := \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\,\zeta\,\omega o\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \omega o^2\, x(t) = Fo\sin(\omega o\, t)$$

> $EQ := laplace(EQ1, t, s);$

$$EQ := s^2\, laplace(x(t),t,s) - D(x)(0) - s\,x(0) + 2\,\zeta\,\omega o\, s\, laplace(x(t),t,s) - 2\,\zeta\,\omega o\, x(0) + \omega o^2\, laplace(x(t),t,s) = \frac{Fo\,\omega o}{s^2+\omega o^2}$$

> $EQ3 := solve(EQ2, laplace(x(t),t,s));$

$$EQ3 := \frac{Fo\,\omega o + 2\,\zeta\,\omega o\, xo\, s^2 + 2\,\zeta\,\omega o^3\, xo + vo\, s^2 + vo\,\omega o^2 + s^3\, xo + s\,xo\,\omega o^2}{(s^2+\omega o^2)\,(s^2+2\,\zeta\,\omega o\, s+\omega o^2)}$$

> $invlaplace(EQ3, s, t);$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sinh\left(t\sqrt{\omega o^2(\zeta^2-1)}\right) e^{-t\,\zeta\,\omega o}\left(2\,xo\,\zeta\,\omega o^2 + Fo + 2\,vo\,\omega o\right)}{\sqrt{\omega o^2(\zeta^2-1)}\;\omega o} + \frac{1}{2}\,\frac{-Fo\cos(\omega o\, t) + \left(2\,xo\,\zeta\,\omega o^2 + Fo\right)\cosh\left(t\sqrt{\omega o^2(\zeta^2-1)}\right) e^{-t\,\zeta\,\omega o}}{\omega o^2\,\zeta}$$

Cas où $\varsigma > 1$:

> $restart, with(inttrans)$

$restart, [addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$

> $EQ1 := (z2 - z1)\cdot diff(x(t), t, t) + (z1^2 - z2^2)\cdot diff(x(t), t) + (z1\cdot z2^2 - z1^2\cdot z2)\cdot x(t) = Fo\cdot \sin(\omega o\cdot t)$

$$EQ1 := (z2 - z1)\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + (z1^2 - z2^2)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + (z1\,z2^2 - z1^2\,z2)\,x(t) = Fo\sin(\omega o\,t)$$

> $EQ := laplace(EQ1, t, s);$

$$EQ := (-z2 + z1)\,(-x(0)\,z1 + D(x)(0) + s\,x(0) - x(0)\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t), t, s) - z1\,s^2\,laplace(x(t), t, s) + z1^2\,s\,laplace(x(t), t, s) - z2^2\,s\,laplace(x(t), t, s) + laplace(x(t), t, s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t), t, s)\,z1^2\,z2 = \frac{Fo\,\omega o}{s^2 + \omega o^2}$$

> $EQ2 := subs(D(x)(0) = vo, x(0) = xo, EQ);$

$$EQ2 := (-z2 + z1)\,(-xo\,z1 + vo + s\,xo - xo\,z2) + z2\,s^2\,laplace(x(t), t, s) - z1\,s^2\,laplace(x(t), t, s) + z1^2\,s\,laplace(x(t), t, s) - z2^2\,s\,laplace(x(t), t, s) + laplace(x(t), t, s)\,z1\,z2^2 - laplace(x(t), t, s)\,z1^2\,z2 = \frac{Fo\,\omega o}{s^2 + \omega o^2}$$

> $EQ3 := solve(EQ2, laplace(x(t), t, s));$

$$EQ3 := -\left(Fo\,\omega o + z2\,vo\,s^2 + z2\,vo\,\omega o^2 + z2\,s^3\,xo + z2\,s\,xo\,\omega o^2 - xo\,z2^2\,s^2 - xo\,z2^2\,\omega o^2 + xo\,z1^2\,s^2 + xo\,z1^2\,\omega o^2 - z1\,vo\,s^2 - z1\,vo\,\omega o^2 - z1\,s^3\,xo - z1\,s\,xo\,\omega o^2\right) \Big/ \left((s^2 + \omega o^2)\,(-z2\,s^2 + z1\,s^2 - z1^2\,s + z2^2\,s - z1\,z2^2 + z1^2\,z2)\right)$$

> $invlaplace(EQ3, s, t);$

$$\frac{(-vo + xo\,z1)\,e^{z2\,t}}{-z2 + z1} + \frac{1}{(z1^2 + \omega o^2)\,(z2^2 + \omega o^2)\,(-z2 + z1)^2}\Big(\big(-Fo\,\omega o - z2\,vo\,z1^2 - z2\,xo\,z1\,\omega o^2 - z2\,vo\,\omega o^2 - z2\,z1^3\,xo + xo\,z2^2\,\omega o^2 + xo\,z2^2\,z1^2 + z1^3\,vo + z1\,vo\,\omega o^2\big)\,(z2^2 + \omega o^2)\,e^{z1\,t} + Fo\big(e^{z2\,t}\,\omega o\,(z1^2 + \omega o^2) + \big(-\omega o\,(z1 + z2)\cos(\omega o\,t) + (\omega o^2 - z1\,z2)\sin(\omega o\,t)\big)\,(-z2 + z1)\big)\Big)$$

6.2. Exemples de résolution des équations des différents cas sur Maple sans Laplace :

1) Resolution de l'equation diff sans frottement :

> restart : a := diff(x(t), t, t) + $\frac{k}{m}$·x(t) = 0; c := dsolve({a, x(0) = xo, D(x)(0) = 0}, x(t));

$$a := \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k\,x(t)}{m} = 0$$

$$c := x(t) = xo\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)$$

2)Resolution de l'équation diff avec frottements:

> restart : a := diff(x(t), t, t) + $\frac{k}{m}$·x(t) = $\frac{\lambda F}{m}$; c := dsolve({a, x(0) = xo, D(x)(0) = 0}, x(t));

$$a := \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{k\,x(t)}{m} = \frac{\lambda F}{m}$$

$$c := x(t) = \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m}}\right)(xo\,k - \lambda F)}{k} + \frac{\lambda F}{k}$$

6.3. Modélisation en Pascal

```
program oscillateur;

uses sysutils;
type tab=array[1..1000] of real;
var      lambda , i: integer;
         h ,T, Tmax, Xo, k, fro , masse : real ;
         tabx , tabv , tabt : tab;
         fichier : text;


         function f( xn, fro , masse , k : real ; lambda : integer) : real ;

                  BEGIN
                           f:=(lambda*fro-k*xn)/masse ;          {calcul de l'accélération grace à la position}
                  END;


         procedure RK1D (h : real ; var tabx , tabv : tab);
                                                        { calcul de la position et de la vitesse à
                                                        l'instant t+1 grace à la méthode de Runge Kutta}

         var k1, k2, k3, k4, L1, L2, L3, L4 : real;

         Begin
                  k1:=h*tabv[i];
                  L1:= h*f(tabx[i],   fro , masse , k , lambda);
```

```
            k2:=h*(tabv[i]+L1/2);
            L2:=h*f(tabx[i]+k1/2, fro , masse , k , lambda);
            k3:=h*(tabv[i]+L2/2);
            L3:= h*f(tabx[i]+k2/2, fro , masse , k , lambda);
            k4:=h*(tabv[i]+L3);
            L4:= h*f(tabx[i]+k3,fro , masse , k , lambda);

            tabx[i+1] := tabx[i] +( k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
            tabv[i+1] := tabv[i] +( L1 + 2*L2 + 2*L3 + L4)/6;

        End;

Begin
        Tmax:=0;
        assign(fichier,'test.txt');
        rewrite(fichier);
        For i:=1 to 1000 do
            Begin
                tabx[i]:=0;
                tabv[i]:=0;
                tabt[i]:=0;
            End;

  writeln('Entrer la masse du systeme (en kilogramme)');      {Définition des paramètres initiaux}
        readln(masse);
        writeln('Entrer le coefficient de frottement solide');
        readln(fro);
        writeln('Entrer la constante de raideur du ressort rappel du ressort');
        readln(k);
        writeln('Entrer la position initiale');
        readln(tabx[1]);
        writeln('Entrer le pas (en seconde)');
        readln(h);


        T:=2*pi*sqrt(masse/k);
        If tabx[1]<0 then lambda:=-1
            else lambda:=1;
        Xo:=tabx[1];


        For i:=1 to 300 do
            Begin
                writeln(i);
                If fro*fro<(k*Xo)*(k*Xo) then          {Ecriture de la position et vitesse si la
                                                force de rappel est supérieur au frottements}
                Begin

                    RK1D(h, tabx , tabv);
                    writeln(fichier,tabt[i]:4:5,'_',tabx[i]:4:5, '_',tabv[i]:4:5 );
                    tabt[i+1]:=tabt[i]+h;
                    Tmax:=Tmax+h;
                    If Tmax>T/2  then
                    Begin
                        lambda:=-lambda;
                        Tmax:=0;
                        tabv[i+1]:=0;
                        Xo:=tabx[i];
                    End;
                End

                else                            {Arret du calcul si frottement supérieur
                                                      à la force de rappel du ressort}
                Begin
                    tabx[i+1]:=tabx[i];
```

```
                    tabv[i+1]:=tabv[i];
                    tabt[i+1]:=tabt[i]+h;
                    writeln(fichier,tabt[i],'        ',tabx[i], '',tabv[i] );
               End;
          End;

End.
```

6.4. Propositions de sujets de projets

Nous avons envisagé d’autres cas à étudier de systèmes de masse et ressort. En effet, nous avons pensé à un ressort de chaque côté de la masse ou un système dans un fluide. Nous aurions pu aussi faire une étude avec différentes masses ou encore travailler sur l’aspect énergétique des systèmes.