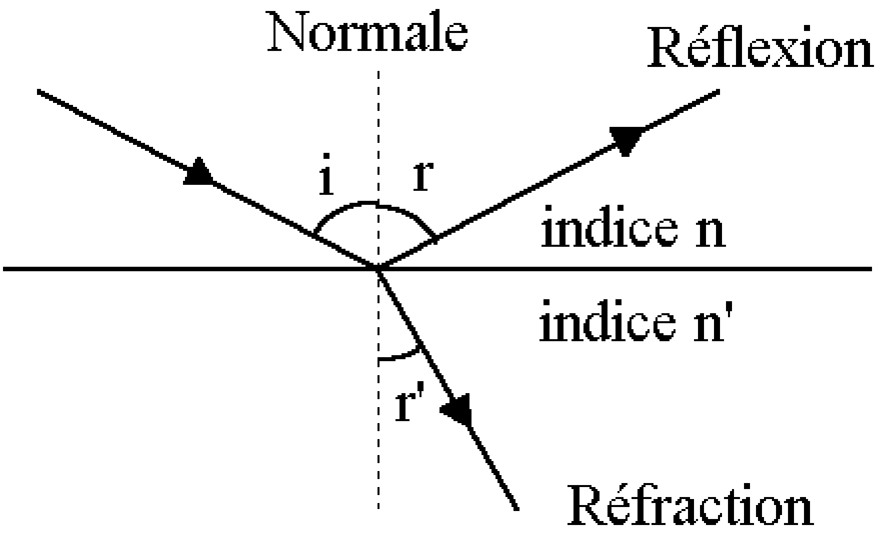
Réflexion et réfraction de la lumière : Coefficients de Fresnel.

I- Etude théorique : Démonstration des coefficients de Fresnel.

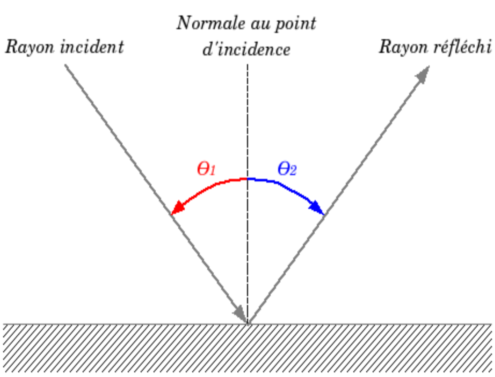
1) Rappels : Phénomènes de réflexion et de réfraction, lois de Descartes

On considère une onde monochromatique plane qui tombe sur un dioptre plan séparant deux milieux diélectriques d'indice respectifs n1 et n2. L'onde incidente se décompose en 2 ondes de même pulsation, une onde réfléchie et une onde transmise (ou réfractée). Les lois de Descartes nous renseignent sur la direction de propagation de ces ondes.



La première loi de Descartes nous apprend que l'onde incidente, réfléchie et réfractée sont dans le même plan.

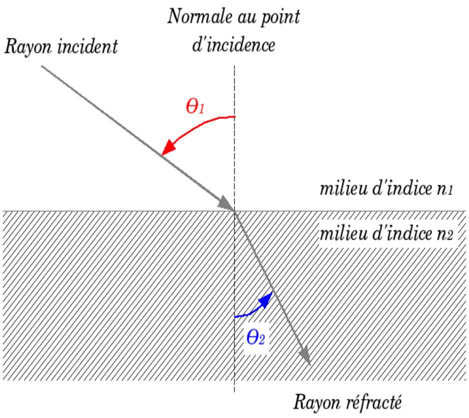
a) Réflexion



Loi de Descartes pour la réflexion :

$$\theta_2 = - \theta_1$$

b) Réfraction



$$\mathbf{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

Si n1<n2 la loi est vraie pour tout angle incident.
Si n1>n2 , la loi n'est vérifiée que pour les angles d'incidence inférieurs à l'angle limite défini par $\sin\theta_1 = n2 / n1$

Au delà de cette limite, pas de réfraction, uniquement réfléxion.

2)Démonstration formules de Fresnel

On considère que la source impose à l'onde incidente :

- la pulsation ω
- la direction de propagation définie par l'angle i
- l'amplitude caractérisée par le module $\underline{E_{\mathrm{im}}}$

On a $\vec{E}_i = \vec{E}_{\mathrm{im}} \exp(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

La théorie électromagnétique fournit les équations de passage d'un milieu à un autre, pour le champ magnétique et le champ électrique d'une onde lumineuse.
A la surface entre les 2 milieux, on a continuité de la composante tangentielle du champ électrique et continuité de la composante normale du champ magnétique.

Ces relations se traduisent mathématiquement par les équations suivantes :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_{\mathrm{im}} + \vec{E}_{\mathrm{rm}} - \vec{E}_{\mathrm{tm}}) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{12} . (\vec{B}_{\mathrm{im}} + \vec{B}_{\mathrm{rm}} - \vec{B}_{\mathrm{tm}}) = 0$$

Pour la démonstration nous devons aussi utiliser les équations portant sur l'induction électrique et l'excitation magnétique.

Rappelons que l'induction électrique $\vec{D}$ correspond à la densité de flux électrique et s'exprime en Coulomb par m².

Dans les milieux linéaires on a :
$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P}$ *où ϵ est la permittivité du milieu ,et $\vec{P}$* le *vecteur de polarisation du milieu.*

La permittivité du milieu décrit la réaction de ce milieu quand on lui applique un champ électrique.

Le vecteur de polarisation du milieu représente le fait que les molécules du milieu se « transforment » en dipoles électriques (=se polarisent) sous l'action du champ électrique.

Et $\vec{H}$ est l'excitation magnétique. C'est un vecteur défini à partir du champ magnétique, par la relation suivante :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M} \quad \text{où } \vec{M} \text{ est l'aimentation du milieu , et } \mu \text{ la perméabilité magnétique du milieu.}$$

La perméabilité caractérise la capacité d'un milieu à modifier un champ magnétique.

On a comme propriétés :

- Saut de la composante tangentielle de $\vec{H}$.

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_{\text{im}} + \vec{H}_{\text{rm}} - \vec{H}_{\text{tm}}) = \vec{J}_{\text{ls}}$$
où J_{ls} est la densité superficielle de courant libre

- Saut de la composante normale de $\vec{D}$

$$\vec{n}_{12} . (\vec{D}_{\text{im}} + \vec{D}_{\text{rm}} - \vec{D}_{\text{tm}}) = \rho_{ls}$$
où ρ_{ls} est la densité superficielle de charge libre.

Dans notre cas , les densités de courant libre et de charge libre sont nulles.

On a donc
$$\vec{n}_{12} . (\vec{D}_{\text{im}} + \vec{D}_{\text{rm}} - \vec{D}_{\text{tm}}) = 0$$
$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_{\text{im}} + \vec{H}_{\text{rm}} - \vec{H}_{\text{tm}}) = \vec{0}$$

Pour un milieu isotrope non magnétique on a : $n = \sqrt{\epsilon}$

Donc on peut écrire à partir des égalités précédentes, si on suppose $\vec{M}$ *et* $\vec{P}$ nuls :
$$\vec{n}_{12} . (n_1^2 (\vec{E}_{\text{im}} + \vec{E}_{\text{rm}}) - n_2^2 \vec{E}_{\text{tm}}) = 0$$

et comme $\vec{H}$ est colinéaire à $\vec{B}$, on a $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_{\text{im}} + \vec{B}_{\text{rm}} - \vec{B}_{\text{tm}}) = \vec{0}$

Enfin on peut exprimer pour chaque composante de $\vec{B}$, la relation liant le champ électrique et le champ magnétique:

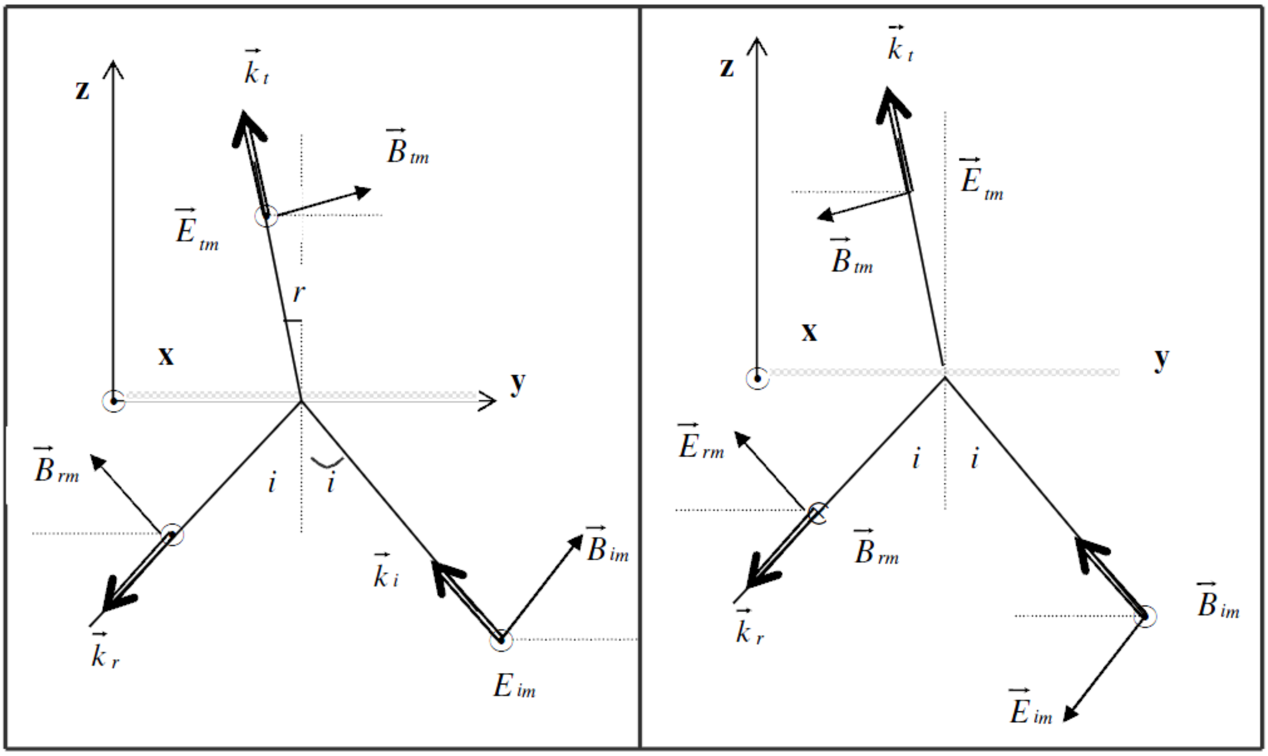
$$\vec{B}_{\text{im}} = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{\text{im}}}{\omega} \qquad \vec{B}_{\text{rm}} = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{\text{rm}}}{\omega} \qquad \vec{B}_{\text{tm}} = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{\text{tm}}}{\omega}$$

On a 7 équations et 5 inconnues. On va pouvoir résoudre les systèmes.

II- Formules de Fresnel.

On introduit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, r et t:

$$r = \frac{E_{\text{rm}}}{E_{\text{im}}} \qquad t = \frac{E_{\text{rm}}}{E_{\text{tm}}}$$



Onde polarisée perpendiculaire au plan d'incidece Onde polarisé parallèle au plan d'incidence

a) Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence

Polarisation perpendiculaire au plan d'incidence ==> $\vec{E}_{\text{im}} = E_{\text{im}} \vec{e}_x$

On applique les équations de continuité en adoptant les orientations de la figure ci dessus.

(1) En projetant sur Ox :

$$E_{\text{im}}+E_{\text{rm}}-E_{\text{tm}} \quad \rightarrow \quad 1+r=t$$

(2) En projetant sur Oy: $(B_{\text{im}}-B_{\text{rm}})\cos\theta_i - B_{\text{tm}}\cos\theta_t=0$

Les relations de rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique de l'onde plane donnent:

$$(1-r)n_1\cos\theta_i - t\,n_2\cos\theta_t=0$$

On en déduit : $r=\dfrac{(n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t)}{(n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t)}$ $\quad et \quad$ $t=\dfrac{(2\sin\theta_t\cos\theta_t)}{(n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t)}$

-

b) Onde incidente polarisée dans le plan d'incidence.

En projetant sur les axes on a :

Suivant Ox: $B_{\text{im}}+B_{\text{rm}}-B_{\text{tm}}=0$

Avec la relation du rapport des amplitudes des champs électriques et magnétiques, cette équation donne :

$$n_1(1-r)-n_2 t=0 \qquad (1)$$

Selon Oy :

$$\begin{aligned} &-(E_{\text{im}}+E_{\text{rm}})\cos\theta_i+E_{\text{tm}}\cos\theta_t=0\\ &-(E_{\text{im}}+r\,E_{\text{im}})\cos\theta_i+t\,E_{\text{im}}\cos\theta_t=0\\ &-(1+r)\cos\theta_i - t\cos\theta_t=0 \qquad (2)\end{aligned}$$

A partir de (1) et (2) on trouve : $r=\dfrac{n_1\cos\theta_t - n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}$ $\quad et\, t=\dfrac{2\mathrm{n}_{1\cos}\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}$

Comme $n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_t$ $\quad on\, a \quad$ $n_1=n_2\dfrac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}$

Donc $r=\dfrac{n_2\sin\theta_t\cos\theta_t - n_2\sin\theta_i\cos\theta_i}{n_2\sin\theta_t\cos\theta_t+n_2\sin\theta_i\cos\theta_i} = \dfrac{\tan(\theta_t-\theta_i)}{\tan(\theta_t+\theta_i)}$

et $t=\dfrac{2\,n_2\sin\theta_t\cos\theta_i}{n_2\sin\theta_t\cos\theta_t+n_2\sin\theta_i\cos\theta_i} = \dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta t+\theta_i)\cos(\theta_t-\theta_i)}$

A partir de ces coefficients, on peut prouver qu'il existe un angle pour lequel r=0 et t=1 . C'est à dire que pour cet angle, la lumière est totalement transmise. Cet angle particulier est appelé **angle de Brewster** et on peut prouver qu'il est égal à :

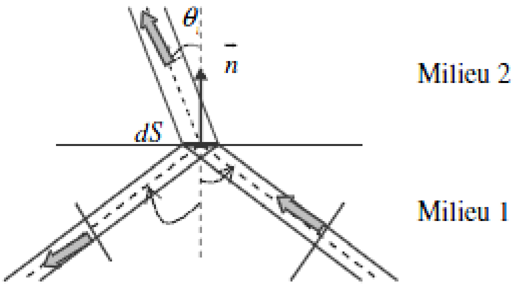
$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

On utilisera cet angle de Brewster dans notre montage afin de polariser la lumière. Cet angle particulier laisse passer 100 % de la composante électrique tangentielle de la lumière r, et ne la réfléchit donc pas du tout.

Les autres coefficients ne s'annulent jamais. On en déduit qu'à l'incidence de Brewster, une onde initialement non polarisée le devient par réflexion, puisque seule la composante transverse électrique (champ E perpendiculaire au plan d'incidence) est réfléchie.

Nous avons donc définit les coefficients de Fresnel pour les ondes transverse électrique et magnétique, mais c'est résultats portent sur les amplitudes électriques et ne sont pas mesurables physiquement. C'est pourquoi nous allons maintenant nous intéresser aux coefficients en terme de puissance et d'éclairement.

c) Coefficients de Fresnel en terme d'intensité lumineuse



On a $\quad < dP_r > = < P > \cos\theta . dS = I \cos\theta \, dS$

avec $\quad I_v = \frac{E_0 cn}{2} \vec{E} \, \vec{E}^* \qquad on\, trouve :$

$$< dP_{\mathrm{ri}} > = \frac{E_0 cn_1}{2} E_{\mathrm{im}}^2 \cos\theta_i \, dS$$
$$< dP_{\mathrm{rr}} > = \frac{E_0 cn_1}{2} E_{\mathrm{rm}}^2 \cos\theta_i \, dS$$
$$< dP_{\mathrm{rr}} > = \frac{E_0 cn_2}{2} E_{\mathrm{tm}}^2 \cos\theta_i \, dS$$

Par définition, les coefficient de transmission et de réflexion en énergie T et R sont les coefficients positifs suivants :

$$R = \frac{< P_{\mathrm{rr}} >}{< P_{\mathrm{ri}} >} = \frac{E_{\mathrm{tm}}^2}{E_{\mathrm{rm}}^2} \qquad et \qquad T = \frac{< P_{\mathrm{rt}} >}{< P_{\mathrm{ri}} >}$$

On en déduit que $R = |r|^2 \qquad et \qquad T = |t|^2 \frac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i}$

Le bilan d'énergie conduit à écrire :

$$< dP_{\mathrm{ri}} > = < dP_{\mathrm{rr}} > + < dP_{\mathrm{rt}} >$$

D'où

$$1 = \frac{< dP_{\mathrm{rr}} >}{< dP_{\mathrm{ri}} >} + \frac{< dP_{\mathrm{rt}} >}{< dP_{\mathrm{rr}} >}$$

On a donc R + T = 1