

Projet de Physique P6-3
STPI/P6-3/2011 – 41

L'EFFET MIRAGE



Etudiants :

Roxanne CROUGNEAU	Isabelle PAIN
Jérémy FASY	Paola SANCHEZ CELY
Thomas FERAL	Morgane SAYES
Caroline KERJEAN	Feier YAN

Enseignant-responsable du projet :

Jérôme YON

Date de remise du rapport : 18/06/11

Référence du projet : STPI/P6-3/2011 – 41

Intitulé du projet : *L'effet mirage*

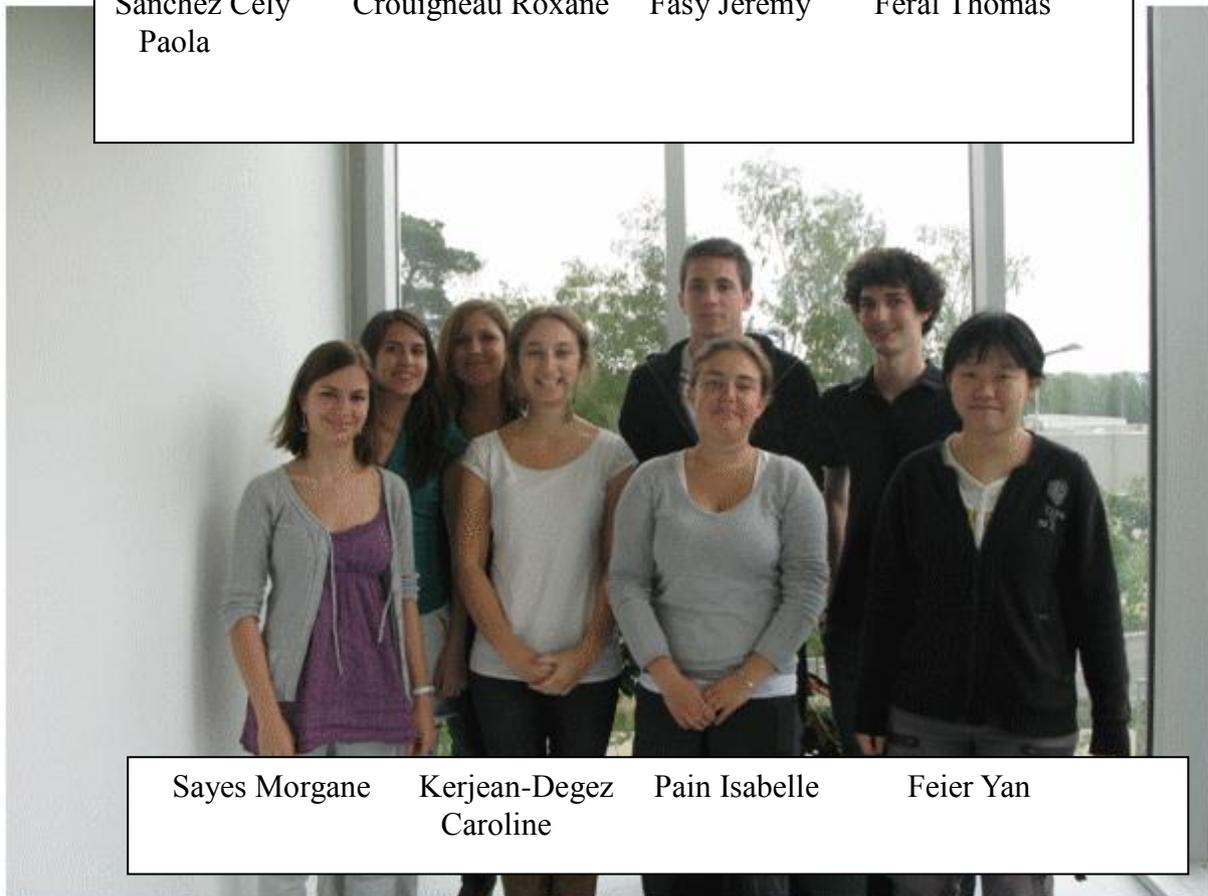
Type de projet : *bibliographique et expérimental*

Objectifs du projet :

L'objectif principal de ce projet est la compréhension des mirages à l'aide d'une étude théorique et d'applications expérimentales. Ainsi il faudra trouver un dispositif pour simuler un mirage dans un cas simple (comme la déviation d'un faisceau) et être capable de le mettre en relation avec les études théoriques faites précédemment.

Mots-clefs du projet : *déviation, indice de réfraction, équation eikonale, gradient*

Sanchez Cely Crouigneau Roxane Fasy Jeremy Feral Thomas
Paola



Sayes Morgane Kerjean-Degez Pain Isabelle Feier Yan
Caroline

Table des Matières

1. Introduction.....	6
2. Méthodologie / Organisation du travail.....	6
3. Présentation des mirages.....	7
3.1. Le principe de Fermat.....	7
3.2. Définition d'un mirage.....	7
3.2.1. Les mirages inférieurs.....	8
3.2.2. Les mirages supérieurs.....	10
3.2.3. Fata Morgana:	11
3.2.4. Fata Bromosa.....	12
4. Etude théorique	13
4.1. Equation Eikonale.....	13
4.1.1. Milieu continu et inhomogène, notion de chemin optique	13
4.1.2. Relation entre Grad L et n	13
4.1.3. L'équation Eikonale	14
4.1.4. Interprétation physique de l'équation Eikonale.....	15
4.2. Relation avec Snell-Descartes	16
4.3. Cas particulier d'un milieu stratifié	17
4.3.1. Formule générale	17
4.3.2. 1 ^{er} cas : n = b + az avec a et b constantes réelles	18
4.3.3. 2 ^{ème} cas : zx = ax² + bx + c avec a, b et c constantes réelles.....	20
5. Etude expérimentale de la déviation d'un faisceau	21
5.1. Dispositif expérimental	21
5.2. Manipulation des données expérimentales.....	22
5.3. Comparaison avec la théorie.....	23
6. Observation de l'impact d'un milieu d'indice stratifié sur une image.....	25
6.1. Rayures placées en diagonale par rapport à la cuve.....	26
6.2. Rayures placées horizontalement par rapport à la cuve.....	26
6.3. Rayures placées verticalement par rapport à la cuve	27
7. Conclusions et perspectives.....	28
8. Bibliographie.....	29
9. Index des illustrations.....	31
10. Crédits d'illustration :	31
11. Annexes.....	32
11.1. Carnet de bord.....	32

11.2.	Traitement d'images	36
11.3.	Résultat de la comparaison avec la théorie	42
11.4.	Démonstration de l'équation Eikonale.....	42
11.5.	Résolution de l'équation Eikonale à l'aide de Scilab.....	44

1. INTRODUCTION

L'EC de P6-3 est la suite logique des TP de P6 effectués durant les semestres 2 et 3 de nos années STPI. Cet enseignement qui se réalise par petit groupe et qui requiert une grande autonomie de la part des élèves. Notre groupe, sous la tutelle du professeur Jérôme YON, a étudié « L'effet mirage ». Ce rapport est donc le résultat de nos manipulations et de nos recherches. Nous allons donc essayer de vous présenter au mieux notre projet.

Magnifique journée d'été, vous êtes sur l'autoroute pour vous rendre sur votre lieu de vacances et vous apercevez sur la route, au loin, une grande flaque d'eau réfléchissant le ciel. Quand vous vous en approchez enfin, celle-ci a disparu. Quelques minutes plus tard ce phénomène se reproduit. C'est ce qu'on appelle un mirage. C'est la déformation de l'image d'un objet réel par un effet optique. Pour être plus précis, l'effet mirage résulte de la déviation de rayons lumineux du fait du changement de l'indice de réfraction. L'objectif de ce projet est de comprendre, illustrer et exploiter ce phénomène. Par comprendre, nous entendons expliquer mathématiquement les mirages. Ensuite, nous souhaitons trouver un dispositif pour illustrer le phénomène. L'exploitation consiste à obtenir des mesures.

Pour atteindre ces objectifs nous avons divisé notre travail en quatre parties. Nous ferons tout d'abord une présentation des mirages en général, puis nous aborderons la partie théorique du mirage. Ensuite nous parlerons de l'étude expérimentale de la déviation d'un faisceau et enfin nous observerons l'impact d'un milieu d'indice stratifié sur une image.

2. METHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Durant les deux premières séances nous nous sommes concentrés sur des recherches bibliographiques portant sur les mirages, afin d'en apprendre un peu plus sur le fonctionnement de ces derniers et de déterminer les différents facteurs influant sur ce phénomène optique. Ces recherches nous ont permis de bien comprendre ce que représentaient les « mirages » et d'ainsi partir avec de bonnes connaissances de base.

Au départ nous nous étions fixés deux objectifs distincts. Nous souhaitons en effet aborder les mirages selon un aspect mathématique (comprendre l'équation eikonale régissant la trajectoire des mirages) et selon un aspect expérimental (faire des expériences de déviation de rayons lumineux selon des variations d'indices, ou de température). Nous nous étions donc séparés en deux groupes (deux pour l'option mathématiques et 6 pour la partie expérimentale) afin d'avancer au mieux dans notre projet.

Cependant il n'a pas été facile de mettre en place la partie expérimentale et plusieurs projets d'expérience ont du être abandonnés pour se concentrer uniquement sur une expérience de déviation selon un gradient d'indice de milieu suivant l'axe z dans une cuve.

Nous nous sommes ensuite répartis en trois groupes de travail, un travaillant sur l'approche expérimentale, un autre sur l'approche mathématique et un autre sur la modélisation assistée par ordinateur. L'équipe expérimentale relevait les angles d'incidence du rayon arrivant sur la cuve (grâce à des calculs de tangente en particulier) et grâce à leurs photos, faisait des analyses avec le logiciel GIMP (relever des points de la courbe sur la photo). Puis elle les mettait dans un tableau Excel (colonnes X, Y, différentes hauteurs de la cuve...) pour les transmettre au groupe d'analyse théorique. Ce dernier utilisait ensuite ces

relevés pour modéliser automatiquement une courbe à partir de ces points. Lors de chaque séance chaque groupe prenait note de ce que les autres groupes avaient réalisé pour pouvoir vérifier si ses résultats étaient corrects. En effet, chaque groupe pouvait mettre en relation ses résultats avec ceux des deux autres groupes.

Le groupe de la modélisation, après plusieurs séances infructueuses au cours desquelles il devait mettre en place un programme permettant de modéliser le phénomène par ordinateur, s'est rendu compte que leurs connaissances en informatique étaient insuffisantes pour mener à bien cette option compliquée et que cela n'aurait jamais pu être fini pour le présenter le jour de l'oral. C'est pourquoi les membres de ce groupe se sont réorientés vers une observation de l'impact d'un milieu d'indice stratifié sur une image.

Tout au long de notre projet nous avons tenu un « calendrier » de nos tâches effectuées pendant chaque séance, avec un résumé et un bilan de chaque groupe sur son avancée. Ceci nous a permis de nous rendre compte à la fin de chaque séance de ce qu'il restait à faire et de l'importance de l'avancée de notre travail.

Vous pourrez trouver ce dernier en annexe.

3. PRESENTATION DES MIRAGES

3.1. Le principe de Fermat

La loi fondamentale de l'optique géométrique : le principe de propagation rectiligne de la lumière, n'est vrai que dans les milieux homogènes, dans lesquels l'indice de réfraction ne varie pas. Plus généralement, nous savons que le chemin emprunté par la lumière est celui pour lequel le temps de parcours est extrême (minimum ou maximum) : c'est le **principe de Fermat**. Lorsque qu'un milieu est inhomogène, le chemin le plus court n'est pas la ligne droite mais une courbe qui dépendra de la variation d'indice du milieu. C'est pour cela que l'on peut observer des déviations de rayons lumineux qui peuvent conduire à des mirages.

3.2. Définition d'un mirage

Les mirages sont une déformation d'un objet causée par des effets d'optique. Lors d'un mirage, une image visible d'un objet distant paraît déplacée par rapport à sa véritable position. Un mirage est un phénomène lié à la réfraction de la lumière dans l'atmosphère. Un mirage se crée lorsqu'il y a une différence d'indice de réfraction entre les couches d'air. Ces variations d'indice peuvent être causées par la pression, la composition chimique des couches (variation de CO₂ etc.), la masse volumique, mais c'est la température qui joue le rôle déterminant dans les mirages observables sur Terre, Les variations d'indice imposent une trajectoire curviligne aux rayons lumineux au lieu de rectiligne.

Ils existent plusieurs catégories de mirages terrestres :

- les mirages inférieurs
- les mirages supérieurs
- les Fata Morgana
- les Bromosa

Nous allons présenter les différentes sortes de mirages en expliquant leurs formations et en donnant des exemples de chacun d'eux.

3.2.1. Les mirages inférieurs

Les mirages inférieurs sont également appelés « mirages chauds ». Ils se produisent lorsque les rayons du soleil chauffent fortement le sol, réchauffant à son tour l'air situé au dessus de lui. Des fines couches d'air se forment. Les couches d'air chaud se trouvent en dessous des couches d'air froid donc plus l'on s'éloigne du sol, plus la température diminue ; on dit donc que le gradient thermique est négatif car il est dirigé vers le bas (dirigé vers l'air chaud). La loi de Gladstone, donnant une relation entre l'indice et la température nous montre que les gradients d'indice et de température sont opposés ; le gradient d'indice est donc dirigé vers le haut.

En effet, la loi de Gladstone relie l'indice n d'un gaz à sa masse volumique selon la relation suivante :

$$n - 1 = k \times \rho \text{ où } k \text{ est une constante}$$

On assimile l'air à un gaz parfait donc $P \times V = n \times R \times T$

On a donc l'expression de la masse volumique : $\rho = \frac{M \times P}{R \times T}$

$$\text{Donc } n = 1 + \frac{kMP}{RT}$$

Or M et R sont des constantes et si on travaille à pression constante, l'indice de réfraction dépend uniquement de la température selon la relation suivante :

$$n = 1 + \frac{k'}{T} \text{ où } k' \text{ est une constante}$$

L'indice de réfraction est inversement proportionnel à la température et :

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(n) = -\overrightarrow{\text{Grad}}(T)$$

Dans notre cas, on peut dire que plus l'on s'éloigne du sol ; plus l'indice de réfraction augmente. Les rayons se courbent vers le haut, vers les zones d'indice les plus élevées. Une variation de 3°C sur une hauteur de 1 m est suffisante pour observer un tel phénomène. Les rayons provenant de l'objet vont donc progressivement se diriger vers le sol par réfraction jusqu'à atteindre un angle limite à partir duquel ils sont réfléchis : c'est la réflexion totale. L'œil humain n'ayant pas l'habitude des transmissions de rayons dans un milieu inhomogène, pense que les rayons se déplacent en ligne droite et a donc l'impression que ces rayons proviennent du sol.

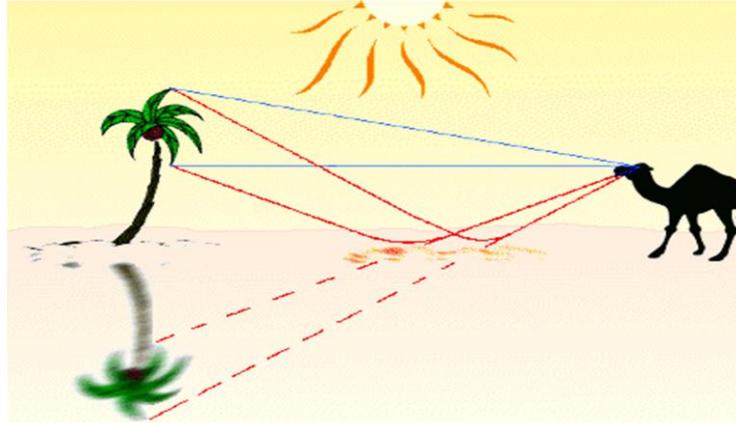


Illustration 1: Explication d'un mirage

Dans ce type de mirages, l'image apparaît en dessous de l'objet réel, d'où leur nom : mirages inférieurs. Ils sont observables dans les déserts ou sur les autoroutes en été par exemple. Dans beaucoup de cas, c'est en fait le ciel que l'on verra au niveau du sol (quelque fois confondu avec de l'eau, comme par exemple les faux « oasis » dans les déserts de sable).

Voici quelques exemples concrets de mirages inférieurs :



Illustration 2: Mirage inférieur 1



Illustration 3: Mirage inférieur 2



Illustration 4: Mirage inférieur 3

3.2.2. Les mirages supérieurs

Les mirages supérieurs sont également appelés « mirages froids ». En effet, contrairement aux mirages inférieurs, les mirages supérieurs apparaissent lorsque les couches d'air près du sol sont plus froides que les couches d'air supérieures. Ce phénomène est particulièrement visible en hiver ou au printemps lorsqu'un vent du sud chauffe. Ainsi, les couches d'air supérieures sont réchauffées alors que les couches inférieures restent froides à cause de la présence de neige.

En appliquant la loi de Gladstone, on peut dire que près du sol, là où la température est la plus basse, l'indice est le plus élevé. On observe un gradient thermique positif, dirigé vers le haut où l'on trouve les couches d'air plus chaudes et un gradient d'indice négatif, dirigé vers le bas. Les rayons lumineux se courbent donc vers le bas, vers les zones d'indice les plus élevées. L'œil humain prolonge les rayons qui lui parviennent en ligne droite et a donc l'impression que l'objet vient du haut.

Si le gradient d'indice est très important l'image est inversée et peut se fondre avec l'objet réel. Quelques fois, seul le haut de l'objet apparaît plus haut que sa position réelle, ce qui crée une déformation de l'objet. Si le gradient d'indice est faible, l'image est réduite à une ligne horizontale.

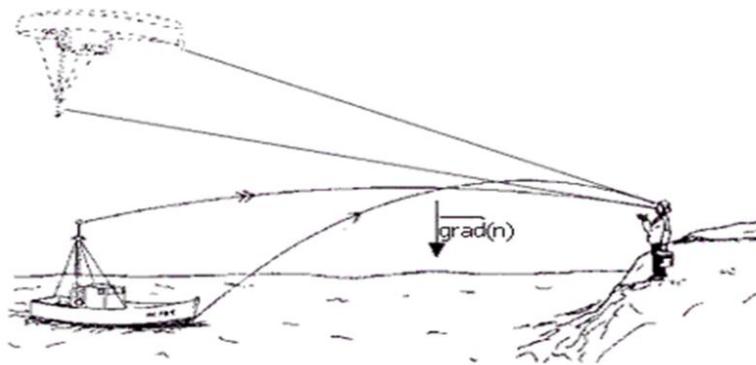


Illustration 5: Explication mirage supérieur (gradient)

Dans ce type de mirages, l'image apparaît en dessus de l'objet réel, d'où leur nom : mirages supérieurs. On les observe fréquemment dans les régions polaires où en mer lorsque celle-ci est très froide et que la température de l'eau est inférieure à celle de l'air.

On peut ajouter que les mirages supérieurs permettent de voir des objets qui nous sont d'habitude cachés par l'horizon du fait de la forme sphérique de la Terre.

Voici un schéma pour expliquer ce phénomène :

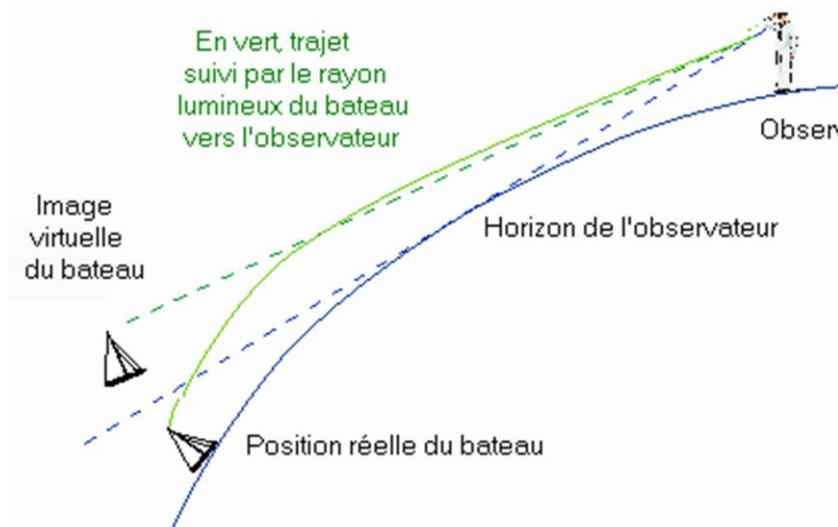


Illustration 6: Explication mirage supérieur (trajet des

Sans mirage, l'observateur ne peut voir le bateau (trajet bleu). Le mirage supérieur créant une image de l'objet au dessus de celui-ci, permet à l'observateur de voir le bateau.

Voici quelques exemples concrets de mirages supérieurs :



Illustration 7: Mirage supérieur 4

3.2.3. Fata Morgana:

Une « Fata Morgana » (fée Morgane en italien, son nom date du Moyen-âge lorsque des croisés eurent cette vision pour la première fois près du détroit de Messine et l'attribuèrent à la Fée morgane.) est un phénomène optique résultant d'une combinaison de mirages.

Ce phénomène est relativement rare et ne se produit que dans certaines régions du globe (mer baltique, Le Cap, régions polaires).

Comme nous l'avons mentionné précédemment ce type de mirage est un phénomène plutôt rare et certaines conditions particulières sont nécessaires pour que l'on puisse apercevoir une « Fata Morgana ». C'est la superposition de couches d'air chaud et d'air froid qui ne se mélangent pas, induisant des variations thermiques plus ou moins brutales et qui entraîne une succession de mirages supérieurs et inférieurs qui en est à l'origine. Cette apparition de la Fata Morgana est apparemment favorisée par la présence d'îles du fait que la terre et les roches changent de température beaucoup plus vite que l'eau. Les trajectoires



Illustration 8: Fata Morgana (Finlande)

des rayons sont alors imprévisibles et diversement entrelacées. On peut ainsi obtenir des combinaisons exceptionnelles de mirages supérieurs et inférieurs, où des images simultanément droites et renversées s'empilent en formant une colonne verticale.

3.2.4. Fata Bromosa

La Fata Bromosa, appelée aussi « brouillard de fée », est comparable à la Fata Morgana excepté le fait qu'elle est moins marquée que ce dernier. Ce mirage apparaît en général comme une image plate et uniforme ressemblant à un mur suspendu avec de fortes variations de lumière. Il est composé de parties sombres et brillantes dues à la distribution des rayons lumineux qui s'effectue de manière plus forte dans les zones au dessus et au dessous de l'image. On obtient ainsi une image floue et très brillante qui nous donne l'impression de l'existence d'un brouillard aux bords lumineux qui plane juste au dessus de la mer ou d'une surface enneigée.



Illustration 9: Fata Bromosa (Groenland)

4. ETUDE THEORIQUE

4.1. Equation Eikonale

4.1.1. Milieu continu et inhomogène, notion de chemin optique

Lorsqu'un rayon parcourt une distance d dans un milieu d'indice n , on appelle chemin optique le produit de la distance et de l'indice :

$$L = n \cdot d \quad (\text{On notera le chemin optique } L)$$

Si un rayon change de milieu et parcourt une distance d_1 dans un milieu d'indice n_1 et une distance d_2 dans un milieu d'indice n_2 , alors le chemin optique parcouru est :

$$L = n_1 \cdot d_1 + n_2 \cdot d_2$$

Ici nous allons nous intéresser aux milieux dans lesquels l'indice de réfraction varie de manière continue.

Dans ces milieux, l'indice n dépend donc du point considéré, n est une fonction de la position que l'on peut noter $n(x,y,z)$.

Afin d'étudier le trajet du rayon lumineux (courbe notée C) nous allons considérer un petit trajet ds sur lequel l'indice peut être supposé constant.

Le chemin optique est donc localement : $dL = n \cdot ds$

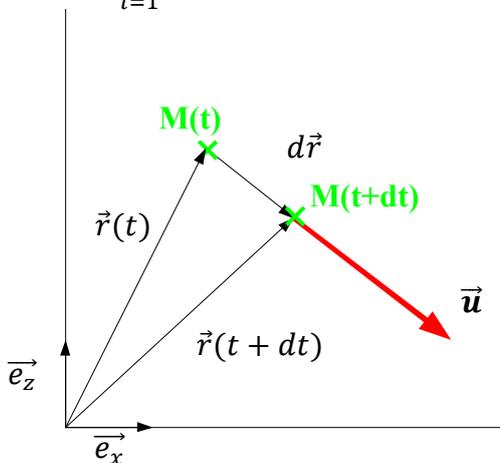
Le chemin optique total est donc : $L = \int_C dL = \int_C n \cdot ds$

4.1.2. Relation entre $\overrightarrow{\text{Grad } L}$ et \vec{n}

Soit M le point représentant la position du rayon à l'instant t

On se place dans un repère où M peut être défini par son vecteur position \vec{r} tel que :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3 + \dots + r_k \vec{e}_k \\ \vec{r} &= \sum_{i=1}^k r_i \vec{e}_i \end{aligned} \right.$$



A $t+dt$ le rayon est en $M(t+dt)$

Cette variation peut-être représentée par $d\vec{r}$ tel que :

$$\begin{cases} d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t) = dr_1\vec{e}_1 + dr_2\vec{e}_2 + dr_3\vec{e}_3 + \dots + dr_k\vec{e}_k \\ d\vec{r} = \sum_{i=1}^{i=k} dr_i\vec{e}_i \end{cases}$$

On suppose $\|d\vec{r}\|$ est suffisamment petit pour considérer que n est constant dessus et on note $\|d\vec{r}\| = ds$

On pose \vec{u} vecteur unitaire de direction $d\vec{r}$ tel que :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

On rappelle que si n est constant sur ds alors $dL = n \cdot ds$

Or par définition du gradient: $\overrightarrow{Grad L} \cdot d\vec{r} = dL$

Donc $\overrightarrow{Grad L} \cdot d\vec{r} = nds$

On remarque alors que :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\Leftrightarrow ds \cdot \vec{u} = d\vec{r}$$

$$\Leftrightarrow ds \cdot \vec{u} \cdot \vec{u} = d\vec{r} \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow ds = d\vec{r} \cdot \vec{u}$$

Donc $\overrightarrow{Grad L} \cdot d\vec{r} = nd\vec{r} \cdot \vec{u}$

$$\overrightarrow{Grad L} = n\vec{u}$$

On peut déduire cette formule qu'en tout point le rayon lumineux prendra la direction de $\overrightarrow{Grad L}$.

4.1.3. L'équation Eikonale

On sait que :

$$\overrightarrow{Grad L} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial L}{\partial r_i} \vec{e}_i$$

Et que :

$$n\vec{u} = n \frac{d\vec{r}}{ds} = n \sum_{i=1}^{i=k} \frac{dr_i}{ds} \vec{e}_i = n \sum_{i=1}^{i=k} u_i \vec{e}_i$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{Grad}} L = n\vec{u} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \frac{\partial L}{\partial r_i} = nu_i = n \frac{dr_i}{ds}$$

On va maintenant s'intéresser à la variation de ces valeurs lors d'un déplacement ds .
On dérive donc l'expression par rapport à ds :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{d}{ds} (nu_i) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \right)$$

En développant le premier terme on arrive à:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) &= \frac{\partial n}{\partial r_i} \\ \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial r_i} &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial r_i} \vec{e}_i &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \vec{e}_i \right) \end{aligned}$$

En généralisant sur tous les r_i on obtient :

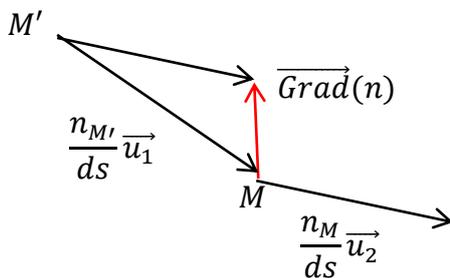
$$\overrightarrow{\text{Grad}} n = \frac{d}{ds} (n\vec{u}) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right)$$

Voir **Annexe** pour la démonstration complète

4.1.4. Interprétation physique de l'équation Eikonale

Supposons deux points appartenant à la trajectoire du rayon lumineux, M et M' , séparés par une distance ds très petite. Le rayon partant de M' a pour vecteur directeur \vec{u}_1 et celui partant de M a pour vecteur directeur \vec{u}_2 . A ce point il y a une variation de n représentée par le vecteur $\overrightarrow{\text{Grad}}(n)_M$.

$$\overrightarrow{\text{Grad}}(n)_M = \frac{n_M}{ds} \vec{u}_2 - \frac{n_{M'}}{ds} \vec{u}_1$$

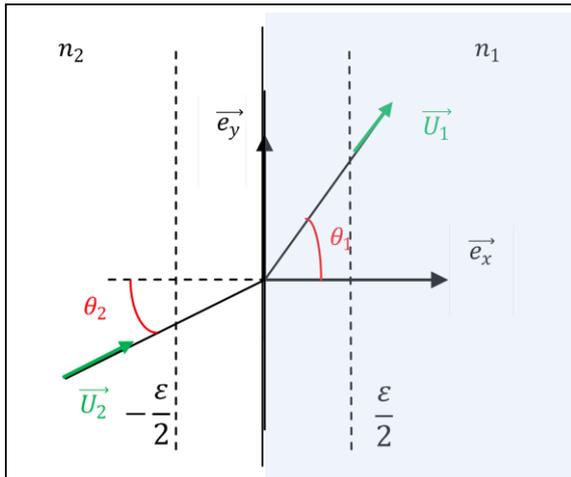


On peut alors représenter une succession de cette étape comme ci-dessous :

4.2. Relation avec Snell-Descartes

On se place dans le cas d'une propagation sur une distance ds suffisamment petite ($ds = ds_2 + ds_1$).

On peut donc considérer que sur ds_1 l'indice n_1 est constant et que, de même, sur ds_2 l'indice n_2 est constant.



On place un repère orthonormée (\vec{e}_x, \vec{e}_y) tel que $\overrightarrow{\text{Grad}}(n)$ soit porté par \vec{e}_x

On a donc $\overrightarrow{\text{Grad}}(n) = \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$

D'après l'équation $d(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{Grad}}(n)ds$, on a :

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} d(n\vec{u}) = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \overrightarrow{\text{Grad}}(n)ds = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{dn}{dx} \vec{e}_x ds$$

$$\Leftrightarrow n_1 \vec{U}_1 - n_2 \vec{U}_2 = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{n_1 - n_2}{\epsilon} \vec{e}_x ds$$

$$\Leftrightarrow n_1 \vec{U}_1 - n_2 \vec{U}_2 = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{n_1 - n_2}{\epsilon} \vec{e}_x ds$$

$$\Leftrightarrow n_1 \vec{U}_1 - n_2 \vec{U}_2 = \frac{n_1 - n_2}{\epsilon} \vec{e}_x \left(\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^0 ds + \int_0^{\frac{\epsilon}{2}} ds \right)$$

$$\Leftrightarrow n_1 \vec{U}_1 - n_2 \vec{U}_2 = \frac{n_1 - n_2}{\epsilon} \vec{e}_x (ds_1 + ds_2)$$

$$\Leftrightarrow n_1 \vec{U}_1 - n_2 \vec{U}_2 = \frac{n_1 - n_2}{2 \cdot \epsilon} \vec{e}_x \left(\frac{\epsilon}{\cos \theta_1} + \frac{\epsilon}{\cos \theta_2} \right)$$

On projette sur \vec{e}_y

$$\begin{aligned} n_2 \vec{U}_2 \cdot \vec{e}_y - n_1 \vec{U}_1 \cdot \vec{e}_y &= 0 \\ \Leftrightarrow n_2 \vec{U}_2 \cdot \vec{e}_y &= n_1 \vec{U}_1 \cdot \vec{e}_y \\ \Leftrightarrow n_2 \sin \theta_2 &= n_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

On retrouve donc la formule de Snell-Descartes.

4.3. Cas particulier d'un milieu stratifié

4.3.1. Formule générale

On prend n ne variant qu'en fonction de z : $n=n(z)$

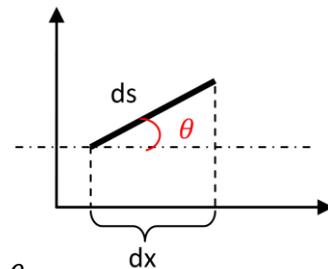
$$n = n(z) \Rightarrow \overrightarrow{\text{Grad } n} = \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \vec{e}_x + \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \vec{e}_y + \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \vec{e}_z$$

Or d'après l'équation Eikonale :

$$\overrightarrow{\text{Grad } n} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \vec{e}_x + \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \vec{e}_y + \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \vec{e}_z = \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) \vec{e}_x &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \vec{e}_y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) \vec{e}_z &= \frac{dn}{dz} \vec{e}_z \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = 0 \Leftrightarrow n \frac{dx}{ds} = k \text{ (constante réelle)} = n \sin \theta = n_0 \sin \theta_0$$

$$k = n_0 \sin \theta_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz dx}{ds dx} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(n \frac{dz dx}{dx ds} \right) \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(n \frac{dz k}{dx n} \right) \frac{k}{n} = \frac{k^2 d^2 z}{n dx^2} \\ \Rightarrow \frac{dn}{dz} &= \frac{k^2 d^2 z}{n dx^2} \Leftrightarrow n \frac{dn}{dz} = k^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \end{aligned}$$

$$n \frac{dn}{dz} = k^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$$

Cette équation peut-être résolue à l'aide de Scilab (**voir Annexe**).

4.3.2. 1^{er} cas : $n = \sqrt{b + az}$ avec a et b constantes réelles

➤ Résolution de l'équation différentielle

$$\frac{dn}{dz} = \frac{a}{2\sqrt{b+az}} \Rightarrow n \frac{dn}{dz} = \frac{a\sqrt{b+az}}{2\sqrt{b+az}} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow k^2 \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a}{2}$$

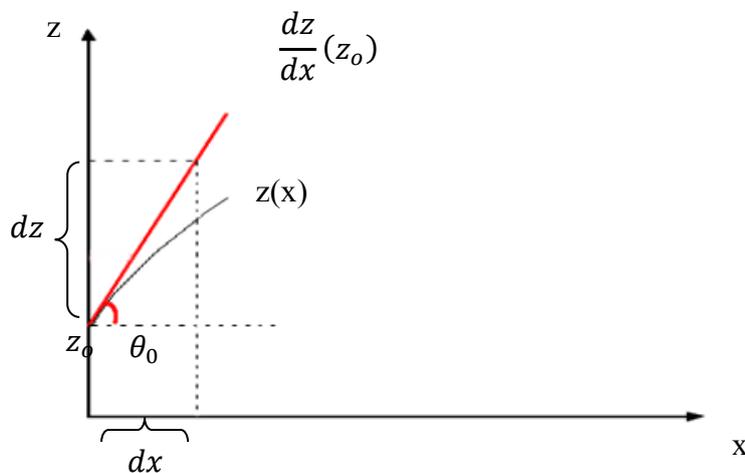
$$\Leftrightarrow d^2z = \frac{a}{2k^2} dx^2$$

$$\Leftrightarrow \int_{z_0}^z d^2z = \int_{x_0}^x \frac{a}{2k^2} dx^2 \quad \text{Avec } z_0 = z(t=0) \quad \text{et } n_0 = n(z_0)$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \frac{a}{2k^2} x^2 + mx + p$$

Avec m et p constantes réelles.

➤ Détermination des constantes



⇒ Détermination de p

$$z(0) = z_0 = \frac{a}{2k^2} * 0^2 + m * 0 + p = p$$

Donc $p = z_0$

⇒ Détermination de m

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{k^2}x + m$$

$$\frac{dz}{dx}(0) = \tan\theta_0 = \frac{a}{k^2} * 0 + m = m$$

Donc $m = \tan\theta_0$

On rappelle que : $k = n_0 \sin\theta_0$

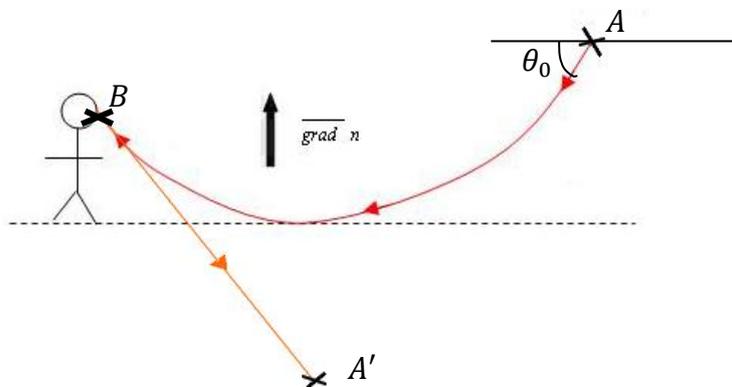
$$n_0 = \sqrt{b + a z_0}$$

$$z(x) = \frac{a}{2(b + a z_0) \sin^2\theta_0} x^2 + x \tan\theta_0 + z_0$$

➤ Etude de θ_0

Dans ce cas on connaît au moins deux points par lesquels passe le rayon lumineux. Il s'agit en général du point objet d'où part le rayon et de l'œil où il est capté.

L'intérêt de déterminer θ_0 est que l'on pourra alors connaître la tangente du rayon au « point œil » et donc la direction dans laquelle l'homme croira voir le point objet.



On sait donc que le rayon passe par $A=(0, y_0)$ et $B=(x_b, z_b)$ et on cherche à connaître l'angle d'incidence du rayon en A pour qu'il passe en B.

Il suffit alors de résoudre l'équation suivante :

$$y_b = \frac{a}{2(b + a z_0) \sin^2 \theta_0} x_b^2 + x_b \tan \theta_0 + z_0$$

Avec θ_0 comme inconnue.

4.3.3. 2^{ème} cas : $z(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c constantes réelles

➤ Résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a$$

$$n \frac{dn}{dz} = k^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \Leftrightarrow n \, dn = k^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dz$$

$$\Leftrightarrow \int_{n_0}^n n \, dn = \int_{z_0}^z k^2 \frac{d^2 z}{dx^2} dz = \int_{z_0}^z a k^2 dz \quad \text{Avec } n_0 = n(z_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2(z)}{2} = k^2 a z + m \quad (\text{avec } m \text{ constante réelle d'intégration})$$

$$\Leftrightarrow n(z) = \sqrt{2k^2 a z + 2m} = \sqrt{2n_0^2 \sin^2 \theta_0 a z + 2m}$$

➤ Détermination de la constante

$$n(z_0) = n_0 = \sqrt{2n_0^2 \sin^2 \theta_0 a z_0 + 2m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{n_0^2}{2} - n_0^2 \sin^2 \theta_0 a z_0$$

$$\Rightarrow n(z) = \sqrt{2n_0^2 \sin^2 \theta_0 a(z - z_0) + n_0^2}$$

$$n(z) = n_0 \sqrt{2 \sin^2 \theta_0 a(z - z_0) + 1}$$

5. ETUDE EXPERIMENTALE DE LA DEVIATION D'UN FAISCEAU

5.1. Dispositif expérimental

Nous avons cherché à matérialiser l'effet mirage avec un gradient. Tout d'abord, nous avons cherché à créer un gradient de température. Pour cela, nous avons voulu mettre en place une expérience: nous avons rempli une cuve d'eau chaude, nous avons rajouté ensuite des glaçons à la surface de manière à obtenir des couches avec des températures différentes. Cependant, cette expérience ne fut pas concluante car les glaçons fondaient trop vite et l'eau avait plus ou moins la même température partout, ne créant pas de variations assez importantes de température. Le rayon laser passant à travers la cuve n'était pas assez dévié pour qu'on puisse réellement l'exploiter. Pour que l'expérience fonctionne il aurait fallu des plaques chauffantes sous la cuve pour maintenir un gradient de température.

Nous avons alors décidé de réaliser une deuxième expérience en créant un gradient du à une variation d'indice du milieu. Pour obtenir, une variation d'indice, nous avons utilisé une solution saturée en sel. Dans la pratique, nous avons rempli une cuve d'eau (23 litres) auquel nous avons ajouté du sel (8 kilos). La solution saturée en sel est plus dense que l'eau, elle reste donc au fond de la cuve. Elle se diffuse progressivement et crée ainsi différentes couches d'eau plus ou moins salées, ayant des indices de réfraction différents en fonction de la profondeur. Un fois ce gradient d'indice crée, nous pouvons visualiser un mirage supérieur. Étant caractérisé par la variation de concentration de sel dans une cuve d'eau.

Ainsi, en faisant traverser le rayon laser rouge dans la cuve, avec différents angles d'incidence, on a observé une véritable déviation du faisceau ce qui caractérise l'effet mirage étudié. En effet, une demi-parabole très distincte sur les photos est observable.

Pour mieux se rendre compte et justifier cette déviation dans la cuve, nous avons d'abord cherché à calculer ces angles d'incidence du rayon laser pour ensuite les étudier de façon plus mathématique et théorique.

5.2. Manipulation des données expérimentales

Le but de notre expérience était de parvenir à interpréter de façon précise les déviations des rayons laser lorsqu'ils entrent dans la cuve. Pour cela, nous avons décidé d'orienter le laser de manière à obtenir différents angles d'incidence.

On a ainsi pu observer que les déviations étaient plus ou moins importantes suivant les angles imposés.

Pour calculer les angles d'incidences, nous avons procédé comme suit :

Nous avons positionné le laser de manière à obtenir le retour du rayon laser au même niveau que l'entrée. Cette position du laser nous donnait le « niveau zéro » ou l'horizontale, c'est-à-dire qu'en ayant le retour au même point, cela signifie que le rayon n'est pas dévié, et par conséquent que l'angle d'incidence est nul.

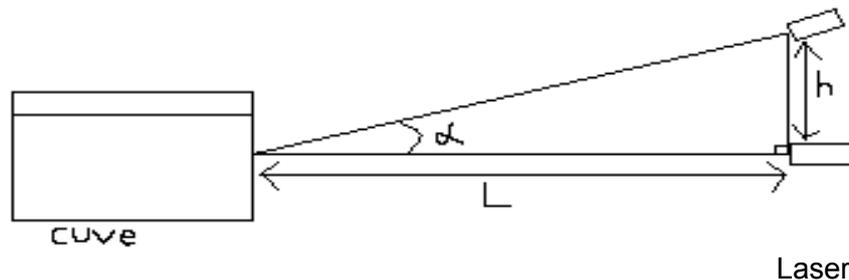
Après avoir trouvé cette position « témoin », nous avons marqué sur la cuve à quel niveau le rayon tapait. Nous avons mesuré toutes les distances nécessaires :

Distance cuve-laser L=143cm

Hauteur du laser par rapport à la table : 19cm

Ensuite, nous avons placé le laser plus haut, tout en visant le point qui avait été marqué préalablement sur la cuve. Nous avons à nouveau mesuré les distances cuve-laser et hauteur du laser.

En ayant toutes ces informations, on peut schématiser la situation comme suit :



On remarque ainsi que pour trouver l'angle d'incidence, il s'agit d'un simple calcul de trigonométrie :

$$\alpha = \arctan(h/L)$$

Afin d'obtenir des résultats les plus précis possibles, nous avons réalisé l'expérience avec des distances les plus élevées possibles

Après calculs, nous avons obtenu les angles suivants :

L (cm)	h(cm)	$\alpha(^{\circ})$
143	2	0,8
14	3	1,2
143	4,3	1,72
128,5	9,5	4,2
129,5	11	4,85

5.3. Comparaison avec la théorie

A l'aide du logiciel de traitement d'image Gimp, on a procédé à l'exploitation des photos prises pendant les expériences.

Premièrement, nous avons pris les coordonnées en x et en y en pixels de différents points du rayon obtenu.

Haut à gauche

Sol à droite

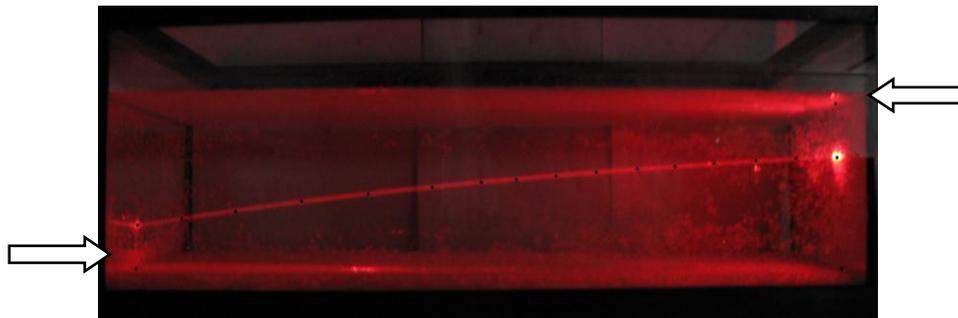


Illustration 10: Photo traitée

Pour une cohérence avec la partie théorique, lors du traitement des photos nous les avons inversées verticalement et horizontalement, c'est pour cela que le sol à droite et le haut à gauche sur la photo en sens normal ci-dessus sont inversés si on compare avec les données du tableur.

Deuxièmement, nous avons transféré ces mesures sur un tableur et nous avons transformé les coordonnées en pixels à des coordonnées en m.

	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	160	516	entrée à gauche		0	0,13
3	318	514			0,03	0,13
4	474	506			0,07	0,13
5	636	498			0,1	0,13
6	788	487,7			0,14	0,12
7	934	480			0,17	0,12
8	1094	470			0,21	0,12
9	1250	458			0,24	0,11
10	1404	446			0,27	0,11
11	1540	438			0,3	0,1
12	1730	422			0,35	0,1
13	1978	402			0,4	0,09
14	2238	378			0,46	0,08
15	2494	346			0,51	0,07
16	2702	322			0,56	0,06
17	2874	302			0,6	0,05
18						
19	2880	166	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	164	686	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22						
23	hauteur du <u>reservoir</u> en m		0,2			
24	longueur		0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pixels		520			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pixels		2716			
28						
29						

Illustration 11: Tableau utilisé pour transformer les coordonnées x et y qui étaient en pixels en mètres

Nous avons suivi la même démarche avec plusieurs photos.

En effet, nous cherchons à prouver que la trajectoire suivie par les rayons est parabolique.

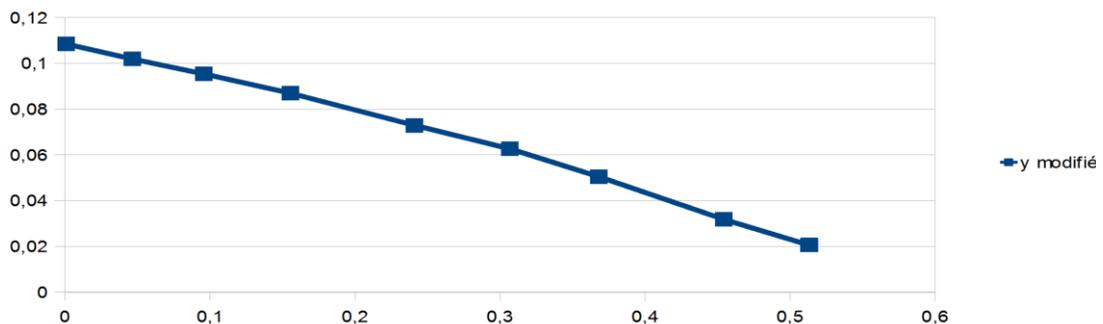


Illustration 12: Modélisation de la courbe du rayon laser avec les points relevés

On rappelle que lors de la partie théorique on avait montré que pour que la trajectoire du rayon lumineux soit une parabole il fallait que l'indice du milieu soit de la forme :

$$n = \sqrt{b + az}$$

L'équation de la parabole est alors: $z(x) = \frac{a}{2(b+az_0) \sin^2\theta_0} x^2 + x \tan\theta_0 + z_0$

θ_0 : angle d'incidence initial dans la cuve

$z_0=z(x=0)$: hauteur d'entrée initiale du rayon dans la cuve

Nous avons comparé cette équation théorique avec les résultats expérimentaux, ce qui nous permettait de retrouver les coefficients de la parabole.

Nous avons tout d'abord essayé d'utiliser le logiciel Maple mais nous ne sommes pas arrivés à programmer correctement. Nous avons alors utilisé un logiciel spécialisé dans le « fitage » fourni par Monsieur Yon.

Malheureusement les coefficients de l'indice du milieu trouvés, a et b, ne correspondaient pas du tout (voir tableur en annexe). En effet selon l'angle d'incidence initial ces a et b étaient différents ce qui est impossible. De plus le n trouvé était beaucoup trop important, environ 3000 alors qu'il devrait valoir environ 1,5.

Ces erreurs peuvent venir de l'imprécision des mesures ou encore du fait que le « fitage » ne soit pas parfait. Il peut aussi s'agir du fait que l'équation de l'indice ne soit pas de la forme $\sqrt{b + az}$.

6. OBSERVATION DE L'IMPACT D'UN MILIEU D'INDICE STRATIFIÉ SUR UNE IMAGE

Un mirage se produit dans la vie de tous les jours sur une image et non pas sur un unique faisceau lumineux (laser). Dans un premier temps nous avons voulu modéliser le phénomène en utilisant nos connaissances en optique géométrique : faire des schémas et un programme informatique pouvant déterminer l'origine d'un point image. Cela s'est révélé trop complexe au niveau de la programmation et de l'obtention des données ; nous nous sommes donc rabattues sur une étude plus abordable : observer l'impact d'un milieu stratifié d'indice sur une image. Pour cela, nous avons utilisé la cuve ayant servi aux manipulations mentionnées précédemment.

Nous avons placé une feuille avec des rayures régulières derrière la cuve pour observer l'effet du gradient d'indice sur une image. Nous avons essayé de positionner la feuille dans différentes positions : les rayures placées verticalement, horizontalement et en diagonale par rapport à la cuve.

6.1. Rayures placées en diagonale par rapport à la cuve

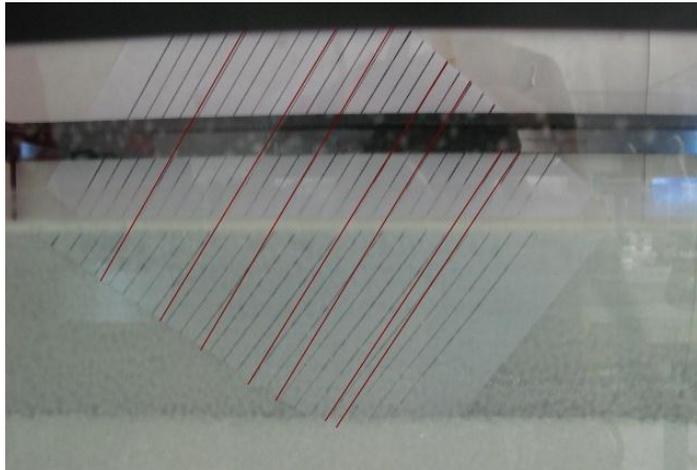


Illustration 13: Rayures placées en diagonale

Sur l'illustration 10, les lignes rouges représentent les lignes telles qu'elles seraient sans milieu déformant. Nous pouvons observer que les lignes noires sont déviées lorsqu'elles pénètrent dans le milieu en plus d'être grossies par l'effet « loupe » de l'eau et du verre. Nous constatons que plus les lignes s'approchent du fond de la cuve, plus elles sont déviées par rapport à leurs lignes droites initiales. Par exemple, le premier trait rouge à gauche arrive entre deux lignes noires alors que le quatrième trait rouge arrive sur la ligne noire d'à côté. Cela peut être dû à la différence de concentration en sel au sein de la cuve. On suppose qu'au fond de la cuve, le gradient d'indice est plus fort car la solution est plus concentrée en sel, et donc la déviation est plus importante.

6.2. Rayures placées horizontalement par rapport à la cuve

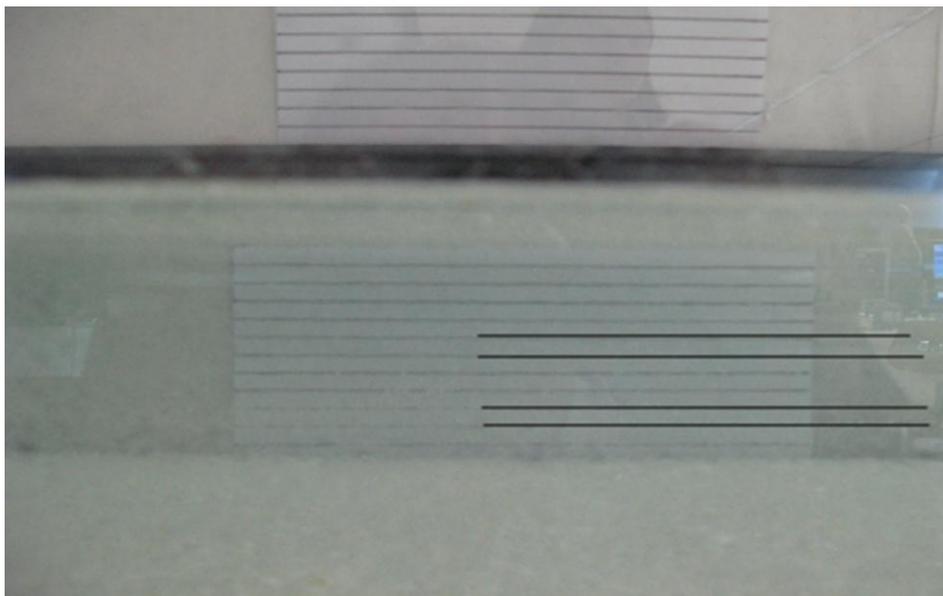


Illustration 14: Rayures placées horizontalement

Lorsqu'on la place derrière la cuve la feuille avec les rayures en position verticale, on observe certaines modifications pouvant s'expliquer aussi bien par l'effet « loupe » de l'eau et du verre de l'aquarium que par la solution présente. Le grossissement de la feuille (élargissement) est attribué à l'effet loupe. Le fait de regarder à travers la vitre et changement de milieu (eau, air) provoquent une déformation des rayures: elles ne nous paraissent plus droites. C'est vrai que si l'on regarde attentivement la photo on peut remarquer une légère déviance des rayons lorsqu'on se rapproche du bord de la feuille.

Cependant on observe sur l'illustration 11, que plus on descend dans la cuve et plus l'élargissement entre deux lignes successives se réduit. La réduction est minime mais néanmoins visible. Ceci pourrait s'expliquer par (comme mentionné précédemment) la différence de concentration en sel au sein de la cuve qui crée un gradient d'indice selon l'axe z. Ce phénomène serait donc du à la présence d'un plus fort gradient dans le fond de la cuve.

6.3. Rayures placées verticalement par rapport à la cuve

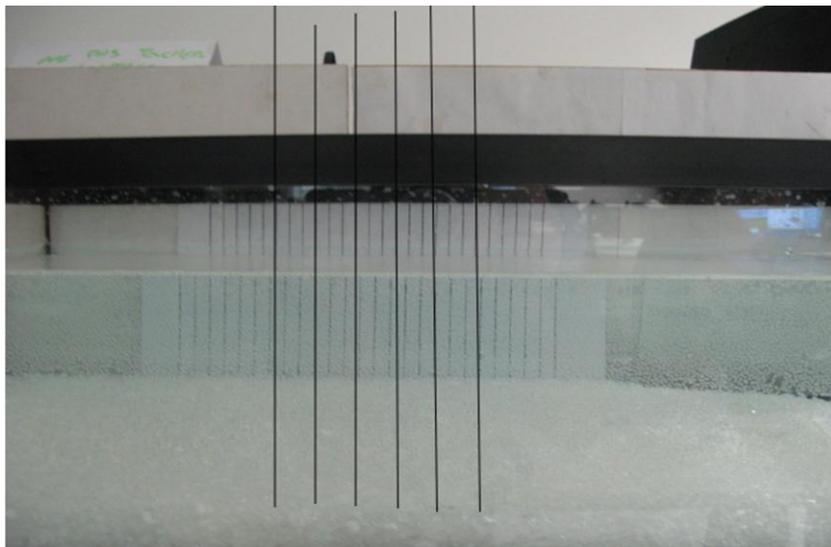


Illustration 15: Rayures placées verticalement

Sur l'illustration 15, les quatre lignes noires à droite représentent les lignes telles qu'elles seraient sans milieu déformant sur la figure. Nous pouvons observer que les lignes noires sont rompues lorsqu'elles pénètrent dans le milieu en plus d'être grossies. Les lignes sont un peu déviées au fond de la cuve.

Nous constatons que la première ligne s'approche de la gauche, elle est plus loin par rapport à sa ligne droite initiale que la dernière ligne à droite. Cela peut être du à la différence de concentration en sel au sein de la cuve, ce milieu n'est pas homogène.

Pour les déviations de lignes au fond de la cuve, elles peuvent s'expliquer par la concentration plus importante en sel au fond de la cuve. On peut en déduire que le gradient est plus fort dans le fond de la cuve.

7. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Lors de notre projet portant sur l'effet mirage, nous avons tout d'abord découvert ce qu'était un mirage et nous avons ensuite exploité les connaissances acquises de différentes manières. Le groupe travaillant sur l'aspect théorique a exploité les résultats mathématiques ainsi que les données expérimentales relevées par le groupe réalisant l'expérience avec la cuve et le laser. Quant au dernier groupe, il s'est occupé de l'aspect imagerie.

Malgré le fait que nous étions un groupe de 8 élèves-ingénieurs, nous avons réussi à coordonner nos travaux. En effet, chaque groupe de travail était en relation avec les deux autres, ce qui permettait une avancée collective du projet. De plus, à la fin de chaque séance, nous prenions le temps de mettre en commun les résultats obtenus pendant la séance.

Nous avons acquis de nombreuses compétences et connaissances, aussi bien sur le sujet traité que sur le travail de groupe. En effet, nous avons appris à gérer les relations dans un groupe de travail comme l'esprit d'équipe ou la volonté d'entraide. Nous devons également tenir un délai qui nous était imposé et donc optimiser au maximum notre travail dans chaque séance.

Dans la perspective de la poursuite de ce projet, il pourrait être intéressant de savoir mesurer l'indice à différents endroits de la cuve en utilisant des hauteurs et des angles d'incidence différents. On pourrait aussi corrélérer l'indice avec la salinité du milieu. Connaître l'indice à différents endroits du milieu peut se révéler important car cela a des applications dans la vie courante. Par exemple, dans l'industrie alimentaire, la mesure du taux de sucre dans les yaourts est possible grâce à la mesure de l'indice de réfraction.

8. BIBLIOGRAPHIE

Sites internet:

<http://tpemiragesg3.free.fr/index.htm> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://lyceebrizeux.cpage.pagesperso-orange.fr/Mirages.htm> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://matthieu.net/cheminlepluscourt/explications.php> (Valide à la date du 7/3/2011)

<http://en.wikipedia.org/wiki/Mirage> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://philippe.boeuf.pagesperso-orange.fr/robert/physique/mirage.htm> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://www.astrosurf.com/luxorion/cielbleu-rayonvert4.htm> (Valide à la date du 7/3/2011)

<http://www.physagreg.fr/capes-physique-montage-1-refraction.php> (Valide à la date du 14/3/2011)

<http://h0.web.u-psud.fr/phenomenesoptiques/mirages.php> (Valide à la date du 8/3/2011)

http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_eikonale#Lois_de_Snell-Descartes_.28Harriot.2C_1598.29 (Valide à la date du 15/3/2011)

<http://povda.e-monsite.com/rubrique,formation,1103138.html> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://gwenaelm.free.fr/Physique/Physchim/capes/Fichiers/MP01-Refraction.pdf> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://www.mda.cinvestav.mx/personal/webpersonal/jjalvarado/cinvetav/EF.HTM> (Valide à la date du 13/3/2011)

<http://www.insp.jussieu.fr/Spectroscopie-par-deflexion.html> (Valide à la date du 14/3/2011)

<http://apelh.free.fr/mirage/dossier2.pdf> (Valide à la date du 8/3/2011)

http://www-lpl.univ-paris13.fr:8088/lumen/Ressources_Diverses.htm (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://www.cosmovisions.com/CTmirages.htm> (Valide à la date du 7/3/2011)

<http://odpf.udppc.asso.fr/anterieures/xiii/gr-11/memoire.pdf> (Valide à la date du 14/3/2011)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fata_Morgana (Valide à la date du 26/5/2011)

http://lecerveau.mcgill.ca/flash/capsules/articles_pdf/mirages.pdf (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://astro-forum.forumactif.com/t1103-l-astrophysique-a-la-rescousse-des-maths> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://www.meteolafleche.com/mirage.html> (Valide à la date du 8/3/2011)

<http://ophtasurf.free.fr/mirages/mirages.htm> (Valide à la date du 7/3/2011)

<http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9fraction> (Valide à la date du 8/3/2011)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Chemin_optique (Valide à la date du 14/3/2011)

http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_eikonale (Valide à la date du 14/3/2011)

http://fr.wikipedia.org/wiki/Indice_de_r%C3%A9fraction (Valide à la date du 8/3/2011)

9. INDEX DES ILLUSTRATIONS

Illustration 1: Explication d'un mirage	9
Illustration 2: Mirage supérieur 1	9
Illustration 3: Mirage supérieur 2	9
Illustration 4: Mirage supérieur 3	9
Illustration 5: Explication mirage supérieur (gradient)	10
Illustration 6: Explication mirage supérieur (trajet des rayons lumineux).....	11
Illustration 7: Mirage supérieur 4	11
Illustration 8: Fata Morgana (Finlande).....	12
Illustration 9: Fata Bromosa (Groenland).....	12
Illustration 10: Photo traitée.....	15
Illustration 11: Tableur utilisé pour transformer les coordonnées x et y qui étaient en pixels en mètres	15
Illustration 12: Modélisation de la courbe du rayon laser avec les points relevés.....	16
Illustration 13: Rayures placées en diagonale	16
Illustration 14: Rayures placées horizontalement.....	17
Illustration 15: Rayures placées verticalement.....	18

10. CREDITS D'ILLUSTRATION :

<http://membres.multimania.fr/tpemirages0809/sch-mirage2.jpg> (explication d'un mirage)
http://www.lamap.fr/bdd_image/631_1580_mirage05.gif (explication mirage supérieur (gradient))
http://www.lamap.fr/bdd_image/631_1579_mirage04.jpg (mirage supérieur-camion)
<http://s2.e-monsite.com/2010/01/18/76744761mirageinf-jpg.jpg> (mirage supérieur-voiture + moto)
<http://img160.imageshack.us/img160/710/mirage2xl6.jpg> (mirage supérieur-désert)
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/07/Mirage_Superieur.png(explication mirage supérieur (trajet des rayons lumineux))
http://vivrelibre.blogvie.com/files/2009/02/mirage_froid1.jpg (mirage supérieur 4-icebergs)

11. ANNEXES

11.1. Carnet de bord

16 février

Répartition des tâches :

- Théorie : Thomas, Morgane (comprendre physiquement les équations, lien indice température, réflexion totale rapport avec les mirages ?)
- Pratique : Paola, Caroline, Isabelle, Roxane, Jérémy, Feier (relation indice température, pression, changement d'indice avec changement de déviation)

09 mars

- Théorie :
 - mise en commun des recherches effectuées pendant les vacances
 - on a essayé de comprendre l'équation eikonale
 - on a étudié la relation entre z et x (avec l'angle d'incidence initial) (Snell Descartes)
- Pratique :
 - mise en commun des recherches effectuées pendant les vacances
 - détermination des expériences à effectuer :
 - gradient de T°
 - changement d'indice
 - inventaire et recherche du matériel nécessaire (Darwin + bureau Mr Clevers)
 - recherches infructueuses à la BU

→ Pour la semaine suivante : réunir tout ce qu'il faut pour les expériences

+ essayer de comprendre l'équation eikonale

16 mars

- Théorie :
 - compréhension de l'équation eikonale
 - snell descartes
- Pratique :
 - utilisation de la cuve des groupe de M. Honoré pour réaliser l'expérience avec le gradient d'indice (sel) :
 - mesure de différentes hauteurs de laser
 - prise de photos

- problème à résoudre la prochaine fois :
- parallélisme du laser par rapport à la table et la cuve
- détermination précise de l'angle d'incidence du laser

→ Pour la semaine suivante: utiliser ce qu'on a trouvé avec la formule prenant en compte l'angle d'incidence + modification expérience eau salée + réalisation expérience avec alcool.

23 mars

Répartition en 3 groupes:

⑩ Théorie :

- traitement numérique de données sur maple (tenter de résoudre l'équation (Thomas et Jérémy))
- lecture de tutoriels sur openCV pour aboutir à un traitement d'image (créer un mirage sur une photo) (Morgane, Isabelle, Feier)

⑩ Pratique :

- refaire l'expérience avec mesure précise des angles d'incidences pour pouvoir ensuite traiter les images (obtention des points de la courbe du laser) (Caroline, Roxane, Paola)

06 avril

- Théorie : résolution de l'équation (Thomas, Jérémy)
- Pratique :
 - Morgane, Feier, Isabelle : abandon de l'idée de créer un programme => trop compliqué! approche plus optique de la chose : dessin, calcul angles incidences, image obtenue avec et sans cuve entre objet et lentille.
 - Caroline, Roxane, Paola :Expérience chaleur n'a pas marché (nécessite d'une source de chaleur sous la cuve) + refait expérience densité avec le sel mais par manque de temps on n'a pas pu observer l'effet mirage

04 mai

- Théorie :
 - Thomas et Jérémy : trouver une solution de l'équation eikonale (pas réussi donc fois suivante avec scilab) + explication de la théorie au reste du groupe pour chacun connaisse l'ensemble du sujet
- Pratique :
 - Morgane, Feier, Isabelle : installation de la bibliothèque openCV et lecture du tutoriel pour se familiariser avec openCV.
 - Paola, Roxane, Caroline : pas de manipulation car Mr YON étant absent nous n'avions pas le droit d'utiliser les lasers.

11 mai

- Théorie : travail sur Scilab : résolution de l'équation eikonale (Jérémy,Thomas)
- Pratique :

- Morgane, Feier, Isabelle : travail faux donc on a recadré la façon dont nous allons aborder le problème (rayons qui viennent de la lentille, d'où viennent-ils? et non on fait passer un rayon et on regarde où il va.) + indice varie en fonction de z alors que dans notre ancienne approche on ne l'avait pas pris en compte.
- Paola, Roxane, Caroline : expérience avec le laser, obtenu un angle d'incidence en utilisant la méthode de la tangente. On a pris toutes les mesures de la cuve (oillet-distance laser cuve). prise de photo.

18 mai

- Théorie : Thomas, Jérémy : comparaison théorie et pratique avec Maple : échec.
- Pratique :
 - Morgane, Feier, Isabelle : pistes de réflexion pour le dossier écrit. On a essayé de comprendre le problème que l'on s'était posé précédemment mais nous n'avons pas réussi à trouver une loi de conjugaison prenant en compte l'incidence des rayons.
 - Paola, Roxane, Caroline : la cuve a été vidée par le groupe de Mr HONORE donc l'expérience n'a pas pu être réalisée. Préparation de la cuve pour la semaine suivante (8kg de sel pour 23 litres d'eau pour créer un gradient d'indice) + analyse d'une photo avec Gimp : donner les x et y de plusieurs points du rayon lumineux pour que l'on puisse comparer à la théorie.

25 mai

- Théorie : Thomas, Jérémy : essai de modélisation de la courbe du faisceau + essai de comparaison entre la théorie et les mesures (ne marche pas)
- Pratique:
 - Morgane, Feier, Isabelle : mise d'une feuille rayée derrière la cuve. Prise de photos et analyse des photos pour visualiser la déviation
 - Paola (aide Mr YON) : tableur pour analyser les photos (x et y en pixels convertis en mètres)
 - Roxane, Caroline : essai avec la cuve et le mélange réalisé la semaine précédente. Non concluants car le sel n'était pas assez dissous, homogénéisation du fond de la cuve pour que le sel soit plat. Réalisation de l'expérience la semaine prochaine

01 juin

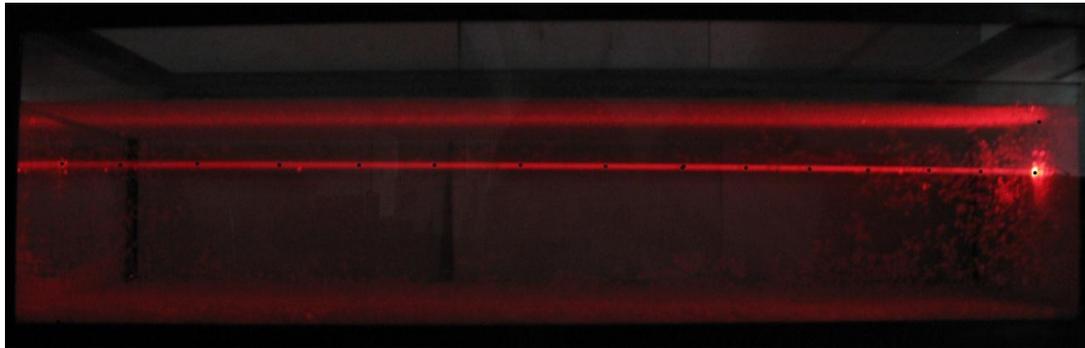
- Théorie : Thomas: Mise des mesures dans le programme Roxane, Paola, Caroline : expérience avec la cuve, pour un seul angle
- pratique:
 - (Roxanne, Paola, Caroline: expérience avec la cuve pour un seul angle d'incidence (les autres ne marchaient pas), relever de 6 mesures, prise de photos, analyse des photos avec « Gimp » et retransmission des résultats à Thomas
 - (Morgane, Feier, Isabelle: début de rédaction du rapport et mise en place de l'organisation de la rédaction:
 - Morgane, Isabelle, Feier : présentation des mirages
 - Thomas, Jérémy : partie théorique
 - Paola, Roxane, caroline : partie expérience

11 juin

Nous avons, avec l'enseignant, regarder le premier jet de notre dossier pour voir ce qu'il y avait à modifier, rajouter ou enlever. Puis nous avons commencé à corriger chacun notre partie de dossier.

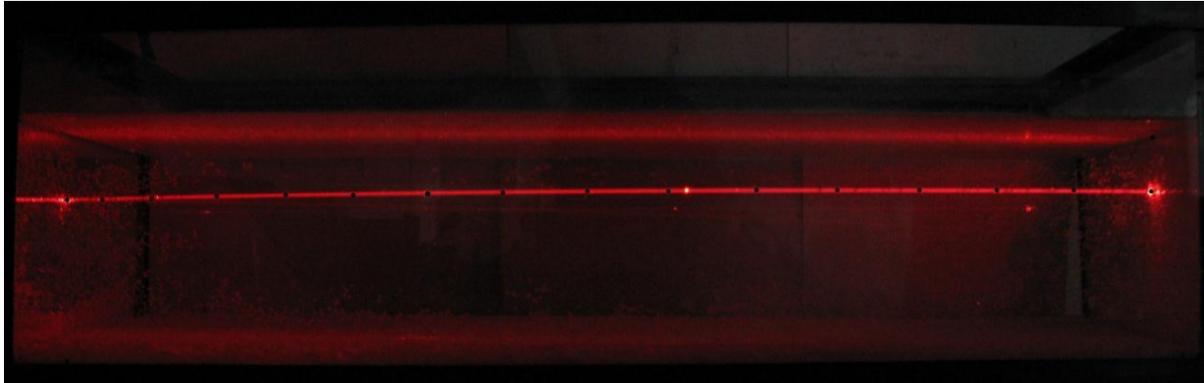
11.2. Traitement d'images

Traitement image Angle 0 :



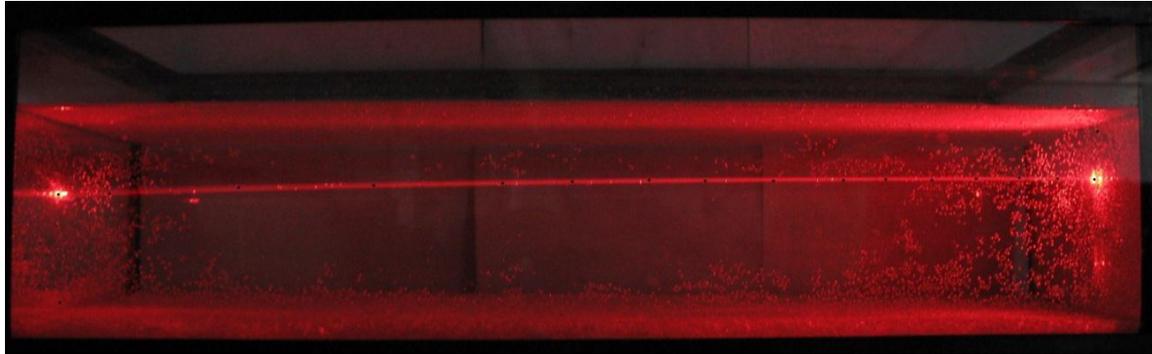
	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	176	540	entrée à gauche		0	0,15
3	340	548			0,04	0,15
4	496	548			0,07	0,15
5	680	548			0,1	0,15
6	852	552			0,14	0,15
7	1048	556			0,18	0,15
8	1236	560			0,22	0,16
9	1472	560			0,27	0,16
10	1728	564			0,32	0,16
11	1988	564			0,37	0,16
12	2216	564			0,42	0,16
13	2456	564			0,46	0,16
14	2704	568			0,51	0,16
15	2932	564			0,56	0,16
16	3112	568			0,6	0,16
17						
18						
19	3124	84	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	164	696	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22						
23	hauteur du <u>reservoir</u> en m		0,2			
24	longueur		0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pix		612			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pi		2960			
28						

Traitement image Angle 0,8 :



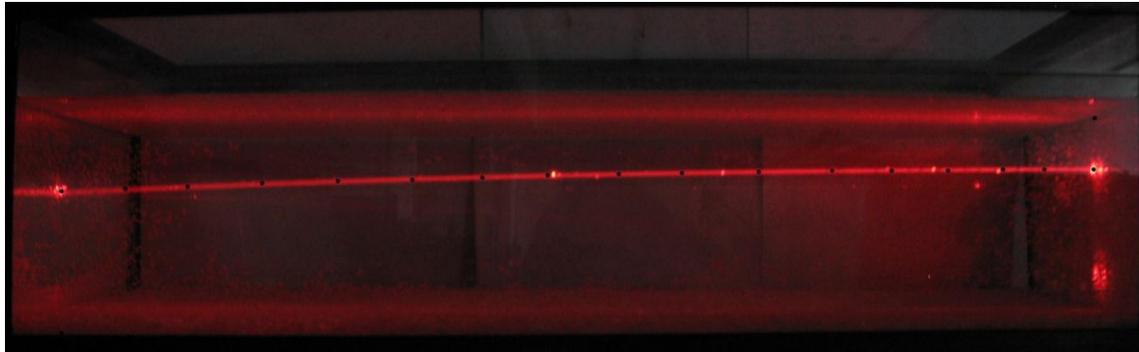
	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	141	486	entrée à gauche		0	0,15
3	333	489			0,04	0,15
4	525	489			0,09	0,15
5	717	489			0,13	0,15
6	921	489			0,17	0,15
7	1122	489			0,22	0,15
8	1341	486			0,27	0,15
9	1542	486			0,31	0,15
10	1752	483			0,36	0,15
11	1938	480			0,4	0,15
12	2124	477			0,44	0,15
13	2289	477			0,48	0,15
14	2463	474			0,52	0,15
15	2625	468			0,55	0,15
16	2748	465			0,58	0,14
17	2835	465			0,6	0,14
18						
19	2835	60	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	138	621	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22						
23	hauteur du <u>reservoir</u> en m		0,2			
24	longueur		0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pix		561			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pix		2697			
28						

Traitement image Angle 1,2 :



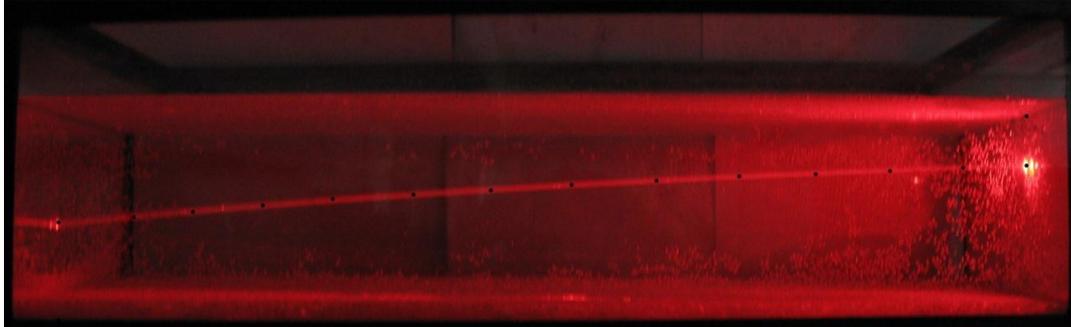
	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	164	468	entrée à gauche		0	0,14
3	260	468			0,02	0,14
4	362	470			0,05	0,15
5	470	466			0,07	0,14
6	584	464			0,09	0,14
7	706	464			0,12	0,14
8	816	464			0,15	0,14
9	998	464			0,19	0,14
10	1176	460			0,23	0,14
11	1322	458			0,26	0,14
12	1526	456			0,3	0,14
13	1702	454			0,34	0,14
14	2040	450			0,42	0,14
15	2394	442			0,5	0,13
16	2728	428			0,57	0,13
17	2984	426			0,63	0,13
18						
19	2860	138	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	156	594	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22	hauteur du <u>reservoir</u> en m					
23	longueur		0,2			
24			0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pix▶		456			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pi▶		2704			
28						

Traitement image Angle 1,72:



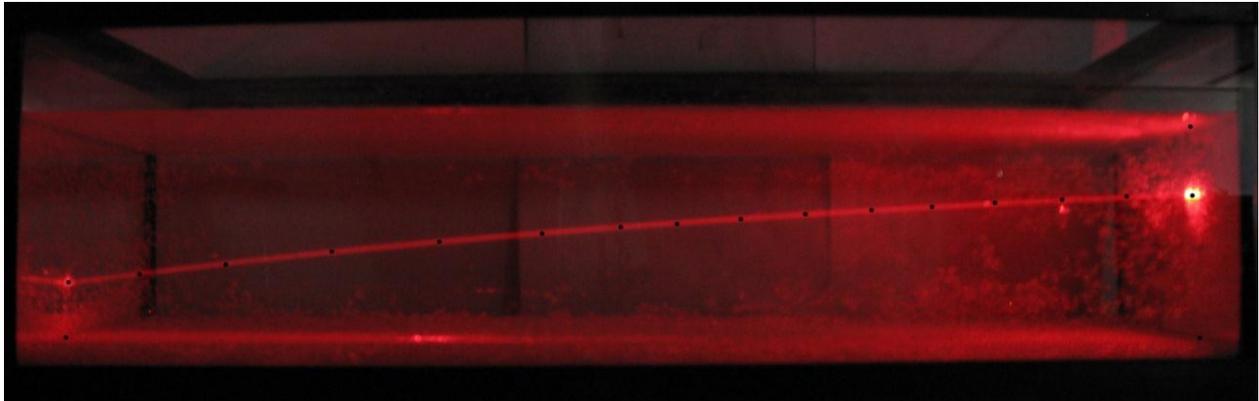
	A	B	C	D	E	F	
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié	
2	144	486	entrée à gauche		0	0,15	
3	273	486			0,03	0,15	
4	381	486			0,05	0,15	
5	525	483			0,09	0,15	
6	672	483			0,12	0,15	
7	828	483			0,15	0,15	
8	1020	480			0,2	0,15	
9	1221	477			0,24	0,15	
10	1386	474			0,28	0,15	
11	1572	471			0,32	0,15	
12	1743	465			0,36	0,14	
13	1926	459			0,4	0,14	
14	2121	456			0,44	0,14	
15	2319	450			0,48	0,14	
16	2514	441			0,53	0,14	
17	2676	435			0,56	0,13	
18	2844	429			0,6	0,13	
19							
20	2844	57	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm				
21	141	621	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0				
22							
23	hauteur du <u>reservoir</u> en m						
24	longueur		0,2				
25			0,6				
26							
27	Hauteur du <u>reservoir</u> en pix▶		564				
28	Longueur du <u>reservoir</u> en pi▶		2703				

Traitement image Angle 4,2 :



	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	150	456	entrée à gauche		0	0,15
3	327	450			0,04	0,15
4	531	441			0,08	0,15
5	738	432			0,13	0,14
6	951	426			0,18	0,14
7	1182	414			0,23	0,14
8	1419	402			0,28	0,13
9	1644	387			0,33	0,13
10	1860	375			0,38	0,12
11	2085	363			0,43	0,12
12	2280	345			0,47	0,11
13	2475	327			0,52	0,11
14	2640	312			0,55	0,1
15	2850	287			0,6	0,09
16						
17						
18						
19	2850	24	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	150	594	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22	hauteur du <u>reservoir</u> en m					
23	longueur		0,2			
24			0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pix▶		570			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pi▶		2700			
28						

Traitement image Angle 4,85:



E2						
= (A2-\$A\$20)/\$C\$27*\$C\$24						
	A	B	C	D	E	F
1	x (pixels)	y (pixels)			x modifié	y modifié
2	160	516	entrée à gauche		0	0,13
3	318	514			0,03	0,13
4	474	506			0,07	0,13
5	636	498			0,1	0,13
6	788	487,7			0,14	0,12
7	934	480			0,17	0,12
8	1094	470			0,21	0,12
9	1250	458			0,24	0,11
10	1404	446			0,27	0,11
11	1540	438			0,3	0,1
12	1730	422			0,35	0,1
13	1978	402			0,4	0,09
14	2238	378			0,46	0,08
15	2494	346			0,51	0,07
16	2702	322			0,56	0,06
17	2874	302			0,6	0,05
18						
19	2880	166	sol à droite du <u>reservoir</u> correspond à y=0 cm			
20	164	686	haut gauche du <u>reservoir</u> correspond à x=0			
21						
22						
23	hauteur du <u>reservoir</u> en m		0,2			
24	longueur		0,6			
25						
26	Hauteur du <u>reservoir</u> en pixels		520			
27	Longueur du <u>reservoir</u> en pixels		2716			
28						
29						

11.3. Résultat de la comparaison avec la théorie

26	Y	n				
27	0,152	169,6	13450,83	13007,11	8748,9	
28	0,153	170,2	13498,1	13052,83	8779,66	
29	0,153	170,2	13498,1	13052,83	8779,66	
30	0,153	170,2	13498,1	13052,83	8779,66	
31	0,153	170,2	13498,1	13052,83	8779,66	
32	0,153	170,2	13498,1	13052,83	8779,66	
33	0,152	169,6	13450,83	13007,11	8748,9	
34	0,152	169,6	13450,83	13007,11	8748,9	
35	0,151	169	13403,38	12961,23	8718,04	
36	0,150	168,4	13355,77	12915,19	8687,07	
37	0,149	167,8	13307,98	12868,98	8655,99	
38	0,149	167,8	13307,98	12868,98	8655,99	
39	0,148	167,19	13260,02	12822,61	8624,8	
40	0,145	165,98	13163,59	12729,35	8562,07	
41	0,144	165,37	13115,1	12682,46	8530,54	
42	0,144	165,37	13115,1	12682,46	8530,54	
43						

11.4. Démonstration de l'équation Eikonale

N.B : afin de clarifier la démonstration, l'équation principale est surlignée en jaune

On sait que :

$$\overrightarrow{\text{Grad } L} = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial L}{\partial r_i} \vec{e}_i$$

Et que :

$$n\vec{u} = n \frac{d\vec{r}}{ds} = n \sum_{i=1}^{i=k} \frac{dr_i}{ds} \vec{e}_i = n \sum_{i=1}^{i=k} u_i \vec{e}_i$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{Grad } L} = n\vec{u} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \frac{\partial L}{\partial r_i} = nu_i = n \frac{dr_i}{ds}$$

On dérive l'expression par rapport à ds :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \right)$$

On va développer le premier terme.

Pour toute fonction $f(r_1, r_2, r_3 \dots)$, $df = \sum \frac{\partial f}{\partial r_j} dr_j$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{1}{ds} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) dr_j = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{dr_j}{ds} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right)$$

Or, on sait que

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = n \frac{dr_j}{ds} \Rightarrow \frac{dr_j}{ds} = \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial r_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right)$$

On peut dire $\frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)$ (Maxuelle)

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)$$

Pour toute fonction $f(r_1, r_2, r_3 \dots)$: $\frac{\partial (f^2)}{\partial r_i} = 2 f \frac{\partial f}{\partial r_i}$

Donc $\frac{\partial L}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 \right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 \right) = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 \right)$$

On rappelle que :

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} = n u_j \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 = n^2 u_j^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 = n^2 \sum_{j=1}^{j=k} u_j^2 = n^2 \|\vec{u}\|^2$$

Or $\|\vec{u}\|^2 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial L}{\partial r_j} \right)^2 = n^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{1}{2n} \frac{\partial (n^2)}{\partial r_i}$$

On remarque alors que :

$$\frac{\partial(n^2)}{\partial r_i} = 2n \frac{\partial n}{\partial r_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{\partial n}{\partial r_i}$$

On revient maintenant à l'équation du début :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \right)$$

Donc $\frac{\partial n}{\partial r_i} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \right) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial r_i} \vec{e}_i = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr_i}{ds} \vec{e}_i \right)$

En appliquant à tout les r_i on trouve :

$$\vec{\text{Grad}} n = \frac{d}{ds} (n\vec{u}) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right)$$

11.5. Résolution de l'équation Eikonale à l'aide de Scilab

```

1 k=-0.01;
2
3
4 fonction [n,dndz]=Calculn(z) // fonction Calculn qui retourne n et dn/dz avec pour argument z
5 n=sqrt(2+z)
6 dndz=1/(2*sqrt(2+z))
7 endfunction
8
9
10 fonction Xpoint=fdzdx(t,X) // X vecteur de coordonnées X(1) et X(2)
11 ..... // Xpoint vecteur de coordonnées Xpoint(1) et Xpoint(2)
12 ..... // Xpoint est la dérivée de X par rapport au temps
13 Xpoint(1)=X(2);
14 [n,dndz]=Calculn(X(1)) // On déclare que la variable utilisé (argument) par la fonction Calculn est X(1)
15 Xpoint(2)=n/k^2*dndz;
16 endfunction
17 ..
18
19
20 Xinit=[12.5;1.27]; // Position initiale de X
21 TabX=linspace(0,2,500); // Instants auxquels on souhaite résoudre le système, abscisse de 0 à 2 avec 500 points
22 Xresult=ode(Xinit,0,TabX,fdzdx); // Résolution de l'équation
23 clf
24 plot2d(TabX,Xresult(1,:)) // On trace la courbe z en fonction de x
25 xtitle('','x','z'); // Légende des axes
26 plot2d(TabX,Xresult(2,:)) // On trace la courbe dz en fonction de x

```