Dans tous les exercices on considérera un risque de première espèce de 5%.

Exercice 1 — Etudions les OGM — 4 points

Afin de tester la toxicité d'une variété de maïs OGM, un groupe de 10 rats a été nourri avec ce maïs. Un groupe témoin de 12 rats a été nourri avec du maïs non-OGM. Après 90 jours, on mesure le poids du foie de chaque rat. Les résultats ont été les suivants : sur le groupe OGM on a trouvé un poids moyen de 16,9 grammes avec un écart type de 1,21 gramme sur le groupe nonOGM on a trouvé un poids moyen de 16,2 grammes avec un écart type de 1,1025 gramme

Peut on en conclure que la consommation d'OGM modifie le poids du foie ?

Exercice 2 — Fish distribution — 4 points

Pour des grandes valeur de λ (disons $\lambda \geq 1000$), la loi de poisson peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ (et oui le même et unique λ).

1. donnez un exemple d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
2. si W est une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre λ que l'on sait supérieure à 1000. Proposez une approximation de la loi des variables aléatoires X, Y et Z suivantes

$$X = \frac{W - \lambda}{\lambda} \qquad Y = \frac{W - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \qquad Z = \frac{\overline{W} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}}$$

avec $\overline{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i$ la moyenne empirique de n réalisations de cette variable aléatoire.

3. avec ces hypothèses, quelle serait la loi des variables aléatoires suivantes :

$$A = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (W_i - \lambda)^2 \qquad B = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (W_i - \overline{W})^2$$

Exercice 3 — avant/après — 6 points

Afin d'évaluer un programme de réhabilitation, on soumet les douze premiers bénéficiaires à une même série de tests avant de rentrer dans le programme puis six mois plus tard à leur sortie du programme. Ces tests visent à évaluer la capacité à réaliser des tâches comme emballer des paquets, laver des assiettes... Les scores sont des notes qui vont de 0 (ne sait rien faire) jusqu'à 40 (travail excellent). Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus :

bénéficiaire	score avant	score après
1	11	13
2	6	10
3	5	7
4	35	37
5	22	21
6	6	8
7	34	35
8	25	24
9	14	18
10	39	45
11	25	23
12	16	19

1. A votre avis, ce programme améliore t'il les capacités des bénéficiaires ?
2. Ce programme améliore t'il mieux les capacités des bénéficiaires ayant un score initial inférieur à 20 ?

Exercice 4 — Roselyne et les lions — 6 points

Les résultats observés de l'évolution d'une bilardose congrogène (une certaine maladie) à la suite de l'emploi de l'un ou l'autre des traitements daloricine (D) et mitrovial (M) figurent dans le tableau ci-dessous en pourcentage :

	guérison	amélioration	état stationnaire
daloricine (D)	36 %	14 %	12 %
mitrovial (M)	22 %	8 %	8 %

1. L'étude ayant portée sur 150 cas, peut-on en conclure que les traitements A et B sont-ils significativement différents quant à leur efficacité ?
2. quelle serait la réponse si les données n'avaient portée que sur 1500 cas (dix fois plus) ?
3. selon vous, est-il exact de dire que la probabilité de guérir quelque soit le traitement est de 0,6 ?

---

normale $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(X > 1,96) = 0,025$
normale $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(X > 1,65) = 0,05$
student $X \sim T_{11}$, a 11 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 2,20) = 0,025$
student $X \sim T_{11}$, a 11 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 1,80) = 0,05$
student $X \sim T_{12}$, a 12 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 2,18) = 0,025$
student $X \sim T_{12}$, a 12 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 1,78) = 0,05$
student $X \sim T_{20}$, a 20 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 2,09) = 0,025$
student $X \sim T_{20}$, a 20 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 1,72) = 0,05$
student $X \sim T_{22}$, a 22 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 2,07) = 0,025$
student $X \sim T_{22}$, a 22 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 1,71) = 0,05$
chi 2 $X \sim \chi^2_2$, a 2 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 10,59) = 0,005$
chi 2 $X \sim \chi^2_2$, a 2 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 9,21) = 0,01$
chi 2 $X \sim \chi^2_2$, a 2 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 7,35) = 0,025$
chi 2 $X \sim \chi^2_2$, a 2 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 5,99) = 0,05$
chi 2 $X \sim \chi^2_3$, a 3 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 12,83) = 0,005$
chi 2 $X \sim \chi^2_3$, a 3 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 11,34) = 0,01$
chi 2 $X \sim \chi^2_3$, a 3 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 9,35) = 0,025$
chi 2 $X \sim \chi^2_3$, a 3 degrés de liberté $\mathbb{P}(X > 7,81) = 0,05$

Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire normale centrée réduite. Soit $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ un échantillon de n réalisation i.i.d. de cette variable aléatoire. [La loi du χ^2] On appelle loi du χ^2 à n degrés de libertés la loi de la variable aléatoire $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i^2$

[La loi de student] On appelle loi de student à n degrés de libertés la loi de la variable aléatoire T_n

$$T_n = \frac{N}{\sqrt{\frac{X_n}{n}}} \qquad \begin{array}{l} N \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \\ X_n \sim \chi^2_n \end{array}$$

[Théorème du χ^2 (Pearson)] pour N_{ij} effectif observés et pour n_{ij} effectif théorique

$$X_{ij} = \frac{N_{ij} - n_{ij}}{\sqrt{n_{ij}}} \qquad \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} X_{ij}^2 \longrightarrow \chi^2_{(I-1)(J-1)}$$

la variable $T_{n_x+n_y-2}$ suit une loi de student à $n_x + n_y - 2$ degrés de liberté :

$$T_{n_x+n_y-2} = \sqrt{n_x + n_y - 2}\, \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right) S^2_{xy}}}$$

avec $S^2_{xy} = S^2_x + S^2_y = \sum_{i=1}^{n_x} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_y} (Y_i - \overline{Y})^2$