

Juliette COMTE
Mathilde RASCOUSSIER
Juliette NOURY
Hippolyte PERRAUD
Elias CHATAIGNER
Thomas GUILLOT



Rapport du Projet Scientifique encadré

Modèles de dynamiques des populations et écologie



Date de Remise du rapport : 15/06/2024

Référence du projet : STPI/PSE/2024-40

Intitulé du projet : Modèles de dynamiques des populations et écologie

Type de projet : Modélisation numérique

Objectifs du projet : L'objectif de ce projet est de modéliser les dynamiques de populations au cours du temps, notamment en étudiant les différentes interactions présentes dans un environnement et les facteurs pouvant influencer la croissance, le déclin d'une population. Ce projet a ainsi pour objectif de nous permettre de développer des compétences en programmation, analyse de données et simulation numérique. De plus, il nous permet de perfectionner nos capacités à travailler en groupe via la répartition des différentes tâches et la communication des différents résultats. Enfin, ce projet nous permet de découvrir plus concrètement des problématiques réelles et complexes rencontrées dans le domaine de l'ingénierie.

Mots-clefs du projet : Ressources ; Populations ; Dynamique ; Evolution

Table des matières

1	Remerciements	4
2	Introduction	1
2.1	Méthodologie et répartition du travail	1
3	Modèles de dynamiques de population	2
3.1	Modèle Malthusien	2
3.1.1	Explication du modèle	2
3.1.2	Analyse du modèle de Malthus	4
3.1.3	Exemple concret	5
3.2	Modèle de Verhulst	5
3.2.1	Explication du modèle : croissance logistique	5
3.2.2	Analyse du modèle de Verhulst	6
3.2.3	Exemple concret	8
3.3	Modèle de Lotka-Volterra	8
3.3.1	Explication du modèle	9
3.3.2	Analyse du modèle Lotka-Volterra	9
3.3.3	Exemple concret	14
3.4	Modèle avancé du Lotka-Volterra	15
4	Conclusion	20
5	Annexes	21
6	Bibliographie	29

Notations, Acronymes

Modèle de Malthus :

P : Représente la Population à un instant t

r : Taux de croissance intrinsèque = taux de natalité – taux de mortalité

Modèle de Verhulst :

K : La capacité de charge/d'accueil valeur maximale que la population peut atteindre en considérant les limites de l'environnement

$y(t)$: Population à un instant t

y_0 : Population initiale du système

a : Taux de croissance intrinsèque

Modèle Lotka-Volterra :

$V(t)$: Fonction représentant la proportion de la population qui a accès aux ressources en fonction du temps

$R(t)$: Fonction représentant les ressources en fonction du temps

α : Taux de reproduction des proies

β : Taux de mortalité des proies

γ : Taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées

δ : Taux de mortalité intrinsèque des prédateurs

Modèle avancé du Lotka-Volterra :

x : Pollution

y : Population

z : Ressource(s)

1 Remerciements

En premier lieu, nos remerciements s'adressent à notre enseignant-encadrant, Monsieur Samuel Paillat qui s'est montré disponible et pertinent lors de nos recherches sur la réalisation de ce projet. Il a manifesté une écoute attentive envers notre groupe et s'est montré investi lorsque nous faisons face à des difficultés.

Nous tenons également à remercier l'INSA de Rouen Normandie pour nous avoir offert l'opportunité de travailler sur des projets qualitatifs.

Enfin, nous remercions chaque membre de notre équipe de projet pour la motivation, l'investissement et la régularité du travail apportés.

2 Introduction

Les dynamiques de population sont un secteur de l'écologie qui s'intéresse à la fluctuation dans le temps du nombre d'individus dans une population d'êtres vivants. Les modèles mathématiques sont primordiaux dans la compréhension et dans la prévision de ces dynamiques en fournissant des instruments importants aux biologistes et aux écologistes. L'enjeu est alors de tenter de prédire l'évolution des populations, qu'il s'agisse d'une extinction de la population, de cycles de croissances, de déclin ou encore de dynamiques plus complexes telles que des stabilisations et des oscillations, qui peuvent être chaotiques ou régulières.

Depuis des centaines d'années, les scientifiques cherchent à modéliser les dynamiques de population. Il est essentiel de comprendre l'évolution des populations afin de pouvoir anticiper des événements, mais aussi apprendre à mieux gérer nos ressources et nos activités telles que la réintroduction d'espèces dans leurs états naturels. Ainsi ces modèles sont essentiels pour la démographie. *Il s'agit de l'étude quantitative et qualitative des caractéristiques des populations et de leurs dynamiques*¹. Ce domaine est au centre des politiques de population mais peut aussi être utilisé pour des études de marché afin de toujours mieux cibler les profils. C'est pourquoi de nombreux modèles avec différents niveaux de complexité se sont succédés à travers les années. Aucun n'est parfait, puisqu'il est impossible de prendre en compte tous les paramètres. Tout est une question d'approximation. Nous allons ainsi vous présenter les plus connus.

Dans notre projet, nous avons choisi d'étudier trois modèles mathématiques existants en suivant un ordre chronologique.

Tout d'abord, nous avons examiné le modèle de Malthus, développé par Thomas Malthus au début du XIXe siècle qui décrit une croissance exponentielle simple des populations sans tenir compte des limitations environnementales. Ensuite, pour intégrer ces limitations, nous avons analysé le modèle de Verhulst élaboré par Pierre-François Verhulst, également appelé modèle logistique, qui inclut la notion de capacité de charge. Nous avons ensuite abordé le modèle de Lotka-Volterra développé par Alfred James Lotka et Vito Volterra, qui se concentre sur les interactions entre les espèces, comme les relations proies-prédateurs. Enfin, nous avons exploré un modèle avancé de Lotka-Volterra, afin d'incorporer des facteurs supplémentaires et ainsi obtenir une représentation plus réaliste des dynamiques de population.

2.1 Méthodologie et répartition du travail

La méthodologie pour un travail de groupe est primordiale. Or, avant d'être en mesure de savoir comment répartir le travail pour les semaines suivantes, nous avons convenu d'effectuer d'importantes recherches pour mieux comprendre notre sujet. C'est seulement après la deuxième séance que se sont profilés trois axes de recherche. Nous avons donc fait 3 groupes de 2, chacun s'occupant d'une partie, c'est-à-dire le modèle de

1. définition wikipedia :<https://fr.wikipedia.org/wiki/Demographie>

Maltus, celui de Verhulst et celui de Lotka-Volterra. La décision d'améliorer le modèle du Lotka-Volterra a ensuite été prise et une redistribution des tâches a alors vu le jour.

Pour le bon fonctionnement du projet, nous avons souhaité répartir le travail en fonction des centres d'intérêt et compétences de chacun. Ainsi ceux qui étaient plus à l'aise avec la partie informatique ont commencé à rechercher des méthodes, les autres se concentrant sur leur partie écrite du rapport. Ensuite, le code a été rédigé avant que l'ensemble du groupe se consacre à essayer des coefficients pour retrouver l'allure de la courbe issue de "Limith to growth" dont nous parlerons dans la suite. Lorsque le travail arriva à sa fin, une partie du groupe s'est focalisée sur la poursuite de l'écriture du rapport tandis que d'autres tentaient d'apporter quelques ajouts et conclusions à nos recherches.

Lors des séances en cours, chacun effectuait un rapport oral des avancées de la semaine et des possibles questions nécessitant l'avis de l'ensemble du groupe. Nous souhaitons que chacun puisse pleinement se retrouver dans ce travail et par la même occasion puisse avoir une vision d'ensemble du projet.

Mathilde RASCOUSSIER	Hippolyte PERRAUD	Juliette COMTE
Modèles de Lotka – Volterra Rédaction globale	Modèles de Lotka – Volterra Codes (2 et 3 variables)	Modèle de Maltus Rédaction globale
Juliette NOURY	Thomas GUILLOT	Elias CHATAIGNER
Modèle de Maltus Rédaction globale	Modèle de Verhulst Diaporama	Modèle de Verhulst Poster

FIGURE 1 – Tableau répartitions des tâches

3 Modèles de dynamiques de population

3.1 Modèle Malthusien

3.1.1 Explication du modèle

Le modèle malthusien est une théorie sur la dynamique de la population. Thomas Malthus, économiste à l'origine de ce modèle a proposé cette théorie dans son ouvrage de 1798 intitulé *Essai sur le principe de population*². L'idée centrale du modèle malthusien est qu'une population croît indéfiniment de manière exponentielle, c'est à dire qu'il s'agit d'une augmentation à un taux constant proportionnel à sa taille. A l'inverse, les moyens de subsistance tels que la production alimentaire ont tendance à croître de manière arithmétique c'est à dire qu'ils augmentent d'une quantité constante à chaque intervalle

2. Essai sur le principe de population, Thomas MALTHUS, 1798

de temps. Ainsi la population croît beaucoup plus vite que les ressources. Ceci se traduit donc par une équation discrète de la forme :

$$P_{n+1} = aP_n$$

Avec P_{n+1} la taille de la population au temps $n + 1$ et " a " le paramètre de croissance géométrique. En effet, a permet de déterminer dans quelle mesure la population augmente ou diminue à chaque génération en fonction de la taille actuelle de la population. Ainsi, nous avons 3 cas de figures possibles : si $a < 1$, la population diminue de manière exponentielle, si $a=1$ la population est constante et si $a > 1$ la population augmente de manière exponentielle.

Nous établissons une équation différentielle pour le modèle en temps continu :

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

- $\frac{dP}{dt}$ représente le taux de croissance de la population par rapport au temps
- P est la taille de la population à un moment donné
- r est le taux de croissance intrinsèque (taux natalité - taux mortalité).

La solution de l'équation différentielle est de la forme : $P(t) = K \times e^{rt}$

Ce modèle affirme que plus la population est grande, plus elle se reproduit rapidement, entraînant une augmentation exponentielle. Cependant, ce modèle présente des limites. Tout d'abord, il ne prend pas en compte les contraintes environnementales telles que les prédateurs et les limitations des ressources. Cette simplification donne une vision idéalisée de la croissance démographique, appelée "explosion démographique". De plus, il suppose un taux de croissance constant, irréaliste à long terme. Les ressources alimentaires ne croissent pas linéairement et sont influencées par la technologie et d'autres facteurs tels que les facteurs sociaux, politiques et économiques qui peuvent également affecter cette croissance démographique.

Malthus a prédit qu'à un certain point, les exigences d'une population humaine dépasseraient les capacités agricoles. Ceci, à son tour, déclencherait des changements sociaux radicaux, y compris le déclin de la population et, selon Malthus, un état de misère. Ce point de bascule pourrait entraîner des famines et des guerres qui permettraient de réduire la population.

Pour éviter cette catastrophe, Malthus a suggéré deux types de contrôles qui limiteraient la croissance démographique : les contrôles préventifs, qui sont des actions entreprises par les individus pour contrôler leur reproduction (par exemple, retarder le mariage, pratiquer la contraception), et les contrôles positifs, qui sont des catastrophes naturelles et des maladies qui augmentent le taux de mortalité (par exemple, la famine, les épidémies).

3.1.2 Analyse du modèle de Malthus

Nous avons rédigé un code python dans le but de représenter l'évolution d'une population suivant ce modèle de dynamique de population. Nous en sommes venus à la conclusion que le paramètre "r" (coefficient de croissance) définissait la finalité de l'évolution d'une population. Nous présentons deux graphiques modélisant deux situations différentes (code en annexe 1) :

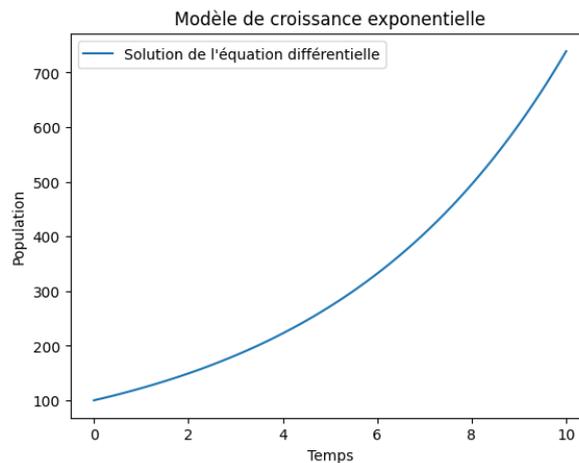


FIGURE 2 – modèle de croissance exponentielle avec coefficient positif ($r=0,2$)

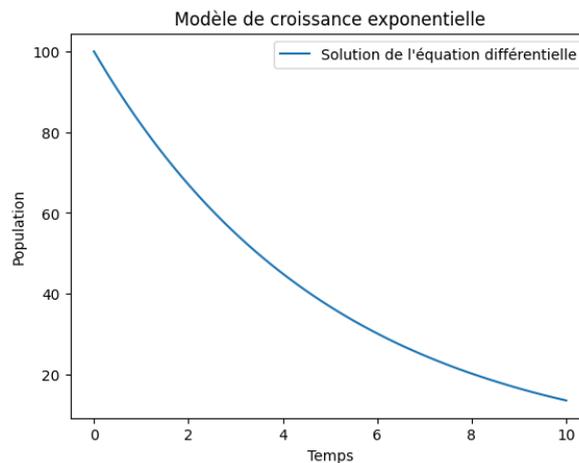


FIGURE 3 – modèle de croissance exponentielle avec coefficient négatif ($r=-0,2$)

Analyse des tracés :

Ce code illustre l'évolution de la population au cours du temps en fonction de r . Lorsque $r > 0$, la population croît exponentiellement, comme illustré par la première courbe. En revanche, lorsque $r < 0$, la population décroît exponentiellement, comme indiqué par la seconde courbe. Les paramètres utilisés dans ces exemples sont $K=100$ et $r=0,2$ pour le premier cas, et $r=-0,2$, dans le deuxième cas.

3.1.3 Exemple concret

Un exemple concret de croissance exponentielle est celui des bactéries. Ces procaryotes se reproduisent rapidement, environ toutes les heures. Par exemple, en plaçant 1000 bactéries dans un flacon avec suffisamment de nutriments, on observera que leur nombre double en une heure. Les 2000 bactéries doubleront ensuite pour atteindre 4000, et ainsi de suite. La notion clé de la croissance exponentielle est que le taux de croissance qui est dans ce cas de 2, implique que le nombre d'organismes va doubler à chaque génération. Ainsi, après 24 cycles, la population passe de 1000 à plus de 16 milliards de bactéries.

Cet exemple met en évidence la dynamique de croissance rapide des bactéries en l'absence de contraintes. Cependant comme évoqué précédemment, cela semble peu réaliste sur une longue durée. En effet, nous pouvons supposer que certaines bactéries mourront pendant l'expérience et que les ressources pour développer ces dernières seront épuisées au cours de l'expérience, ce qui réduit le taux de croissance par rapport à un scénario idéal sans mortalité.³

Après avoir étudié le modèle malthusien et ses limites, nous arrivons à la conclusion qu'il est nécessaire de considérer d'autres éléments susceptibles de limiter la croissance exponentielle des populations. C'est ainsi que nous allons aborder un facteur crucial : la capacité de charge de l'environnement.

3.2 Modèle de Verhulst

3.2.1 Explication du modèle : croissance logistique

Le modèle de Verhulst, également connu sous le nom de modèle de croissance logistique, tire son appellation du domaine de la logistique militaire, où il était originellement utilisé pour décrire la gestion des ressources. Dans notre cas, ce terme évoque une

3. croissance exponentielle exemple des bactéries : <https://openstax.org/books/biology/pages/45-3-environmental-limits-to-population-growth>

croissance de population restreinte par des facteurs environnementaux. Il s'agit d'une extension du modèle malthusien qui prend en compte les limites de l'environnement sur la croissance d'une population. Ce modèle a été développé par le mathématicien belge Pierre François Verhulst en 1838.

Dans celui-ci nous estimons que la population admet une valeur limite K appelée capacité biotique. Si nous considérons que les taux de natalité et de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante, cela revient alors à considérer que plus la taille d'une population augmente plus son taux de natalité va diminuer et le taux de mortalité va donc augmenter. Considérons y la variable représentant la population, $m(y)$ le taux de mortalité et $n(y)$ le taux de natalité.

La population vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = y(n(y) - m(y))$$

La fonction $(n(y) - m(y))$ est alors affine décroissante. En effet, $n(y)$ diminue lorsque y augmente en raison de la réduction des possibilités de reproduction à mesure que la population atteint sa capacité biotique. De même, $m(y)$ le taux de mortalité augmente avec la taille de la population en raison de la rareté des ressources, entraînant une compétition pour les obtenir. Verhulst affirme également qu'une faible population initiale a tendance à croître. Nous pouvons donc réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = y(a - by) \quad \text{avec } (a, b) \in]0; \infty[$$

Nous posons $K = \frac{a}{b}$ et obtenons alors $\frac{dy}{dt} = ay(1 - \frac{y}{K})$

Cela nous permet de constater que $y = K$ est solution stationnaire de l'équation. De même, $y = 0$ est une autre solution stationnaire. Si $y < K$ alors la population croît et si $y > K$ alors la population décroît.

Nous pouvons alors trouver l'ensemble des fonctions strictement positives définies sur $]0; \infty[$ et vérifiant le système :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt} = ay(1 - \frac{y}{K}) \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme : $\forall t \quad y(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{y_0} - 1)e^{-at}}$

3.2.2 Analyse du modèle de Verhulst

Nous avons rédigé un code Python dans le but de représenter l'évolution d'une population au cours du temps en fonction de a suivant ce modèle de dynamique de population. Ainsi, nous représentons les courbes à l'aide du code (annexe 2) :
Nous présentons deux graphiques modélisant deux situations différentes ci-dessous.

Analyse des tracés :

Le premier graphique (figure 4) montre l'évolution de la population avec un taux de croissance positif. Nous avons dans cet exemple utilisé les paramètres suivants : K (capacité de charge) = 10, N_0 (population initiale) = 2 et a (taux de croissance) = 1.5. La population tend rapidement vers la capacité d'accueil lorsque le taux de croissance est positif.

Nous obtenons un nouveau graphique en modifiant la valeur du taux de croissance : Dans le deuxième graphique (figure 5), le taux de croissance est négatif ($a = -1.5$). Nous observons une décroissance rapide de la population jusqu'à son extinction, comme prévu par l'équation représentant la population.

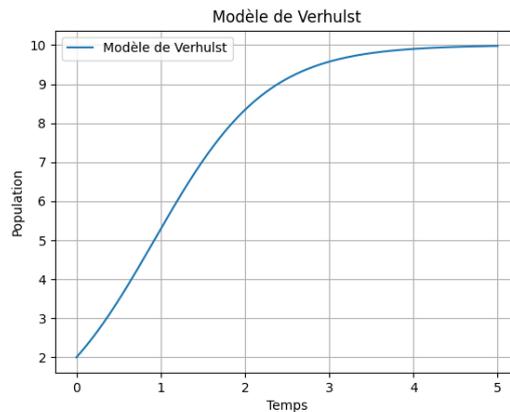


FIGURE 4 – Graphe représentant l'évolution de la population en fonction des ressources et de la pollution au cours du temps avec $a=1.5$

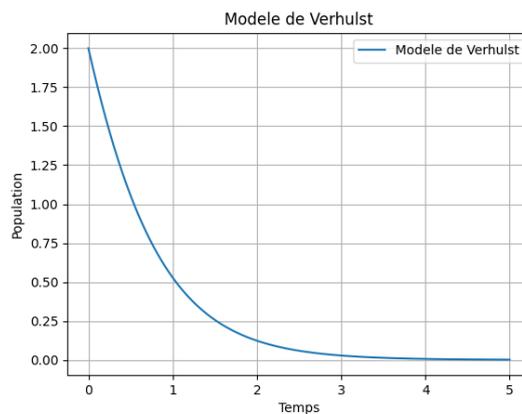


FIGURE 5 – Graphe représentant l'évolution de la population en fonction des ressources et de la pollution au cours du temps avec $a=-1.5$

3.2.3 Exemple concret

L'exemple le plus concret de la croissance logistique est celui de la levure. Il s'agit d'un champignon apte à provoquer la fermentation des matières organiques végétales ou animales. Les levures sont utilisées pour la fabrication de pain et d'alcools. La courbe de la croissance de la levure est représentée sur la figure ci-dessous. Nous constatons que la croissance se stabilise et atteint sa capacité biotique lorsque la population épuise les nutriments nécessaires à son développement. Le modèle de Verhulst ne permet cependant pas de modéliser la décroissance une fois que la capacité biotique est atteinte.⁴

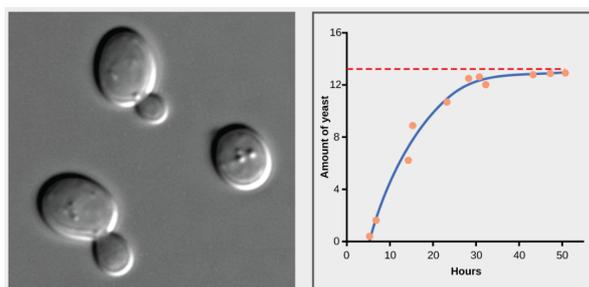


FIGURE 6 – graphique d'une levure cultivée dans des conditions idéales, [/https ://environmental-limits-to-population-growth](https://environmental-limits-to-population-growth)

Cette étude de ce modèle nous a permis de nous rendre compte que grâce à l'introduction de K , le modèle de Verhulst est plus adapté pour modéliser l'évolution démographique humaine que le modèle de Malthus. Tandis que Malthus prévoyait une croissance exponentielle, Verhulst intègre les limites environnementales ce qui rend ce modèle plus réaliste. Ainsi, K permet de définir la capacité maximale de l'environnement pour une population, tenant compte des ressources disponibles. Cela permet de mieux appréhender les problématiques écologiques actuelles, où la surpopulation et la surexploitation des ressources sont des préoccupations majeures. Ce modèle offre ainsi une base pour envisager des stratégies de gestion durable des ressources, en lien avec les défis écologiques contemporains. Pour pousser le modèle plus loin, il serait imaginable de prendre une capacité biotique qui ne serait pas une constante, mais une fonction du temps, permettant de représenter les évolutions de l'environnement.

Cependant ce modèle ne permet pas de considérer les interactions entre différentes espèces d'un même environnement. Nous verrons comment mettre cela en place dans le prochain modèle.

3.3 Modèle de Lotka-Volterra

Nous souhaitons désormais enrichir notre compréhension des dynamiques des populations en ne nous focalisant plus uniquement sur une unique population mais sur les interactions qu'il peut y avoir entre les différentes espèces.

4. graphique de la croissance d'une population de levure : [https ://openstax.org/books/biology/pages/45-3-environmental-limits-to-population-growth](https://openstax.org/books/biology/pages/45-3-environmental-limits-to-population-growth)

3.3.1 Explication du modèle

Les équations de Lotka-Volterra sont également connues sous le nom de modèle proie-prédateur. Ce modèle a été présenté indépendamment à la fois par le mathématicien américain Alfred James Lotka (1880-1949) en 1925 et Vito Volterra (1860-1940) en 1926.

Ce modèle est utilisé afin de déterminer la population à n'importe quel moment. Ainsi, il propose un couple d'équations différentielles non linéaires, ne pouvant être résolues qu'en discrétisant la durée en de nombreux intervalles. De plus, ce modèle rend compte de l'interaction entre deux espèces, ce qui explique pourquoi deux équations sont considérées : l'une décrivant la variation de la population des proies et l'autre étudiant la variation de population des prédateurs.

Nous obtenons alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

Avec t : temps; $x(t)$: l'effectif des proies en fonction du temps; $y(t)$: l'effectif des prédateurs en fonctions du temps; $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$ représentant la variation des populations au cours du temps. Par ailleurs, le coefficient α représente le taux de reproduction, β le taux de mortalité, γ le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées et δ le taux de mortalité naturelle des prédateurs.

Pour résoudre ce système, il est nécessaire de faire plusieurs hypothèses. Nous pouvons notamment inclure le modèle malthusien évoqué précédemment, où l'on considère que les proies ont un accès illimité à la nourriture tandis que le nombre de prédateurs est limité par la quantité de proies dont ils disposent. De plus, le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$.

Par ailleurs, nous remarquons que si $\beta=0$ ou bien $\gamma=0$ alors nous retrouvons le modèle Malthusien vu précédemment.

Enfin pour s'inscrire dans la thématique de notre projet nous avons écrit le système de la manière suivante en considérant la variation de population $\frac{dV(t)}{dt}$ et de ressources $\frac{dR(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= V(t)(\alpha - \beta \times R(t)) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= R(t)(\delta \times V(t) - \gamma) \end{aligned}$$

3.3.2 Analyse du modèle Lotka-Volterra

Etablissons maintenant un bilan de population, ce qui va nous permettre de retomber sur les équations du modèle Lotka Volterra. Comme nous travaillons en temps continu, nous allons nous intéresser aux dynamiques de populations, dans un laps de temps court,

appelé dt .

A noter également que la population d'êtres vivants ne se reproduit que si elle consomme des ressources. Dans notre modèle, la taille de la population, notée V , qui a accès aux ressources, notées R , est égale entre t et $t + dt$ au produit :

$$V(t).R(t).dt$$

Cette variation est proportionnelle à l'intervalle de temps considéré, ici dt . Ainsi, la population d'êtres vivants augmente exactement de cette quantité entre t et $t + dt$, dans le même temps, la population de ressources diminue de cette même quantité. Or entre t et $t + dt$, la variation de la taille de la population d'êtres vivants peut être exprimée comme la différence ; $V(t + dt) - V(t)$.

Dans cette logique de bilan, on obtient donc les 2 équations :

$$V(t + dt) - V(t) = V(t).R(t)dt$$

$$R(t + dt) - R(t) = -V(t).R(t)dt$$

Les signes rendent compte respectivement d'une augmentation de population liée à la reproduction, et une diminution de la population due à la consommation par les êtres vivants. Or, le développement limité de $V(t + dt)$ au premier ordre nous donne :

$$\frac{dV(t)}{dt} = V(t).R(t)$$

Suivant la même logique on obtient aussi :

$$\frac{dR(t)}{dt} = -V(t).R(t)$$

Traçons un premier modèle à partir de ces équations (code Python annexe 4) :

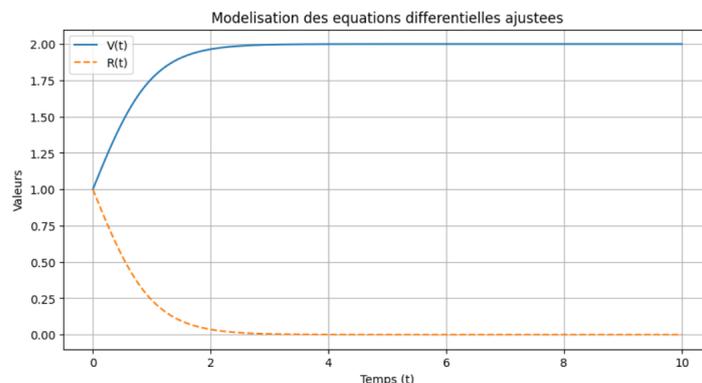


FIGURE 7 – Graphe modélisant des équations différentielles ajustées

Analyse des tracés :

Remarquons d'abord que le système d'équations nous permet de retomber sur le système de Lotka-Volterra. En effet, si l'on compare nos équations à celles de ce modèle on remarque que nous avons mis en évidence un cas particulier où les dynamiques sont dictées par les interactions entre les deux populations sans croissance ou mortalité intrinsèque indépendante de ces interactions. On observe que la croissance intrinsèque des proies (α) est nulle ainsi que la croissance intrinsèque des prédateurs (γ). Le taux d'interaction entre les prédateurs et les proies (β) est -1. Enfin le taux d'efficacité de conversion des proies en prédateurs (δ) est -1. Ainsi cela nous mène au système généralement retrouvé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= V(t)(\alpha - \beta \times R(t)) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= R(t)(\delta \times V(t) - \gamma)\end{aligned}$$

Avec t le temps ; $V(t)$ représentant l'effectif des proies en fonction du temps ; $R(t)$, l'effectif des prédateurs en fonction du temps. Les dérivées représentent la variation des populations au cours du temps. Enfin, les coefficients α , β , γ et δ représentent les mêmes significations que précédemment.

Faisons une étude approfondie du Lotka-Volterra. Ce modèle est connu pour représenter une dynamique alternant cycle de croissance et de décroissance. Les proies sont tuées par les prédateurs, permettant à cette population de croître jusqu'à ce qu'elle ait tué suffisamment de proies. Ceci entraîne ainsi leur mort plus rapidement car elles ne se reproduisent pas suffisamment en raison du manque de nourriture. Les proies arrivent ainsi à augmenter en nombre avant d'être tué plus vite qu'elles ne se reproduisent et ainsi de suite. Modélisons cela avec la méthode Runge Kutta 4, une méthode numérique de résolution des équations différentielles. Nous allons chercher à faire varier les différents paramètres α , β , γ et δ . Il s'agira de comprendre l'effet de chaque paramètre sur les équations différentielles.

Pour les conditions initiales, on définit : $X_0 = [1, 1]$ et attribuons des valeurs aux paramètres : $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$.

Ainsi, nous obtenons le graphe de la figure 8.

Analyse des tracés :

Cet exemple met bien en valeurs ces cycles. Les proies sont chassées par les prédateurs mais arrivent tout de même à survivre. La population de proies se reproduit plus vite qu'elle n'est tuée. Cela s'explique par la différence de valeur du coefficient correspondant au taux de mortalité.

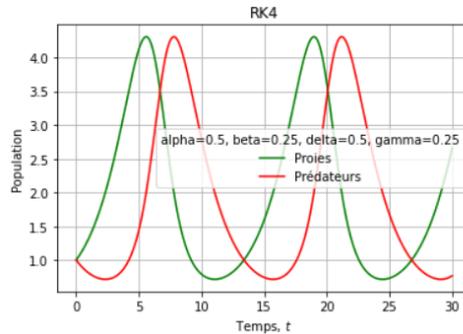


FIGURE 8 – Graphique représentant l'évolution des proies et prédateurs en fonction du temps à l'aide du modèle de Lotka-Volterra

De plus, aucune variations de coefficients ne peut altérer ce comportement en raison des propriétés du système.

Illustrons cela par un exemple où les proies se reproduisent plus lentement qu'elles ne sont tuées. Nous pourrions nous attendre à ce que la population de prédateurs évolue peu du fait de la croissance plus lente des proies. Pour ce faire, nous allons choisir un taux de reproduction des proies plus faible que tous les autres paramètres.

On définit : $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$.

On observe désormais le graphe suivant (figure 9) :

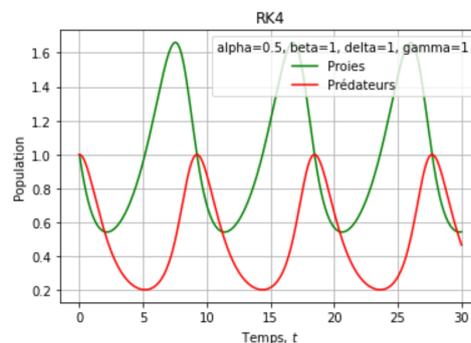


FIGURE 9 – Graphique représentant l'évolution des proies et prédateurs en fonction du temps à l'aide du modèle de Lotka-Volterra

Analyse des tracés :

Par rapport à l'exemple précédent nous observons que la population de proies est en moyenne supérieure à celle des prédateurs et on retrouve notre cycle. Cela semble contre-intuitif au premier abord, car nous pourrions penser que les proies, ayant un taux de reproduction inférieur, soient moins capables de soutenir une population de prédateurs en croissance. Cependant, plusieurs facteurs dans le modèle de Lotka-Volterra peuvent expliquer ce phénomène. Même si le taux de reproduction des proies (α) est plus faible, leur capacité à croître sans la présence de prédateurs (dans ce cas, $\beta R(t)$) leur permet de

maintenir une population relativement élevée. La croissance de la population des proies n'est pas uniquement déterminée par α mais aussi par l'équilibre entre α et $\beta R(t)$. Il y a une dépendance des prédateurs aux proies : la croissance des prédateurs est directement dépendante de la population de proies ($\delta V(t)R(t)$). Même avec un δ élevé, si la population de proies diminue (ce qui se produit naturellement avec une augmentation de la prédation), la capacité des prédateurs à croître est limitée. Le taux de croissance des prédateurs est donc contraint par la disponibilité des proies.

A ce stade de l'étude du modèle Lotka-Volterra, il paraît nécessaire de se demander si on peut atteindre les états stationnaires à l'aide de calculs. Ainsi nous allons chercher à savoir si nous pouvons atteindre les états stationnaires avec la connaissance des points fixes.

On reprend alors notre système d'équations différentielles du modèle de Lotka-Volterra :

$$\begin{aligned}\frac{dV(t)}{dt} &= V(t)(\alpha - \beta \times R(t)) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= R(t)(\delta \times V(t) - \gamma)\end{aligned}$$

On cherche à trouver les points fixes :

$$V = \frac{\alpha}{\beta} \quad R = \frac{\gamma}{\delta}$$

Il semblerait d'après nos exemples ci-dessus que lorsque l'on n'atteint pas ces deux points alors on a nécessairement un cycle. La question est de savoir comment on obtient les états stationnaires et est-ce qu'il est possible d'atteindre les conditions qui nous permettent par la suite d'avoir des courbes constantes ?

Si on considère le problème de Cauchy, l'équation différentielle à un instant initial est bien définie. Un théorème fondamental en analyse stipule que deux trajectoires issues d'un système différentiel ne peuvent pas se croiser. En effet, si deux trajectoires se croisaient, (figure 10) elles seraient nécessairement identiques à partir du point de croisement, ce qui est une conséquence de l'unicité des solutions pour une condition initiale donnée. Maintenant, examinons nos deux fonctions. Si nous constatons qu'elles se croisent, cela contredit le théorème précité. En d'autres termes, cette contradiction implique que nous ne pouvons pas avoir deux trajectoires distinctes qui se croisent, car cela violerait l'unicité des solutions de l'équation différentielle. En conclusion, pour qu'un système évolue vers un état stationnaire, il doit nécessairement commencer dans une condition initiale spécifique qui mène directement à cet état stationnaire, sans possibilité de croisement avec une autre trajectoire. A noter que pour que ce théorème soit valable on doit nécessairement se poser dans un problème autonome. Une équation différentielle est autonome si le temps n'intervient pas dans l'équation.

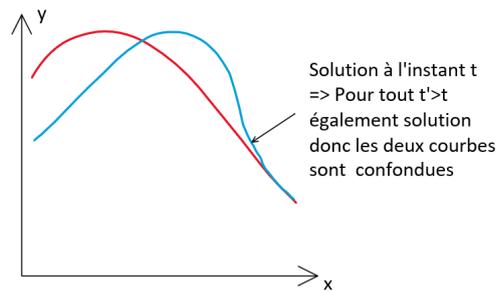


FIGURE 10 – Schéma expliquant le théorème du problème de Cauchy

Ce modèle de Lotka-Volterra pose finalement problème car, aussi bas que la courbe descende au niveau du nombre de proies ou de prédateurs, en raison des cycles constants, le système repart toujours. On n'atteint jamais le niveau 0 ce qui n'est pas réaliste car une espèce peut s'éteindre. Il s'agit alors de faire évoluer le modèle pour mieux représenter la réalité.

3.3.3 Exemple concret

Le modèle de Lotka-Volterra a été conçu pour décrire les interactions entre les populations de proies et de prédateurs. Par exemple, on peut l'appliquer aux interactions entre loups et cerfs dans le parc national de Yellowstone aux États-Unis. Dans les années 1990, les loups ont été réintroduits dans le parc après plus de 70 ans d'absence. Cette réintroduction nécessitait de prévoir son impact sur la biodiversité existante. Les biologistes et écologistes ont utilisé ce modèle pour prédire cet impact. Ils ont ainsi anticipé une régulation naturelle de la population de cerfs, qui se reproduisait plus rapidement qu'elle ne mourait en l'absence de prédateurs. Le défi était de ne pas causer l'extinction des cerfs, devenus trop nombreux.

Par la suite ces prédictions ont pu être validées. En effet, la réintroduction des loups en une quantité bien définie a effectivement permis une diminution de la population de cerfs, ce qui a alors permis d'augmenter la biodiversité dans le parc.⁵

Cet exemple ne montre pas seulement une utilité de ce modèle pour prédire les dynamiques de populations mais aussi pour aider à la régulation d'une espèce en cas de nécessité notamment dans des espaces naturels.

Pour autant, il est nécessaire de constater que dans ce modèle nous avons fait abstraction de beaucoup de paramètres perturbateurs pour une évolution de prédateurs, comme les maladies. De plus, aucun chercheur ne semble avoir voulu adapter ce modèle au cas de l'évolution de la population et des ressources. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il existe des modèles plus avancés avec davantage de variables.

5. Mémoire de Robin Michard, Systèmes dynamiques et évolution de populations, université Paris, 2017

3.4 Modèle avancé du Lotka-Volterra

Puisque le modèle précédent peut être considéré imparfait par son manque de paramètres, nous allons maintenant chercher à améliorer ce dernier, en en considérant davantage.

Par ailleurs, afin de s'inscrire dans l'objectif de ce projet, nous n'allons désormais plus parler de concurrence entre les espèces mais introduire les interactions entre les ressources et les populations. Pour cela nous allons nous inspirer du modèle (figure 10) qui a été établi pour le rapport "Limits to growth" publié en 1972. C'est une des références de discussions et de critiques qui utilise le modèle World3 (un outil de simulation) portant sur les liens entre les conséquences écologiques, la croissance économique et démographique. Ses principales conclusions indiquent que, sans changements significatifs, le monde pourrait faire face à un effondrement écologique et économique en raison du dépassement des capacités de la Terre. Ce modèle a par la suite connu des mises à jours, qui mènent toutefois à la même conclusion.

En proposant un modèle simplifié, nous cherchons à reproduire les comportements globaux sans détailler finement les activités humaines, pour fournir une vision claire des dynamiques essentielles et des tendances générales. Nous allons ainsi nous focaliser sur 3 paramètres : les ressources, la population et la pollution.

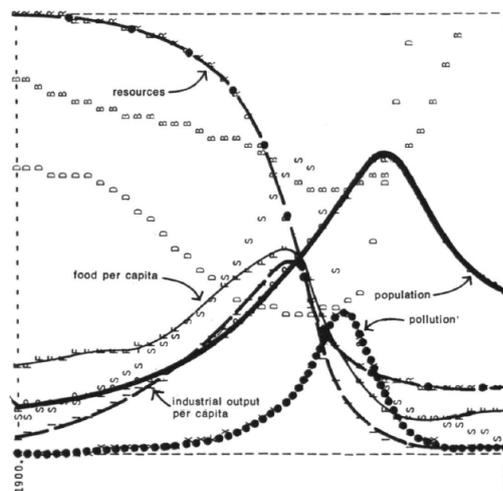


FIGURE 11 – Modèle issu du rapport "Limits to growth" représentant l'évolution de l'alimentation, de la production industrielle, de la pollution ainsi que de la croissance démographique.

Il est important de noter que ce modèle plus complexe issu du rapport "Limits to growth" ne représente pas une situation totalement réelle puisqu'il ne prend pas en considération les événements discontinus tels que les guerres ou les épidémies.

En observant les trois courbes sur lesquelles nous avons décidé de nous focaliser, nous pouvons remarquer que la population augmente lorsque les ressources sont disponibles. Cette augmentation de population entraîne par la suite une augmentation de la

pollution. Or, cette augmentation de la pollution additionnée à la baisse des ressources va finalement mener à l'extinction de la population. En effet, nous savons que la Terre nécessite un certain temps pour régénérer ses ressources. Dans ce cas, celles-ci ne se renouvellent pas suffisamment rapidement pour permettre de subvenir aux besoins d'une population grandissante ce qui conduit à l'extinction de toute celle-ci. Nous remarquons ensuite que lorsque la population augmente, la nourriture allouée par personne diminue en même temps que les ressources. Il est intéressant de noter que le pic de pollution arrive avant le pic de population.

Intuitivement, nous pourrions penser que le pic de pollution arrive plus tard que le pic de population, ce qui pourrait s'expliquer par le fait qu'il y ait un temps de retard entre l'activité humaine grandissante et la pollution. Il semblerait qu'à un certain stade la pollution ne puisse plus augmenter, elle est à son paroxysme. On peut y associer plusieurs explications telles que l'hypothèse d'une prise de conscience de la part de la population visant à diminuer la pollution. On pourrait également penser que l'environnement à su absorber ce pic de pollution.

Par ailleurs, dans le rapport, il est mentionné que le modèle montre que la capacité de l'environnement à absorber la pollution possède des limites et que celle-ci, à un certain stade, ne pourra plus augmenter même si la population continue de croître. Le rapport mentionne également des boucles de rétroaction (la pollution impacte négativement la disponibilité des ressources, ce qui, à son tour, affecte la population) ou encore qu'il peut exister de possibles politiques de réduction de pollution qui peuvent amener à une stabilisation avant que la population atteigne son pic maximal.

Notre objectif est donc d'approcher ce modèle.

Nous sommes alors partis de ces équations différentielles, nous donnant alors 12 coefficients différents avec 3 équations ci dessous :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 xy + \delta_1 xz \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_2 y + \beta_2 xy + \gamma_2 y^2 + \delta_2 yz \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha_3 z + \beta_3 xz + \gamma_3 yz + \delta_3 z^2\end{aligned}$$

Ce sont les équations différentielles du modèle Lotka-Volterra avec trois variables. Avec x pollution ; y population ; z ressources ; α ; β et δ

Nous avons alors essayé de déterminer ces coefficients par la logique explicitée sur le schéma ci-dessous :

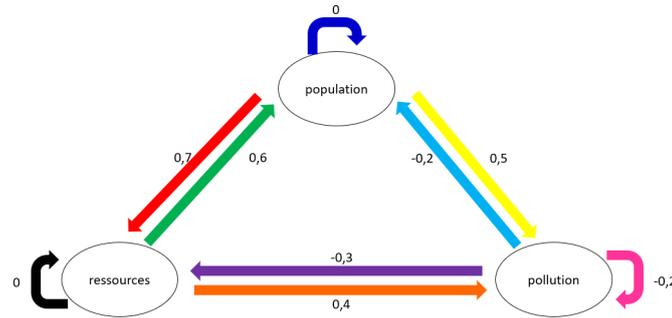


FIGURE 12 – Schéma des impacts des trois variables étudiées sur chacune d'entre elles

Comprise dans le code ci-dessous (figure 5), les valeurs de la matrice 3x3 sont représentées de la manière suivante. Tout d'abord, nous avons décidé de prendre des valeurs comprises entre -1 et 1 pour faciliter nos recherches. Les valeurs négatives sont associées à une diminution dans le temps d'une des variables; et une valeur positive implique la croissance de l'une d'entre elles. Nous pensons aussi que chaque variable ne peut évoluer sans l'impact d'une autre variable. Par exemple, les ressources ne peuvent évoluer seules, ainsi la flèche impliquant uniquement les ressources a une valeur nulle. Pour finir, nous pouvons observer que chaque variable impacte une autre : elle peut conduire à sa disparition, ou la faire croître.

Intéressons-nous à ce schéma afin de lui donner un sens physique. Nos différentes flèches correspondent aux valeurs de beta :

–La flèche rose, qui dans le code correspond à $\text{beta}[0][0]$, décrit l'évolution de la pollution quand on considère qu'il n'y a ni population ni ressources. Il s'agit de se demander comment évolue la pollution lorsque c'est l'unique paramètre à prendre en compte, c'est une situation hypothétique.

–La flèche bleu foncée, pour $\text{beta}[1][1]$, représente le même principe, mais on s'intéresse à l'évolution de la population toute seule.

–La flèche noire, $\text{beta}[2][2]$, on s'intéresse à l'évolution des ressources lorsqu'elles sont seules.

Pour les autres flèches voici la signification :

- $\text{beta}[0][1]$ (jaune) : l'impact de la population sur la pollution.
- $\text{beta}[0][2]$ (rouge) : l'impact de la population sur les ressources.
- $\text{beta}[1][0]$ (bleu clair) : l'impact de la pollution sur la population.
- $\text{beta}[1][2]$ (violet) : l'impact de la pollution sur les ressources.
- $\text{beta}[2][0]$ (orange) : l'impact des ressources sur la pollution.
- $\text{beta}[2][1]$ (vert) : l'impact des ressources sur la population.

A noter que les "beta" sont négatifs lorsque les paramètres sont en concurrence. A l'inverse, s'ils sont positifs cela signifie alors que les paramètres s'entraident, ils évoluent ensemble.

Pour un premier tracé, nous avons fait le choix de commencer par donner un sens physique avec nos propres intuitions et d'ajuster par la suite en fonction des courbes que nous allons obtenir.

Nous choisissons selon nos intuitions les valeurs suivantes des coefficients :

- Plus il y a de population, plus il y a de pollution, coefficient choisi : 0.5
- Plus il y a de population, plus il y a de ressources (la population va créer de nouvelles ressources), coefficient choisi : 0.7
- Plus il y a de pollution, moins il a de population , coefficient choisi : -0.2
- Plus il y a de pollution, moins il y a de ressources, coefficient choisi :-0.3
- Plus il y a de ressources, plus il y a de pollution, coefficient choisi : 0.4
- Plus il y a de ressources, plus il y a de population, coefficient choisi :0.6

Pour ce qui est de l'évolution de la pollution quand on la considère seule, elle va diminuer (coefficient=-0.2) car l'environnement va capter les gaz à effets de serre (forêts, océans). Sans ressources ni pollution la population va stagner (coefficient=0). De même, les ressources sans population ni pollution vont stagner(coefficient=0).

Nous modélisons un code Python pour retrouver les courbes (annexe 6) :

La première modélisation que nous obtenons est la suivante :

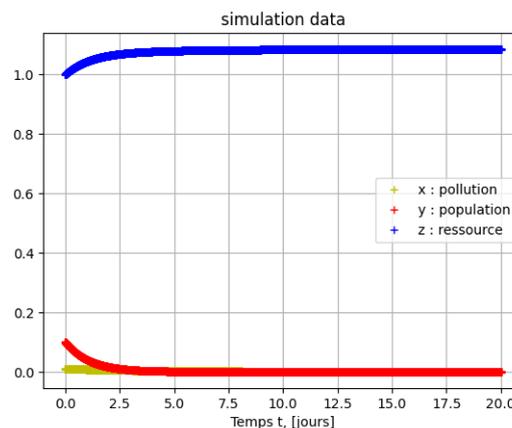


FIGURE 13 – Modèle représentant l'évolution de la population en fonction des ressources et de la pollution au cours du temps

La population est vouée ici aussi à mourir au bout d'un certain temps, la pollution également. Cela semble en accord avec l'intuition que la pollution est liée à la population. Il est toutefois compliqué de voir de réelles tendances sur les différentes dynamiques.

Remarques :

On peut faire quelques remarques sur nos choix de coefficient. Tout d'abord, il semble compliqué de déterminer quel élément impacte le plus un autre. De plus, lorsque l'on parle des ressources, cela englobe de nombreux éléments. Il s'agit de déterminer si on ne considère que la nourriture ou plus largement tout ce dont l'homme pourrait avoir besoin pour subvenir à ses besoins. Il faut également se demander quel est le caractère

renouvelable des ressources. Enfin, considérons-nous les ressources comme les matières premières brutes ou également toutes celles que l'Homme va pouvoir créer et qui lui sert à se développer ? Tout ce manque d'informations et donc de paramètres sont peut-être à l'origine de cette importante disparité entre le modèle du rapport "Limit to growth" et notre modèle simplifié.

Face à ce manque d'informations, nous avons ensuite choisi de négliger dans un premier temps l'interprétation physique au profil des courbes. Le schéma ci-contre explicite nos valeurs de coefficients. Son principe ne change pas à celui précédent :

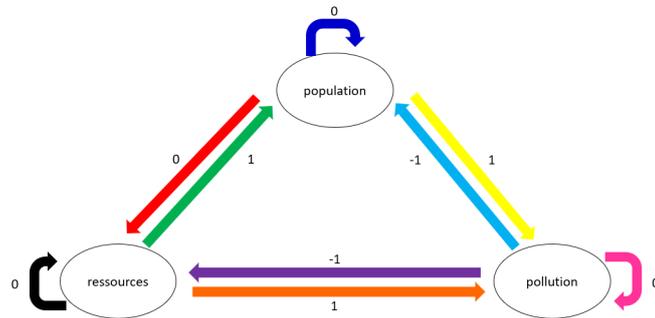


FIGURE 14 – Schéma des impacts des trois variables étudiées sur chacune d'entre elles

Nous obtenons la modélisation suivante :

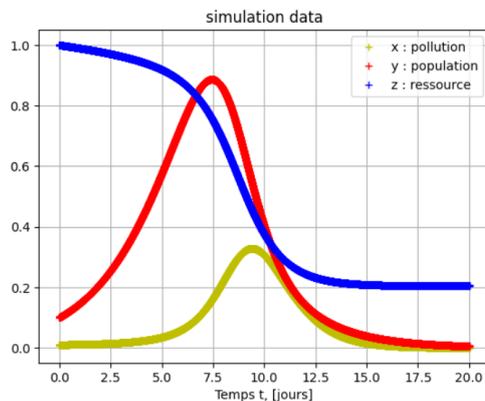


FIGURE 15 – Modèle représentant l'évolution de la population en fonction des ressources et de la pollution au cours du temps

Ainsi bien que nous n'ayons pas drastiquement changé d'ordre de grandeurs, nous avons seulement considéré dans ce cas de figure que la population n'impacte pas les ressources or nous obtenons un résultat bien différent de celui précédent. Nous observons que les ressources (courbe en bleu) diminuent dans le temps ce qui paraît cohérent avec le fait que la population utilise les ressources. Nous apercevons également que celles-ci stagnent au moment où la population s'éteint. Nous pouvons aussi observer une aug-

mentation de la population suivi de près par l'augmentation de la pollution. Ensuite, la population commence à décroître et finit par s'éteindre. Enfin, le pic de population apparaît avant celui de la pollution. Ainsi, du fait que nous travaillons avec des équations différentielles, la modification d'un coefficient peut drastiquement changer toutes nos modélisations. Cela met d'autant plus en valeur la complexité des interactions entre ces paramètres.

Remarques :

Malgré les quelques différences notées entre notre modèle et celui de *Limits to growth*, il apparaît que nous parvenons toutefois à modéliser assez fidèlement la dynamique de population par rapport à nos intuitions physiques, cela à l'aide d'un nombre bien inférieur de variables. Par ailleurs, nos tentatives de modélisation nous ont permis d'arriver à la même conclusion que celle admise dans le rapport "Limits to growth", celle que la population se dirige vers l'extinction. Pour obtenir un modèle plus proche de celui du rapport, cela nécessiterait d'avoir plus d'informations sur les paramètres employés par les chercheurs du rapport Meadows.

4 Conclusion

L'objectif de notre projet scientifique était d'aborder les modèles de dynamiques des populations. Pour cela, nous avons entrepris une analyse approfondie de trois modèles mathématiques élémentaires de la dynamique des populations.

Premièrement, l'étude du modèle Malthusien permet de comprendre les fondements d'une croissance démographique exponentielle tout en mettant en lumière ses limites dues à la non-prise en compte des facteurs environnementaux.

Le modèle logistique nous a permis d'enrichir notre compréhension en intégrant la capacité d'accueil offrant ainsi une perspective plus réaliste de la croissance démographique dans des environnements où les ressources ne sont généralement pas illimitées.

Ensuite, le modèle de Lotka-Volterra élargit notre vision en introduisant les dynamiques complexes des relations proies-prédateurs.

Finalement, nous avons pu voir un aperçu de toute la complexité dont regorge ce sujet. Nous sommes arrêtés après trois variables mais la dynamique de population est bien plus complexe et multidimensionnelle. Les influences entre les différentes variables peuvent révéler des schémas et des comportements encore plus riches et nuancés.

Il serait alors intéressant de poursuivre ce travail de recherche et de modélisation en intégrant plus de variables. Cette approche permettrait non seulement de mieux comprendre les dynamiques en jeu mais également de tester et valider de nouvelles hypothèses pour un aperçu plus exhaustif.

5 Annexes

Code Python du modèle de Malthus (Annexe 1) :

Listing 1 – code Python du modèle exponentiel

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def solution_equation_differentielle(t, K, a):
    return K * np.exp(a * t)

Parametres du modele
K = 100 # Constante
r = 0.2 # Coefficient de croissance (exemple : 20%)

# Creation des valeurs de temps
temps = np.linspace(0, 10, 100)

# Calcul de la solution de l'equation differentielle
population_solution = solution_equation_differentielle(temps, K, r)

# Visualisation des resultats
plt.plot(temps, population_solution, label='Solution de l\'equation diffe
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Modele de croissance exponentielle')
plt.legend()
plt.show()
```

Code Python du modèle de Verhulst (Annexe 2) :

Listing 2 – code Python du modèle logistique

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def verhulst(t, K, N0, r):
    return K * (1 / (1 + (-1 + K/N0) * np.exp(-r * t)))

# Parametres du modele
K = 10
N0 = 2
a = 1.5

# Generation des donnees temporelles
t = np.linspace(0, 50, 1000)

# Calcul des populations correspondantes
N = verhulst(t, K, N0, a)

# Tracer la fonction de Verhulst
plt.plot(t, N, label='Modele-de-Verhulst')
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Population')
plt.title('Modele-de-Verhulst')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Code Python du modèle de Verhulst en temps discret (Annexe 3) :

Listing 3 – code Python du modèle logistique

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def verhulst_en_temps_discret(mu, v0, n):
    population = [v0]
    for _ in range(1, n+1):
        if mu == 1:
            vn_1 = population[-1]
        else:
            vn_1 = mu * population[-1] * (1 - population[-1])
            # Verification pour garder la population positive
            vn_1 = max(vn_1, 0)
        population.append(vn_1)
    return population

# Parametres du modele
mu = float(input(" Veuillez saisir la valeur de mu : "))
v0 = float(input(" Veuillez saisir la valeur initiale de v0
n=int(input(" Veuillez saisir le nombre d'iterations : "))

# Calcul de la population pour chaque iteration
population = verhulst_en_temps_discret(mu, v0, n)

# Trace du graphique
plt.plot(range(n+1), population, marker='o')
plt.xlabel(' Iteration ')
plt.ylabel(' Population ')
plt.title(' Modele de Verhulst en temps discret ')
plt.grid(True)
plt.show()

```

Code Python du modèle du Lotka-Volterra (Annexe 4) :

Listing 4 – code Python du modèle ci-contre

```

from scipy.integrate import solve_ivp #utilis pour pouvoir r soudre de
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Ajustement de la definition du systeme d'equations differentielles
def adjusted_system(t, y):
    V, R = y
    dVdt = V * R
    dRdt = -V * R
    return [dVdt, dRdt]

# Conditions initiales
V0 = 1
R0 = 1
y0 = [V0, R0]

# Intervalle de temps pour la resolution
t = (0, 10)
t_eval = np.linspace(*t, 1000)

# Resolution du systeme d'equations differentielles
sol_adjusted = solve_ivp(adjusted_system, t, y0, t_eval=t_eval)

# Trace des resultats ajustes
plt.figure(figsize=(10, 5))

plt.plot(sol_adjusted.t, sol_adjusted.y[0],
label='V(t)-ajuste', linestyle='--')
plt.plot(sol_adjusted.t, sol_adjusted.y[1],
label='R(t)-ajuste', linestyle='—')

plt.title('Modelisation-des-equations-differentielles-ajustees')
plt.xlabel('Temps-(t)')
plt.ylabel('Valeurs')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Code Python du modèle du Lotka-Volterra avec $\alpha = 1; \beta = 1; \delta = 1; \gamma = 1$ (Annexe 5) :

Listing 5 – code Python du modèle ci-contre

```

import matplotlib as plt
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# parametres
alpha = 1 # taux de reproduction des proies
beta = 1 # taux de mortalite des proies due aux predateurs
delta = 1 # taux de reproduction des predateurs
influence par le nombre de proies
gamma = 1 # taux de mortalite des predateurs
x0 = 1 # proies initiales
y0 = 1 # predateurs initiaux
tmax = 30. # temps de la simulation
X0 = [x0, y0] # condition initiale pour les populations
de proies et de predateurs
Nt = 1000 # nombre de points de temps    simuler
t = np.linspace(0., tmax, Nt) # liste de Nt points
de temps allant de 0    tmax

# calcule les derivees des populations de proies et de
predateurs par rapport au temps avec le modele de Lotka–Volterra
def derivative(X, t, alpha, beta, delta, gamma):
    x, y = X
    dotx = x * (alpha - beta * y)
    doty = y * (-delta + gamma * x)
    return np.array([dotx, doty])

# methode de resolution numerique Runge–Kutta d'ordre 4
pour resoudre les equations differentielles
def RK4(func, X0, t, alpha, beta, delta, gamma):
    dt = t[1] - t[0]
    nt = len(t)
    X = np.zeros([nt, len(X0)])
    X[0] = X0
    for i in range(nt-1):
        k1 = func(X[i], t[i], alpha, beta, delta, gamma)
        k2 = func(X[i] + dt/2. * k1, t[i] + dt/2., alpha, beta, delta, gamma)
        k3 = func(X[i] + dt/2. * k2, t[i] + dt/2., alpha, beta, delta, gamma)
        k4 = func(X[i] + dt * k3, t[i] + dt, alpha, beta, delta, gamma)
        X[i+1] = X[i] + dt / 6. * (k1 + 2. * k2 + 2. * k3 + k4)
    return X

```

```
# appel des fonctions
Xrk4 = RK4(derivative, X0, t, alpha, beta, delta, gamma)

# parametres d'affichage de la courbe
plt.figure()
plt.title("RK4")
plt.plot(t, Xrk4[:, 0], 'g', label = "Proies")
plt.plot(t, Xrk4[:, 1], 'r', label = "Predateurs")
plt.grid()
plt.xlabel("Temps, - $t$  - [s]")
plt.ylabel('Population')
plt.legend(loc = "best")
plt.show();
```

Code Python du modèle du Lotka-Volterra avancé (Annexe 6) :

Listing 6 – code Python du modèle ci-contre

```

import matplotlib as plt
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate
alpha = [# EVOLUTION INTRASEQUE : Taux d'accroissement
que finirait par connaitre une population donnee,
# si les conditions de mortalite et de fecondite qui
prevalent une annee donnee se maintenaient indefiniment.
    [0],#pollution
    [0],#population
    [0]#ressource
]

beta = [# evolution en concurrence : les bii sont les coefficients
quand il n'y-a-que-la-polution , -la-population-ou
les-ressources-toutes-seules

--- [-0.2,0.5,0.7],
---- [-0.2,0,-0.3],
---- [0.4,0.6,0]
]

X0=[0.01,-0.1,-1]#conditions-initiales

tmax=200
def derivative(X,-t,-alpha,-beta):
x,-y,-z=X
dotx=x*-alpha[0][0]+beta[0][0]*x*x+beta[0][1]*x*y
+beta[0][2]*x*z
doty=y*-alpha[1][0]+beta[1][0]*x*y+beta[1][1]*y*y
+beta[1][2]*y*z
dotz=z*-alpha[2][0]+beta[2][0]*x*z+beta[2][1]*z*y
+beta[2][2]*z*z
return np.array([dotx,-doty,-dotz])
Nt=1000
t=np.linspace(0.,tmax,-Nt)
res=integrate.odeint(derivative,-X0,-t,-args=(alpha,-beta))
x,-y,-z=res.T

plt.figure()
plt.grid()
plt.title("simulation-data")

```

```
plt.plot(t, x, '+y', label='x : pollution')
plt.plot(t, y, '+r', label='y : population')
plt.plot(t, z, '+b', label='z : ressource')
plt.xlabel('Temps t, [jours]')
plt.ylabel('')
plt.legend()

plt.show();
```

6 Bibliographie

[1] Donnella H.MEADOWS, Dennis L.MEADOWS, Jorgen RANDERS, William W. BEHRENS III; *The limit to growth*, 1972

[2]RAPPORT, ENSEIGNANT : PIERRE-LOUIS MONTAGARD, FACULTÉ DES SCIENCES UNIVERSITÉ MONTPELLIER, *Modélisation du vivant : théorie*, 2023-2024

[3]RAPPORT, MANON DE LA TOUCHE, SORBONNE UNIVERSITE, *Autour des équations de Lotka-Volterra et quelques apparentées en biologie : EDO,EDP, simulations*, Mai 2022

[4]LIEN INTERNET, CROISSANCE EXPONENTIELLE EXEMPLE DES BACTERIES, <https://openstax.org/books/biology/pages/45-3-environmental-limits-to-population-growth> (valable le 12/06/2024)

[5]LIEN INTERNET, EQUATIONS DE Lotka VOLTERRA, fr.wikipedia.org/wiki/Équations_de_prédation_de_Lotka-Volterra, (valable le 12/06/2024)

[6] LIEN INTERNET, MODELE DE MALTHUS
<https://www.livrescolaire.fr/page/11471231>, (valable le 12/06/2024)

[7]LIEN INTERNET, MODELES DEMOGRAPHIQUES
<https://eduscol.education.fr/document/25489/download> , (valable le 12/06/2024)

[8] LIEN INTERNET, LES TROIS APPROCHES DE MALTHUS
<https://www.cairn.info/revue-population-2007-2-page-253.htm> , (valable le 12/06/2024)

[9]RAPPORT, *Le modèle de Malthus*, UNIVERSITE JOSEPH FOURIER, 2012-2013

[10]LIEN INTERNET, MODELE DE VERHULST
fr.wikipedia.org/wiki/Modele_de_Verhulst, (valable le 12/06/2024)

[11] LIEN INTERNET, FONCTION LOGISITIQUE,
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_logistique_\(Verhulst\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_logistique_(Verhulst)) (valable le 12/06/2024)

[12] LIEN INTERNET, DYNAMIQUE DES POPULATIONS FACE A UN CHANGEMENT DE L'ENVIRONNEMENT,
<https://professionnels.ofb.fr/fr/node/1396> , (valable le 12/06/2024)

[13]LIEN INTERNET, LES LIMITES A LA CROISSANCE,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Les_limites_à_la_croissance , (valable le 12/06/2024)

[14] MEMOIRE DE ROBIN MICHARD, *Systèmes dynamiques et évolution de populations*, UNIVERSITE DE PARIS, 2017

Table des figures

1	Tableau répartitions des tâches	2
2	modèle de croissance exponentielle avec coefficient positif ($r=0,2$)	4
3	modèle de croissance exponentielle avec coefficient négatif ($r=-0,2$)	4
4	Graphique représentant l'évolution de la population en fonction des res- sources et de la pollution au cours du temps avec $a=1.5$	7
5	Graphique représentant l'évolution de la population en fonction des res- sources et de la pollution au cours du temps avec $a=-1.5$	7
6	graphique d'une levure cultivée dans des conditions idéales, / https://environmental- limits-to-population-growth	8
7	Graphique modélisant des équations différentielles ajustées	10
8	Graphique représentant l'évolution des proies et prédateurs en fonction du temps à l'aide du modèle de Lotka-Volterra	12
9	Graphique représentant l'évolution des proies et prédateurs en fonction du temps à l'aide du modèle de Lotka-Volterra	12
10	Schéma expliquant le théorème du problème de Cauchy	14
11	Modèle issu du rapport "Limits to growth" représentant l'évolution de l'alimentation , de la production industrielle, de la pollution ainsi que de la croissance démographique.	15
12	Schéma des impacts des trois variables étudiées sur chacune d'entre elles	17
13	Modèle représentant l'évolution de la population en fonction des res- sources et de la pollution au cours du temps	18
14	Schéma des impacts des trois variables étudiées sur chacune d'entre elles	19
15	Modèle représentant l'évolution de la population en fonction des res- sources et de la pollution au cours du temps	19

Sources figures :

Tous les graphiques ont été effectués à partir du logiciel python mis à part les figures suivantes :

Figure page de couverture : Getty – Ruben Earth

Figure 5 : Site internet ; <https://openstax.org/books/biology/pages/45-3-environmental-limits-to-population-growth>

Figure 9 : Tiré du Rapport "Limit to growth", Donella H.MEADOWS, Dennis L.MEADOWS, Jorgen RANDERS, William W. BEHRENS III