

Modélisation de l'inertie thermique des bâtiments



Étudiants :

Juliette BAROU
Romane GILLOOTS
Chloé MERCIER

Thomas EVENO
Romain JOLLY
Clarisse RAINGEARD

Enseignant-responsable du projet :
Jérôme YON

Date de remise du rapport : 15/06/2024

Référence du projet : STPI/P6/2024 – 28

Intitulé du projet : Modélisation de l'inertie thermique des bâtiments

Type de projet : *Modèle, simulation numérique, expérience*

Objectifs du projet :

- *Modéliser l'inertie thermique d'une pièce simple par simulation numérique*
- *Comparer les modèles mis au point pour déterminer le plus adapté*
- *Exploiter nos modélisations afin de discuter des effets de l'inertie thermique*

Mots-clefs du projet : *Transferts thermiques, Simulation et modélisation numérique*

Remerciements :

En préambule de ce rapport, nous tenons sincèrement à exprimer notre gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce projet.

Tout d'abord, nous adressons nos remerciements à notre professeur encadrant, Monsieur Jérôme YON, pour ses conseils avisés et ses explications précieuses tout au long de ce projet. Son soutien et sa disponibilité ont été essentiels à la réussite de notre travail.

Enfin, nous exprimons notre reconnaissance à l'INSA Rouen Normandie pour nous offrir l'opportunité de réaliser ce projet, qui constitue une expérience très enrichissante pour la suite de notre formation.

Table des matières

Notations et Acronymes	4
Introduction	5
1 Méthodologie, organisation du travail	6
2 Travail réalisé et résultats	7
2.1 Notions de transferts thermiques	7
2.1.1 Flux thermique	7
2.1.2 Transferts thermiques	7
2.1.3 Bilan thermique et équation de la chaleur	8
2.1.4 Résistances thermiques	8
2.1.5 Éclairement	8
2.2 Définition de l'inertie thermique	9
2.3 Modélisation de l'inertie thermique d'un mur simple	9
2.3.1 Modèle 1 : 3 couches de températures constantes	11
2.3.2 Modèle 2 : 3 portions affines	12
2.3.3 Conclusion relative aux deux modèles	14
2.4 Application du modèle à l'étude d'une pièce en situation réelle et mise en évidence des phénomènes de l'inertie thermique	15
2.4.1 Étude 1 : modélisation de la pièce sur 4 journées types	16
2.4.2 Étude 2 : modélisation de la pièce sur l'année	17
2.4.3 Conclusion relative aux deux études	17
2.4.4 Éléments en vue de l'ajout de l'éclairement solaire à l'application	18
Conclusion et perspectives	19
Bibliographie	20
A Démonstration de l'équation de la chaleur	21
B Mise en évidence des résistances thermiques	22
C Calculs du modèle de référence	24
D Calculs de la visualisation électrique du modèle 3 couches de températures constantes	26
E Courbes des écarts-types pour les différents modèles	29
F Application du modèle à une pièce simple sans éclairement	30
G Liens vers les codes Scilab réalisés, la vidéo de comparaison des deux modèles et les données extérieures utilisées	32
H Calculs de l'éclairement solaire sur les murs de notre pièce	33

Notations et Acronymes

- T : Température (K)
- int : Intérieur (*en indice*)
- ext : Extérieur (*en indice*)
- T_1, T_2, T_3, T_4 : Températures du mur (K)
- T_S : Température de surface (K)
- T_∞ : Température à l'infini (K)
- e : Épaisseur (m)
- L : Longueur (m)
- S : Surface (m^2)
- V : Volume (m^3)
- D : Diffusivité thermique (m^2/s)
- k_{tr} : Coefficient de conduction thermique ($W/m/K$)
- k_m : Coefficient de conduction thermique du mur ($W/m/K$)
- h : Coefficient de convection de l'air ($W/m^2/K$)
- R : Résistance thermique (K/W)
- $conv$: Convection (*en indice*)
- $cond$: Conduction (*en indice*)
- P : Puissance (W)
- p : Densité de puissance (W/m^3)
- E : Éclairement (W/m^2)
- $\vec{\varphi}$: Vecteur densité de flux (W/m^2)
- \vec{n} : Vecteur unitaire normal à la surface considérée
- Φ : Flux thermique (W)
- Φ_{ech} : Flux thermique échangé par le système (W)
- Φ_{prod} : Flux thermique produit par le système (W)
- Φ_{stc} : Flux thermique stocké par le système (W)
- ρ : Masse volumique du matériau (kg/m^3)
- U : Tension électrique (V)
- i : Intensité électrique (A)
- C : Capacité de condensateur (F)
- C_m : Capacité thermique massique du mur ($J/K/kg$)
- B_i : Nombre adimensionnel de Biot
- α : Angle d'élévation du soleil ($^\circ$)
- β : Angle azimutal du soleil ($^\circ$)

Introduction

Dans un contexte où la lutte contre le réchauffement climatique est devenue une priorité mondiale, la gestion efficace de l'énergie est d'une importance capitale. En effet, les températures moyennes augmentent et les épisodes de chaleur extrêmes sont de plus en plus fréquents. Ainsi, un secteur dont l'adaptation aux enjeux climatiques est indispensable est celui du bâtiment. Un défi crucial est la minimisation de la consommation énergétique tout en préservant confort et durabilité des environnements intérieurs. C'est pourquoi l'inertie thermique est un phénomène nécessaire à prendre en compte pour réduire la dépendance aux systèmes de climatisation ou de chauffage énergivores.

En effet, la consommation énergétique au sein d'un bâtiment dépend, certes, des installations choisies, cependant, elle est également étroitement liée au choix des matériaux, de leurs dimensions et de leur disposition. L'inertie thermique témoigne de cela puisqu'elle représente la capacité, dépendant de la nature des matériaux, d'un bâtiment à stocker, conserver puis restituer l'énergie thermique. Ce phénomène physique fait donc appel à l'étude des transferts thermiques au sein d'un bâtiment. Cette étude s'inscrit ainsi parfaitement dans le cadre du cours de P8.1 sur les transferts thermiques que nous avons tous suivi au quatrième semestre.

Notre projet a pour objectif de modéliser l'inertie thermique d'une pièce, en restant le plus fidèle possible à la réalité. Nous aborderons dans un premier temps les notions thermiques nécessaires aux études que nous allons mener. Ensuite, à partir d'un mur simple, nous établirons plusieurs modèles thermiques de ce dernier. Par simulation numérique, nous déterminerons le modèle le plus adapté en terme de complexité et de précision pour ensuite l'appliquer à une pièce plus complexe. L'objectif final est de pouvoir étudier les phénomènes de l'inertie thermique de ce système en agissant sur les paramètres pris en compte dans notre modélisation. Nous allons notamment observer les différences entre 4 journées types en été et en hiver, ainsi que celles entre un mur fin et un mur épais.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

Durant les premières séances, nous avons tout d'abord acquis des connaissances sur l'inertie thermique grâce à des recherches mais aussi aux explications de notre professeur encadrant M.Yon. De plus, il était important pour nous de fixer un objectif relativement précis à notre projet afin d'estimer correctement ce que nous étions capable de réaliser dans le temps imparti.

Ensuite, nous nous sommes globalement répartis en trois binômes : bibliographie et rapport, programmation et simulation numérique, modélisation physique et établissement d'équations. Le travail que nous avons effectué seul ou en groupe en dehors des séances hebdomadaires a permis à chacun d'avancer sur ses tâches. Les séances à l'INSA étaient surtout utilisées pour faire le point tous ensemble sur la progression de chacune des tâches, et nous permettaient de partager notre avancement et nos interrogations à M.Yon. Lors des dernières séances, nous nous sommes concentrés sur la représentation graphique de nos résultats ainsi que sur la rédaction du rapport.

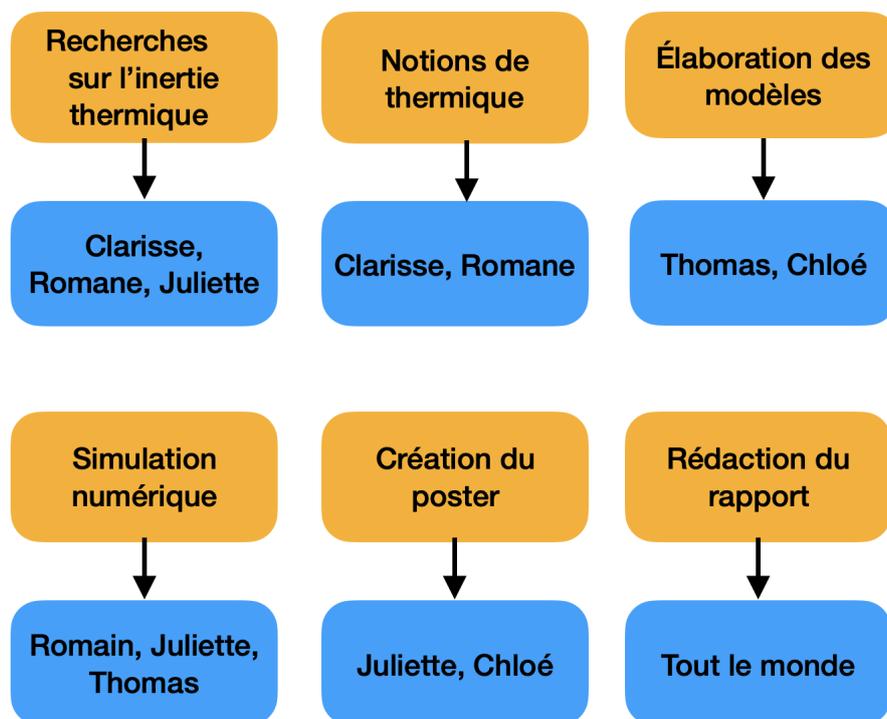


FIGURE 1.1 – Organigramme de la répartition des tâches

Chapitre 2

Travail réalisé et résultats

2.1 Notions de transferts thermiques

Dans le but d'étudier l'inertie thermique d'une pièce, nous allons tout d'abord voir les notions de thermique utilisées tout au long du projet. Ces notions proviennent du cours de P8.1 sur les transferts thermiques (point [1] de la bibliographie).

2.1.1 Flux thermique

Le flux thermique est une quantité de chaleur traversant une surface donnée par unité de temps. Le transfert thermique correspond à ce flux thermique se propageant d'un système à l'autre, du chaud vers le froid, de manière irréversible. C'est une puissance thermique en Watts calculable à l'aide de la formule :

$$\Phi = \iint_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

$\vec{\varphi}$ est la densité de flux qui traverse une unité de surface dS . Elle indique la direction et le sens du flux. Elle dépend du type de transfert thermique. Le vecteur unitaire \vec{n} est normal à la surface considérée et est orienté vers l'extérieur du système.

2.1.2 Transferts thermiques

Dans le cadre de ce projet, nous faisons appel à deux types de transferts thermiques :

La conduction

La conduction thermique est un transfert thermique spontané d'une région de température plus élevée vers une région de température plus basse. Elle se fait sans déplacement global de matière. Elle est caractérisée par la loi de Fourier nous donnant l'expression de la densité de flux de conduction :

$$\vec{\varphi}_{cond} = -k_{tr} \vec{grad}(T)$$

k_{tr} est le coefficient de conduction thermique en $W/m/K$. Il dépend du matériau utilisé.

La convection

La convection est un transfert thermique accompagnant les déplacements macroscopiques de matière. Il invoque des fluides en mouvement tels que les gaz et les liquides qui échangent de la chaleur. Sa densité de flux est donnée par la loi de Newton :

$$\vec{\varphi}_{conv} = h(T_S - T_\infty)\vec{n}$$

T_S est la température à la surface du solide et T_∞ est la température extérieure loin du solide. h est le coefficient de convection thermique en $W/m^2/K$ et \vec{n} le vecteur normal à la surface.

2.1.3 Bilan thermique et équation de la chaleur

Un bilan thermique permet de modéliser les différents transferts d'une pièce et notamment l'inertie thermique qui est du stockage thermique. Le bilan thermique découle du principe de conservation de la matière, et s'écrit :

$$\Phi_{prod} = \Phi_{ech} + \Phi_{stc}$$

- Φ_{prod} : le flux produit dans le système étudié. Dans ce projet, ce flux sera lié au chauffage de la pièce.
- Φ_{ech} : les flux échangés par le système par conduction et convection (et par rayonnement, mais nous ne considérons pas ce mode de transfert thermique dans ce projet).
- Φ_{stc} : le flux stocké par le système, donné par la formule :

$$\Phi_{stc} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} dV$$

avec ρ la masse volumique en kg/m^3 , C la capacité massique du matériau en $J/K/kg$ et V le volume du système.

À partir du bilan thermique, nous pouvons démontrer l'équation de la chaleur qui est sa version locale (*démontrée en Annexe A*) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \Delta T$$

avec p la densité de puissance d'une source thermique en W/m^3 , ΔT le Laplacien de température du système et $D = \frac{k_{tr}}{\rho C}$ la diffusivité thermique, liée au matériau.

2.1.4 Résistances thermiques

Dans le cadre de nos modélisations, nous utiliserons une analogie électrique qui permet de simplifier la résolution des problèmes. En effet, dans la loi d'Ohm $U = R \times I$, on peut associer l'intensité I à une puissance thermique Φ et la tension U (différence de potentiels électriques) à une différence de températures. Il apparaît alors une résistance thermique R_{th} telle que $T_1 - T_2 = R_{th} \times \Phi$.

Pour les différents types de transfert thermiques, nous avons les résistances thermiques (*démontrées en Annexe B*) :

$$R_{cond} = \frac{e}{k_{tr} S}$$

$$R_{conv} = \frac{1}{h S}$$

2.1.5 Éclairement

L'éclairement E (W/m^2) est le lien entre le flux lumineux Φ (W) reçu par une surface et l'aire de cette surface S (m^2).

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

2.2 Définition de l'inertie thermique

L'inertie thermique d'un bâtiment est sa capacité à stocker de l'énergie thermique dans sa structure et à la redélivrer. Elle est donc liée à la vitesse à laquelle le bâtiment se refroidit ou se réchauffe. L'inertie thermique d'un matériau se caractérise notamment par 2 grandeurs :

- la diffusivité thermique (D en m^2/s) qui correspond à la vitesse à laquelle la chaleur se propage par conduction dans un corps ;
- l'effusivité thermique (en $J/(K.m^2.s^{1/2})$) qui caractérise sa capacité à échanger de la chaleur avec son environnement pour équilibrer sa température avec celui-ci.

L'étude de l'inertie thermique est indispensable pour garantir le confort thermique d'une maison. Ce dernier est généralement associé à une température stable tout au long de l'année, des variations de température lentes, des températures agréables, en été comme en hiver et de faibles factures de chauffage (*points [2] et [3] de la bibliographie*).

L'isolation thermique

Une isolation thermique par l'extérieur permet de profiter de l'inertie thermique du bâtiment. Un logement construit avec des matériaux lourds comme le béton ou la brique offre une capacité thermique élevée. Ainsi, il garde la chaleur l'hiver, ce qui permet de limiter les dépenses énergétiques. À contrario, l'été, l'habitation est plus fraîche. Ce type d'isolation est moins installé à cause de son coût nettement supérieur à celui de l'isolation par l'intérieur. Cette dernière ne permet pas de tirer parti des avantages de l'inertie thermique des matériaux de son logement. Agissant comme une barrière, les isolants placés à l'intérieur bloquent la restitution des énergies calorifiques (*bibliographie [4]*). Cette isolation entraîne également de nombreux ponts thermiques. Ce sont des ruptures d'isolants qui surviennent généralement à l'intersection de deux parois par exemple au niveau de murs intérieurs ou plafonds. Ils sont responsables d'environ 5 à 10 % des pertes thermiques (*bibliographie [5]*).

Maintenant que nous avons explicité les notions nécessaires liées aux transferts thermiques et que nous avons défini l'inertie thermique, nous allons pouvoir dédier la suite de ce rapport à la modélisation de cette dernière pour un mur simple.

2.3 Modélisation de l'inertie thermique d'un mur simple

L'objectif de cette partie est de mettre au point un modèle permettant de modéliser le plus précisément possible les transferts et l'inertie thermique au sein d'un mur de béton, tout en limitant la complexité algorithmique.

Système étudié

Le mur considéré a une épaisseur $e = 0,2\text{ m}$, une surface $S = 6\text{ m}^2$ et la pièce intérieure est de longueur $L = 5\text{ m}$. Le mur est exposé à une température extérieure $T_{ext} = 5^\circ\text{C}$ fixe et à une température intérieure T_{int} variable. La pièce est équipée d'un radiateur thermostaté fournissant une puissance $P = 300\text{ W}$ telle que : $19^\circ\text{C} < T_{int} < 21^\circ\text{C}$. Les autres murs de la pièce sont calorifugés. Nous considérons que le mur est soumis à des flux convectifs intérieurs et extérieurs : $\Phi_{conv,int}$ et $\Phi_{conv,ext}$ avec $h_{int} = h_{ext} = 10\text{ W/m}^2/\text{K}$. La chaleur est transmise dans le mur via des flux conductifs Φ_{cond} . Une partie de cette chaleur est stockée avec Φ_{stc} . On néglige les flux de rayonnements. On considère également que les flux se font uniformément sur les directions \vec{y} et \vec{z} , nous donnant donc un problème en 1D sur \vec{x} . Pour

le béton, on a $k_m = 1,28 \text{ W/m/K}$, $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ et $C_p = 880 \text{ J/kg/K}$.

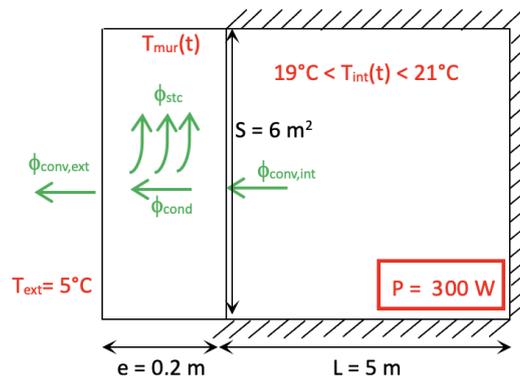


FIGURE 2.1 – Schéma de la pièce modélisée

Pour mettre au point notre modèle, nous nous appuyerons sur un modèle de référence, qui nous permettra de discuter de la validité de nos modèles.

Explication du modèle de référence

Ce modèle se base sur l'équation de la chaleur dans le mur en l'absence de source de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Une discrétisation de l'espace et du temps donne : (calculs détaillés en Annexe C)

$$\vec{T}_{j+1} = \vec{T}_j + D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} [M] \vec{T}_j \quad \text{où } \vec{T}_j = \begin{pmatrix} T(1; j) \\ T(2; j) \\ \vdots \\ T(i; j) \end{pmatrix} \text{ représente les températures du mur à l'instant } j$$

$$\text{et } [M] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Nous avons comme condition initiale : $\vec{T}_1 = T_0 = 20^\circ\text{C}$

Les conditions spatiales sont :

$$T_j(1) = \frac{1}{1+B_i} (B_i T_{ext} + T_j(2)) \quad \text{avec } B_i = \frac{h dx}{k_m} \text{ le nombre de Biot pour une tranche.}$$

$$T_j(i) = \frac{1}{1+B_i} (B_i T_{int,j} + T_j(i-1))$$

Pour la température intérieure, nous avons :

$$T_{int,j+1} = T_{int,j} + \frac{dt(P - \Phi)}{C_{air} S L}$$

$$\text{avec } \Phi = \frac{k_m S}{dx} (T_j(i) - T_j(i-1))$$

En choisissant un nombre important de tranches (150) et un pas de temps adapté ($dt = \frac{dx^2}{2D}$), ce modèle nous permet d'obtenir un profil précis de la température au sein du mur.

Nous implémentons ce modèle avec Scilab pour calculer et tracer le profil (voir Annexe G pour accéder au code source).

L'inconvénient de ce modèle est qu'il nécessite un long temps de calculs, nous ne pouvons donc pas envisager de l'utiliser pour traiter des cas plus complexes. C'est pour cela que nous voulons mettre au point un modèle plus simple. Nous allons par la suite aborder deux modèles que nous comparerons entre eux et à ce modèle de référence.

Pour discuter de la validité de ces modèles, nous tracerons, d'une part, simultanément les profils de températures, puis d'autre part, nous calculerons un écart-type temporel des températures des modèles par rapport à celles du modèle de référence tel que :

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_{ref,i}^{(t)} - T_{mod,i}^{(t)})^2}{N}}$$

2.3.1 Modèle 1 : 3 couches de températures constantes

1) Mise au point du modèle

Ce premier modèle reprend le modèle de référence en le limitant à seulement 3 couches comme représenté ci-dessous :

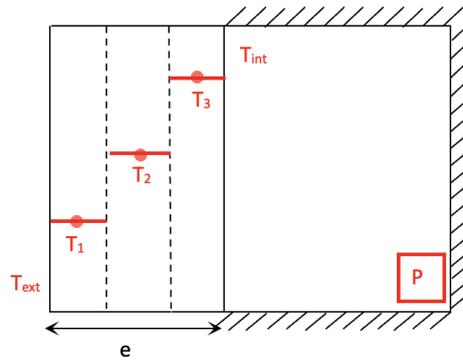


FIGURE 2.2 – Schéma du modèle 1

Nous avons toujours les températures T_1 et T_3 qui sont régies par les conditions spatiales :

$$T_{1,j} = \frac{1}{1 + B_i} (B_i T_{ext} + T_{2,j})$$

$$T_{3,j} = \frac{1}{1 + B_i} (B_i T_{int,j} + T_{2,j})$$

avec $B_i = \frac{h \Delta x}{k_m}$.

Pour T_2 , nous avons alors :

$$T_{2,j+1} = T_{2,j} + \frac{D dt}{\Delta x^2} (T_{1,j} - 2T_{2,j} + T_{3,j})$$

où $\Delta x = \frac{e}{3}$ et nous utilisons le même pas de temps dt que pour le modèle de référence.

Pour la température intérieure, nous avons :

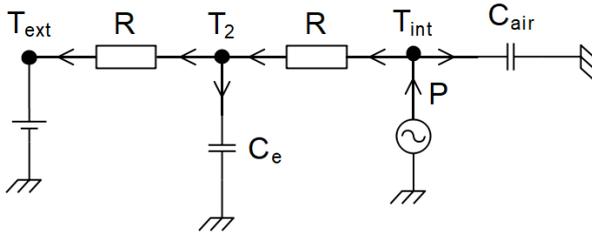
$$T_{int,j+1} = T_{int,j} + \frac{dt(P - \Phi)}{C_{air} S L}$$

avec $\Phi = \frac{k_m S}{\Delta x} (T_{3,j} - T_{2,j})$

Il est évident que ce modèle est moins précis, mais il permet de réduire de manière considérable le nombre de calculs, donc le temps de résolution.

2) Visualisation électrique du modèle

En manipulant les équations obtenues, il est possible de trouver un équivalent électrique du modèle (voir Annexe D pour les détails) :



$$\text{avec } R = \frac{1+B_i}{hS} \text{ et } C_e = \frac{\rho C S e}{3}$$

Ce qui correspond aux équations :

$$T_{2,j+1} = T_{2,j} + \frac{dt}{C_e R} (T_{int,j} - 2T_{2,j} + T_{ext})$$

$$T_1 = \frac{B_i T_{ext} + T_2}{1+B_i}$$

$$T_3 = \frac{B_i T_{int,j} + T_2}{1+B_i}$$

$$T_{int,j+1} = T_{int,j} + \frac{dt}{C_{air} S L} \left(P + \frac{(T_{2,j} - T_{1,j})}{R} \right)$$

FIGURE 2.3 – Schéma électrique équivalent du modèle 3 couches

Cette visualisation électrique permet de nous ramener aux analogies électriques, et d'obtenir une seule équation à calculer pour le mur, celle de T_2 , ce qui réduit encore le nombre de calculs. Nous implémentons ce modèle avec Scilab d'une manière similaire que pour le modèle de référence (voir Annexe G pour accéder au code).

3) Résultats du modèle

Tout d'abord, nous observons que ce modèle atteint plus vite son état quasi-stationnaire que le modèle de référence. Ensuite, nous observons que les deux profils se superposent relativement bien une fois les états quasi-stationnaires atteints. Ces deux observations se traduisent par l'écart type très important en début de simulation ($\sigma(t)$ atteint 3), qui est réduit à $\sigma(t) = 0,4$ une fois les modèles stabilisés (voir figure 1, Annexe E).

Nous pouvons donc en conclure que le fait de réduire le mur à trois tranches a pour effet de réduire l'inertie thermique de celui-ci, étant donné que c'est dans l'état transitoire que le modèle diffère le plus de la référence. Ce modèle reste cependant une bonne alternative au modèle de référence pour simuler l'inertie thermique.

Néanmoins, nous allons maintenant développer un autre modèle qui se base sur une approche plus intuitive du problème, pour essayer de mieux modéliser l'inertie thermique.

2.3.2 Modèle 2 : 3 portions affines

1) Mise au point du modèle

L'idée de ce second modèle est d'approximer le profil de référence par des droites dont les extrémités peuvent varier. Nous divisons le mur en trois tranches dans lesquelles règnent les trois profils affines comme représenté sur la figure 2.4.

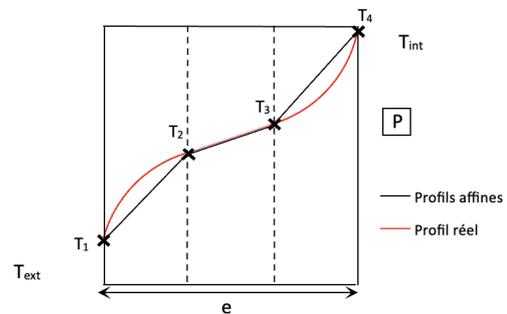
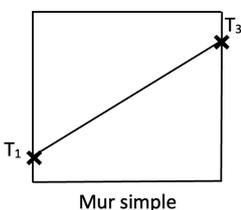
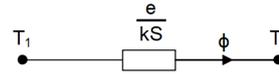


FIGURE 2.4 – Schéma du modèle 2



Avant d'étudier ce mur, considérons d'abord un mur simple avec des températures constantes imposées sur ses extrémités : en régime stationnaire, nous avons un modèle utilisant la résistance thermique qui est valable.

$$\Phi = \frac{kS}{e}(T_3 - T_1)$$



Nous ajoutons ensuite une température T_2 variable située dans la matière du mur :

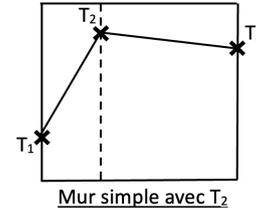
Le but de cette température est de modéliser le stockage du mur : $\frac{\partial T_2}{\partial t} \neq 0$

Dans le mur, on retrouve un flux stocké :

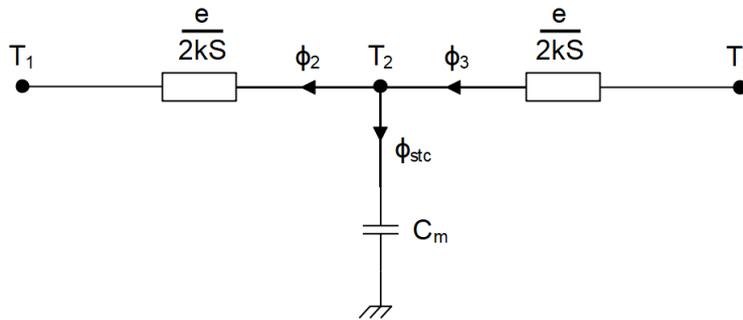
$$\Phi_{stc} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} dV \text{ avec ici } T = T_2$$

$$\Phi_{stc} = \rho C V \frac{dT_2}{dt} = \rho C S e \frac{dT_2}{dt} = C_m \frac{dT_2}{dt} \text{ avec } C_m = \rho C S e$$

Or, en électricité, pour un condensateur nous avons : $i = C \frac{dU}{dt}$ avec i l'intensité, C la capacité du condensateur et U la différence de potentiel. L'analogie est donc : $i \Leftrightarrow \Phi_{stc}$, $U \Leftrightarrow T_2 - 0 = T_2$ et $C \Leftrightarrow C_m$



Nous obtenons alors le schéma électrique suivant :

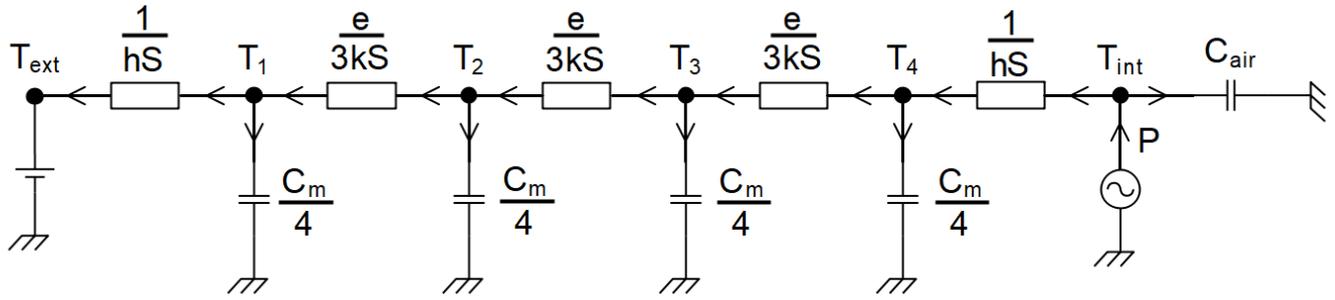


Un bilan thermique ou une loi des nœuds, nous donne :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 + \Phi_{stc} \Leftrightarrow \frac{2kS}{e}(T_3 - T_2) = \frac{2kS}{e}(T_2 - T_1) + C_m \frac{dT_2}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{dT_2}{dt} &= \frac{2kS}{C_m e}(T_3 - 2T_2 + T_1) = \frac{2kS}{\rho C S e^2}(T_3 - 2T_2 + T_1) = \frac{2D}{e}(T_3 - 2T_2 + T_1) \end{aligned}$$

Si nous fixons une température T_2 quelconque initialement, nous vérifions que le profil s'adapte bien pour atteindre une droite. Avec le code "Test condensateur.sci" disponible en Annexe G, nous constatons effectivement que le profil atteint son état stationnaire sous forme de profil affine. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que nous pouvons ajouter un condensateur à n'importe quelle température du mur pour représenter son stockage. L'idée est que si on souhaite représenter le stockage du mur par n températures variables, alors on associe à chacune d'elles un condensateur de capacité $C = \frac{C_m}{n}$: chaque température variable participe alors au stockage du mur de façon égale.

Nous reprenons le modèle avec quatre températures variables à la place d'une. Pour permettre le régime variable des températures et pour modéliser le stockage du mur, nous associons donc des condensateurs à chacune d'elles. Nous ajoutons aussi les échanges convectifs et le stockage de l'air pour nous ramener à notre étude du mur. Un générateur d'intensité P permet de modéliser le radiateur. Nous avons alors le schéma électrique suivant :



Les lois des nœuds nous donnent :

$$\begin{cases} P - C_{air} \frac{dT_{int}}{dt} - (T_{int} - T_4)hS = 0 \\ (T_{int} - T_4)hS - \frac{C_m}{4} \frac{dT_4}{dt} - (T_4 - T_3) \frac{3kS}{e} = 0 \\ (T_4 - T_3) \frac{3kS}{e} - \frac{C_m}{4} \frac{dT_3}{dt} - (T_4 - T_3) \frac{3kS}{e} = 0 \\ (T_3 - T_2) \frac{3kS}{e} - \frac{C_m}{4} \frac{dT_2}{dt} - (T_2 - T_1) \frac{3kS}{e} = 0 \\ (T_2 - T_1) \frac{3kS}{e} - \frac{C_m}{4} \frac{dT_1}{dt} - (T_1 - T_{ext})hS = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dT_{int}}{dt} = \frac{hS}{C_{air}}(T_4 - T_{int}) + \frac{P}{C_{air}} \\ \frac{dT_4}{dt} = \frac{12D}{e^2}(T_3 - T_4) + \frac{4hS}{C_m}(T_{int} - T_4) \\ \frac{dT_3}{dt} = \frac{12D}{e^2}(T_2 - 2T_3 + T_4) \\ \frac{dT_2}{dt} = \frac{12D}{e^2}(T_1 - 2T_2 + T_3) \\ \frac{dT_1}{dt} = \frac{12D}{e^2}(T_2 - T_1) + \frac{4hS}{C_m}(T_{ext} - T_1) \end{cases}$$

Nous implémentons une nouvelle fois dans Scilab ces nouvelles équations et traçons le profil de température au sein du mur (*voir Annexe G pour accéder au code*).

2) Résultats du modèle

Cette fois-ci, nous observons que le profil suit de manière très précise le modèle de référence, contrairement au premier modèle qui atteignait plus vite son état quasi-stationnaire. L'écart-type maximal de ce modèle est d'environ 0,7 en début de simulation. Une fois celle-ci stabilisée, on observe que l'écart-type devient très faible, voire quasi-nul (*voir figure 2, Annexe E*).

Nous pouvons donc en conclure que ce modèle simule précisément l'inertie thermique du mur, il faut cependant noter qu'il nécessite un peu plus de calculs que le modèle à trois couches de températures constantes.

2.3.3 Conclusion relative aux deux modèles

Finalement, nous avons mis au point deux modèles qui se rapprochent plus ou moins du modèle de référence. Nous observons que le modèle à trois couches de températures constantes fournit une moins bonne précision que le modèle électrique avec 4 températures variables. Cependant, il faut souligner le fait que ce premier modèle est issu de l'équation de la chaleur, le rendant ainsi bien justifié d'un point de vue physique. Le deuxième modèle est quant à lui plus difficile à justifier physiquement. En effet, nous attribuons la totalité de la masse du mur à seulement 4 points, alors que le stockage se fait réellement dans la globalité du mur. De plus, ce modèle provient uniquement d'analogies électriques et de raisonnements intuitifs, sans partir de l'équation de la chaleur. Ainsi, pour l'application à venir, nous allons choisir d'utiliser la forme électrique du modèle à trois couches de températures constantes, dont la justification est plus solide. Nous pouvons visualiser la comparaison des trois modèles à un instant t sur la figure ci-dessous (le modèle de référence est la courbe noire).

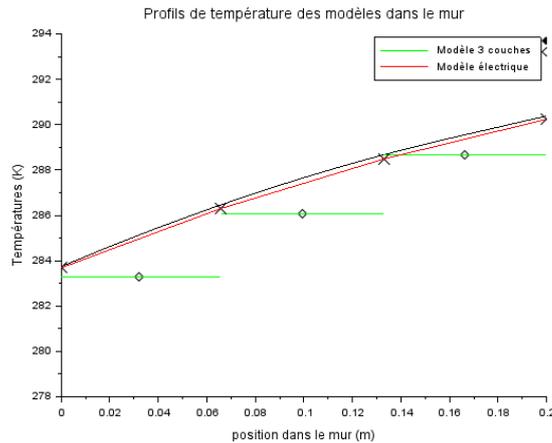


FIGURE 2.5 – Profils de température des modèles dans le mur

Maintenant que nous avons élaboré un modèle simulant relativement bien l’inertie thermique avec une complexité réduite, nous allons pouvoir l’appliquer à un système plus complexe.

2.4 Application du modèle à l’étude d’une pièce en situation réelle et mise en évidence des phénomènes de l’inertie thermique

Dans cette dernière partie de notre projet, l’objectif est d’utiliser le modèle mis au point dans la partie précédente pour traiter des cas plus complexes, et pour mettre en évidence des phénomènes de l’inertie thermique.

Présentation du système

Le nouveau système étudié est une pièce de 3m par 3m, avec une hauteur de 2,5m située à Saint-Étienne-du-Rouvray. Elle est constituée de 3 murs, d’une baie vitrée orientée plein sud considérée calorifugée, d’un plafond calorifugé et d’un sol. Le sol est considéré comme un mur, étant donné que comme les murs, il échange par conduction et convection avec l’air intérieur et l’air extérieur du vide sanitaire. La pièce est équipée d’un chauffage d’une puissance de 800W, maintenant une température de consigne comprise entre 19°C et 21°C. À chaque mur, nous associons le modèle à trois couches de températures constantes, sous sa forme électrique. Pour l’ensemble de nos études, nous disposons de données réelles enregistrées à Saint-Étienne-du-Rouvray pendant l’année 2020, comme par exemple la température extérieure. Ces données sont disponibles sur le site de la commission européenne dont le lien est disponible au point [8] de la bibliographie. Des courbes de la température extérieure pendant des journées types sont présentes sur l’Annexe F. Nous importons ces données directement dans le code Scilab.

Nous allons réaliser deux études : une étude à l’échelle de 4 journées types, et une étude à l’échelle de l’année. Pour chacune d’elles, nous allons considérer deux configurations de la pièce : une configuration dite "fine" avec des murs d’épaisseur $e = 10cm$, et une configuration dite "épaisse" avec des murs d’épaisseur $e = 50cm$. Nous accentuons volontairement cette différence d’épaisseur pour mettre davantage en évidence les phénomènes d’inertie thermique. Pour ces deux études, nous imposons un temps d’adaptation du modèle de cinq

jours dans le code avant de commencer à enregistrer les résultats obtenus, pour être sûrs que le modèle soit stabilisé. Étant donné que tous les murs sont initialisés à 20°C, cela aurait pu poser problème sans ce temps d'adaptation, notamment en hiver.

2.4.1 Étude 1 : modélisation de la pièce sur 4 journées types

Dans cette étude, nous modélisons simultanément le système décrit précédemment sur 4 journées types d'été en début août et sur 4 journées hivernales de mi-décembre. Pour comparer les configurations fine et épaisse, nous calculons les consommations totales du radiateur sur la durée de la simulation. Nous traçons également l'évolution des températures intérieures et extérieures pendant les 4 journées d'été.

Résultats sur 4 journées types :

Après modélisation sur les 4 journées types, nous obtenons les résultats suivants :

- **En été :** Le chauffage ne s'allume jamais pour les deux configurations, il n'y a donc aucune consommation. Cela est dû aux températures extérieures suffisamment élevées à elles-seules pour chauffer l'air intérieur.
- **En hiver :** Avec un mur fin, le chauffage fonctionne pendant 96h et consomme 76,8kWh (ce qui représente un coût de 19,32€), tandis qu'avec un mur épais, le chauffage ne fonctionne uniquement pendant 84,5h et consomme 67,6kWh (ce qui représente un coût de 17€).

→ Ainsi, nous constatons qu'avec un mur épais, nous consommons 12% de moins qu'avec un mur fin. Cela est d'une part dû à la meilleure isolation fournie par le mur épais (si e augmente alors la résistance thermique du mur aussi), mais c'est aussi dû à sa plus grande inertie thermique. La capacité du condensateur associé au mur augmente en augmentant l'épaisseur. Ainsi, le mur épais est capable de stocker davantage d'énergie, diminuant donc l'amplitude des variations de température. Cette question d'amplitude est beaucoup plus visible et justifiée en traçant le graphe des températures intérieures et extérieure pendant les 4 journées d'été :

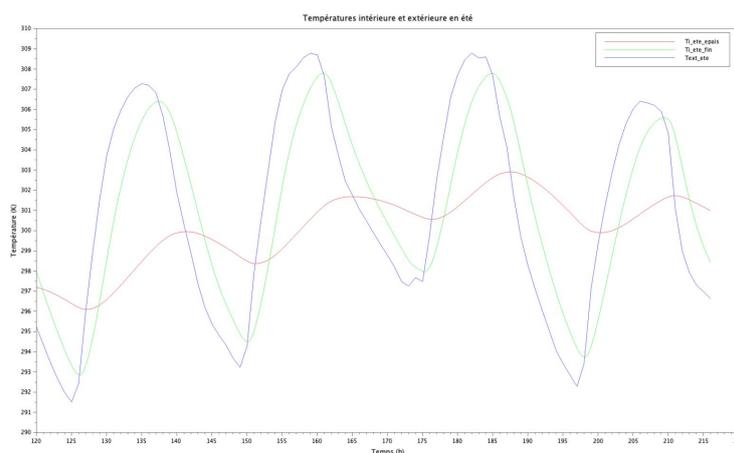


FIGURE 2.6 – Variations temporelles des températures extérieures (bleu) et intérieures de la pièce en été, avec mur fin (vert) et épais (rouge)

Nous avons plusieurs observations par rapport à ce graphe :

- Tout d’abord, nous observons des différences d’amplitudes entre T_{int} avec mur épais et T_{int} avec mur fin. Ainsi, le mur épais permet de mieux “contrer” les variations de températures extérieures. Cela est justement caractéristique de l’inertie thermique du mur. Le mur avec plus de masse possède donc une plus grande inertie, ce qui est cohérent au fait que la capacité du condensateur associé au mur est plus grande.
- De plus, on observe un déphasage entre les courbes T_{ext} et T_{int} . Le déphasage est d’autant plus grand que le mur est épais. C’est une autre conséquence du phénomène d’inertie thermique. Les murs mettent un certain temps à diffuser la chaleur jusque l’air intérieur, et ce temps croît avec l’augmentation de masse du mur.

Conclusion de l’étude 1

Pour conclure sur cette étude, la simulation de quatre jours en été/hiver avec des murs fin/épais nous a permis de bien mettre en évidence les phénomènes liés à l’inertie thermique des bâtiments. Plus un mur possède de masse, moins il est réactif aux variations de températures extérieures, et donc plus il met de temps à transmettre la chaleur à la pièce. Ainsi, cette étude a permis de montrer qu’une inertie thermique plus grande fournit un meilleur confort thermique, en répondant aux critères que nous avons définis dans le paragraphe 2.2.

2.4.2 Étude 2 : modélisation de la pièce sur l’année

Cette fois-ci, nous réalisons les calculs sur toute l’année 2020, pour obtenir des résultats à une plus grande échelle. Ici, pour comparer les deux configurations, nous traçons les consommations mensuelles du radiateur.

Résultats sur une année complète :

La consommation électrique mensuelle due au chauffage de la pièce est présentée dans la seconde page de l’*Annexe F*.

Sur une année complète, nous constatons qu’une pièce équipée de murs fins consomme au total 5088 kWh, tandis qu’une pièce avec des murs épais consomme 4069 kWh. Cette baisse de consommation électrique de 20% met encore en avant l’importance de l’inertie thermique d’un bâtiment. En effet, plus les murs sont épais, plus ceux-ci sont capables de stocker la chaleur pendant la journée pour ensuite la restituer, permettant de limiter le temps de fonctionnement du chauffage.

Conclusion de l’étude 2

Pour conclure sur cette étude, la simulation à l’année nous a permis de mettre encore en évidence l’importance de l’inertie thermique, avec les différences de consommation entre les deux configurations.

2.4.3 Conclusion relative aux deux études

En conclusion de ces deux études, notre modèle appliqué à la pièce en situation réelle nous a permis de mettre en évidence les phénomènes de l’inertie thermique. Celle-ci se caractérise d’abord par une plus grande capacité à limiter les variations de températures en stockant l’énergie et en la redélivrant quand la masse des murs augmente. Elle se caractérise aussi par les déphasages observés entre les températures extérieures et intérieures, provenant des temps de diffusion de l’énergie qui s’allongent en augmentant l’épaisseur des murs.

Nous nous attendions cependant à avoir une différence plus marquée entre les deux configurations, et aussi à avoir des consommations plus faibles en été. Nous pouvons expliquer cela par le fait que le modèle à trois couches de températures constantes n'est pas parfait. Nous avons en effet vu que, dans les régimes transitoires, il était peu précis ; or les simulations que nous avons réalisées sont constamment en régime transitoires, avec la température extérieure qui varie. Il serait intéressant d'essayer de refaire ces simulations mais avec le modèle électrique avec trois profils affines. Celui-ci étant plus précis, nous aurions peut-être des résultats différents.

Malgré cela, l'important est que nous avons bien réussi à mettre en évidence les phénomènes de l'inertie thermique de la pièce.

2.4.4 Éléments en vue de l'ajout de l'éclairage solaire à l'application

Cette partie est dédiée à un approfondissement de l'étude du système précédent, que nous n'avons pas pu mener à terme à cause d'un problème de signe non résolu dans le temps imparti. Elle présente cependant des éléments déjà bien développés pour une potentielle reprise du projet.

Pour modéliser de manière plus fiable l'inertie thermique des bâtiments, il est intéressant d'ajouter un éclairage solaire. En effet, le Soleil est un apport majeur de chaleur et joue un rôle capital dans le bilan thermique des murs.

Nous nous sommes alors proposés d'exprimer la puissance solaire reçue par chacun des murs et le sol grâce à des projections de l'éclairage solaire grâce aux 2 angles de la position du Soleil à tout instant : l'élévation α et l'azimut β . Pour rappel, la puissance radiative reçue par une surface est $P_{soleil} = E_{clairement} \times S$ (en considérant que les parois soient complètement absorbantes). Le calcul de ces projections est présent dans l'Annexe H. Nous avons également vérifié la cohérence de ces projections en vérifiant que la somme de toutes les puissances radiatives collectées par les murs intérieurs et le sol était bien inférieure à la puissance maximale pouvant être collectée, c'est-à-dire si l'éclairage était normal à la baie vitrée. Les courbes sont présentes à la fin de la même annexe.

Enfin, l'éclairage solaire est physiquement reçu sur les surfaces et doit donc être inclus dans les équations des températures de surface, soient T_1 et T_3 . De ce fait, la version électrique du modèle à trois couches de températures constantes, faisant appel uniquement à la température centrale T_2 représentant le condensateur, n'est plus adaptée. Il faudrait alors utiliser la version antérieure, qui elle, nécessite les équations des trois températures T_1 , T_2 et T_3 . Il suffit de revoir les conditions limites sur T_1 et T_3 en ajoutant le flux solaire. Nous avons implémenté le tout dans le code Scilab mais n'avons cependant pas de résultat fiables à présenter à cause d'une erreur de signe que nous avons potentiellement réglé en mettant un signe moins devant le terme de puissance solaire dans l'équation de T_3 , sans trouver la justification de ce changement.

Conclusion et perspectives

Ce projet visait à modéliser l'inertie thermique et à en montrer les effets sur le confort thermique et la consommation énergétique. Tout d'abord, nous avons mis en place différents modèles dans l'objectif de simuler l'inertie thermique tout en minimisant la complexité algorithmique. Celui retenu est le modèle du mur à trois couches de températures constantes, qui est justifié physiquement par l'équation de la chaleur. Ensuite, nous avons appliqué ce modèle à un système plus complexe : une pièce pilotée par trois murs et un sol, en situation réelle. Les résultats obtenus sur quatre jours et sur une année, avec deux épaisseurs de mur différentes, mettent en évidence l'impact de l'inertie thermique pour une pièce. Le premier phénomène majeur de l'inertie thermique réside dans la capacité des murs à diminuer les amplitudes des variations de température quand leur masse augmente. Le deuxième phénomène retenu se caractérise par les déphasages observés entre la température intérieure de la pièce et la température extérieure, qui croît avec l'augmentation de la masse du mur. Par conséquent, l'inertie thermique permet effectivement, dans notre cadre d'étude, de diminuer la consommation énergétique qui est un enjeu écologique au cœur de l'actualité. Nous avons ainsi confirmé l'importance de la prendre en compte dans des travaux de construction ou de rénovation de bâtiments.

De plus, ce projet nous a permis d'acquérir des connaissances sur l'inertie thermique et notamment de mettre en application notre cours de P8.1 sur les transferts thermiques. Aussi, nous avons appris à programmer des simulations avec Scilab plus en détail. Enfin, nous avons développé nos compétences de gestion de projet et de travail d'équipe.

Pour aller plus loin, beaucoup d'approfondissements sont possibles ! Tout d'abord, il serait pertinent de réussir à bien justifier physiquement le modèle électrique des profils affines, et de refaire l'application sur le système complexe avec celui-ci. Aussi, une simulation numérique prenant en compte l'éclairage de la baie vitrée pourrait être réalisée avec les projections et données expliquées dans la fin de notre rapport. Dans ce cas, il serait également intéressant de considérer les flux de rayonnement des murs. Enfin, les murs de notre pièce étant en béton, pour se rapprocher de la réalité, une couche d'isolant pourrait être ajoutée. De la même manière, différents matériaux pourraient être comparés.

Bibliographie

- [1] Jérôme Yon, *Cours sur les transferts thermiques*, STPI2, semestre 4, filière Physique.
- [2] INERTIE THERMIQUE, <https://www.choisir.com/energie/articles/136587/bien-comprendre-le-phenomene-de-linertie-thermique> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [3] INERTIE THERMIQUE, <http://archi.climatic.free.fr/02param.html> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [4] ISOLATION DES MAISONS, <https://france-renov.gouv.fr/renovation/isolation/murs-maison> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [5] PONT THERMIQUE, <https://conseils-thermiques.org/contenu/pont-thermique.php> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [6] ECLAIREMENT SOLAIRE, <https://www.omnicalculator.com/physics/sun-angle> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [7] ECLAIREMENT SOLAIRE, <https://www.pveducation.org/pvcdrom/properties-of-sunlight/solar-time> (Valide à la date du 10/06/2024)
- [8] DONNÉES ÉCLAIREMENT SOLAIRE, https://re.jrc.ec.europa.eu/pvg_tools/fr/ (Valide à la date du 10/06/2024)

Annexe A

Démonstration de l'équation de la chaleur

Nous partons de l'équation du bilan thermique :

$$\Phi_{prod} = \Phi_{ech} + \Phi_{stc}$$

$$\Leftrightarrow \iiint_V p dV = \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iint_S \vec{\varphi} \vec{n} dS$$

Le Théorème de Green-Ostrogradsky $\iint_S \vec{A} \vec{n} dS = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) dV$ donne :

$$\begin{aligned} \iiint_V p dV &= \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iiint_V \text{div}(\vec{\varphi}) dV \\ \Leftrightarrow \iiint_V (p - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\vec{\varphi})) dV &= 0 \end{aligned}$$

Pour que cette équation soit valable, elle doit vérifier : $p - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\vec{\varphi}) = 0$

Nous obtenons l'équation différentielle suivante : $\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = p - \text{div}(\vec{\varphi})$

Si le système est solide, les échanges se réduisent au flux conductif : $\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{grad}(T)$

$$\Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\varphi_{cond}}) = \text{div}(-k_{tr} \overrightarrow{grad}(T))$$

Si le solide est homogène et uniforme : $\text{div}(\overrightarrow{\varphi_{cond}}) = -k_{tr} \text{div}(\overrightarrow{grad}(T)) = -k_{tr} \Delta T$

Nous obtenons finalement l'équation de la chaleur avec $D = \frac{k_{tr}}{\rho C}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \Delta T$$

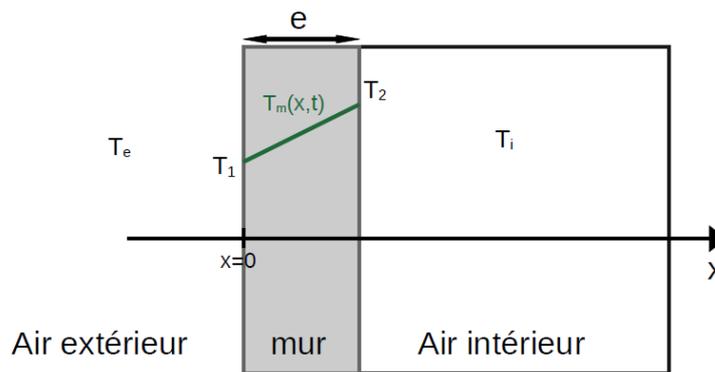
En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C} + D \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Annexe B

Mise en évidence des résistances thermiques

Nous allons étudier un mur de température $T_m(x, t)$ dans un cas stationnaire en ne tenant uniquement compte des échanges par convection et conduction.



Nous réalisons un bilan thermique : $\Phi_{stc} = 0$ car l'étude est stationnaire.

Donc $\Phi_{prod} = \Phi_{ech}$

Le profil de la température est affine et ne dépend pas du temps en régime stationnaire.

Nous avons :

$$T_m(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} \times x + T_e$$

Donc $\overrightarrow{grad}(T_m(x)) = \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{e}$

Nous commençons par calculer la conduction dans le mur :

$$\Phi_{cond} = \iint_S \overrightarrow{\varphi}_{cond} \cdot \vec{n} dS = \iint_S -k_m \overrightarrow{grad}(T_m(x)) \cdot \vec{n} dS = \iint_S -k_m \frac{T_2 - T_1}{e} \vec{x} \cdot (-\vec{x}) dS = -k_m \frac{T_2 - T_1}{e} S$$

De même pour la convection :

$$\text{A l'intérieur : } \Phi_{int} = \iint_S h_{int}(T_2 - T_i) \vec{x} \cdot (-\vec{x}) dS = h_{int}(T_i - T_2) S$$

$$\text{A l'extérieur : } \Phi_{ext} = \iint_S h_{ext}(T_1 - T_e) (-\vec{x}) \cdot (-\vec{x}) dS = h_{ext}(T_1 - T_e) S$$

Par continuité du flux thermique à l'état stationnaire nous avons donc :

$$\Phi_{cond} = \Phi_{int} = \Phi_{ext} = \Phi_{ech} = \Phi_{prod}$$

$$\Phi_{cond} = \Phi_{prod} \Leftrightarrow T_2 - T_1 = \frac{\Phi_{prod} \times e}{Sk_m}$$

$$\Phi_{int} = \Phi_{prod} \Leftrightarrow T_i - T_2 = \frac{\Phi_{prod}}{h_{int}S}$$

$$\Phi_{ext} = \Phi_{prod} \Leftrightarrow T_1 - T_e = \frac{\Phi_{prod}}{h_{ext}S}$$

En sommant ces trois équations, nous obtenons :

$$T_i - T_e = \Phi_{prod} \left(\frac{1}{h_{int}S} + \frac{e}{Sk_m} + \frac{1}{h_{ext}S} \right)$$

$$T_i - T_e = \Phi_{prod} (R_{convint} + R_{cond} + R_{convext})$$

Ce résultat met en évidence les résistances de convection et conduction. Dans le cas général :

$$R_{cond} = \frac{e}{Sk_{tr}} \text{ et } R_{conv} = \frac{1}{hS}$$

Annexe C

Calculs du modèle de référence

Nous prenons l'équation de la chaleur écrite en coordonnées cartésiennes sur une dimension x en l'absence de source de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Soit $f(x; t)$ une fonction de l'espace et du temps.

Discrétisation temporelle :

Pour Δt , un intervalle de temps assez petit, nous pouvons réaliser un développement linéaire à l'ordre 1 :

$$f(x; t + \Delta t) = f(x; t) + \Delta t \frac{\partial f(x; t)}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial f(x; t)}{\partial t} = \frac{f(x; t + \Delta t) - f(x; t)}{\Delta t}$$

Discrétisation spatiale : De la même façon pour Δx petit, nous écrivons un développement linéaire à l'ordre 2 :

$$1. f(x + \Delta x; t) = f(x; t) + \Delta x \frac{\partial f(x; t)}{\partial x} + \Delta x^2 \times \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}$$

$$2. f(x - \Delta x; t) = f(x; t) - \Delta x \frac{\partial f(x; t)}{\partial x} + \Delta x^2 \times \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}$$

$$1.+2. f(x + \Delta x; t) + f(x - \Delta x; t) = 2f(x; t) + \frac{2\Delta x^2 \partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} = \frac{f(x - \Delta x; t) - 2f(x; t) + f(x + \Delta x; t)}{\Delta x^2}$$

Nous remplaçons dans l'équation de la chaleur appliquée à $f(x; t)$:

$$\frac{f(x; t + \Delta t) - f(x; t)}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2} (f(x - \Delta x; t) - 2f(x; t) + f(x + \Delta x; t))$$

Discrétisation :

$$f(x_i; t_{j+1}) = f(x_i; t_j) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (f(x_{i-1}; t_j) - 2f(x_i; t_j) + f(x_{i+1}; t_j))$$

On pose $\vec{T}_j = \begin{pmatrix} T(1; j) \\ T(2; j) \\ \vdots \\ T(i; j) \end{pmatrix}$ et $[M] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Nous avons alors $\vec{T}_{j+1} = \vec{T}_j + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} [M]\vec{T}_j$

Pour avoir des conditions limites : nous considérons l'égalité entre la convection et la conduction au niveau :

1. des parois extérieures :

$$(T_{ext} - T_j(1))hS = (T_j(1) - T_j(2))\frac{k_m S}{\Delta x} \Leftrightarrow T_j(1)(h + \frac{k_m}{\Delta x}) = hT_{ext} + T_j(2)\frac{k_m}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow T_j(1) = \frac{hT_{ext} + T_j(2)\frac{k_m}{\Delta x}}{h + \frac{k_m}{\Delta x}} \Leftrightarrow T_j(1) = \frac{B_i T_{ext} + T_j(2)}{1 + B_i} \text{ avec } B_i = \frac{h\Delta x}{k_m}$$

2. des parois intérieures :

$$(T_{int} - T_j(i))hS = (T_j(i) - T_j(i-1))\frac{k_m S}{\Delta x} \Leftrightarrow T_j(i)(h + \frac{k_m}{\Delta x}) = hT_{int} + T_j(i-1)\frac{k_m}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow T_j(i) = \frac{hT_{int} + T_j(i-1)\frac{k_m}{\Delta x}}{h + \frac{k_m}{\Delta x}} \Leftrightarrow T_j(i) = \frac{B_i T_{int} + T_j(i-1)}{1 + B_i}$$

Pour T_{int} : $\Phi_{prod} = \Phi_{ech} + \Phi_{stc}$

$$\Leftrightarrow P = (T_j(i) - T_j(i-1))\frac{k_m S}{\Delta x} + \iiint_V C_{air} \frac{dT_i}{dt} dV \Leftrightarrow P = \Phi + C_{air} SL \frac{dT_i}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_i}{dt} = \frac{P - \Phi}{C_{air} SL} \Rightarrow T_{i,j+1} = T_j + \frac{dt(P - \Phi)}{C_{air} SL}$$

Annexe D

Calculs de la visualisation électrique du modèle 3 couches de températures constantes

On a :

$$T_1 = \frac{T_2 + B_i T_{ext}}{1 + B_i}$$

$$T_3 = \frac{T_2 + B_i T_{int}}{1 + B_i}$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{9k_m}{\rho C e^2} (T_1 - 2T_2 + T_3)$$

On remplace T_1 et T_3 dans $\frac{dT_2}{dt}$:

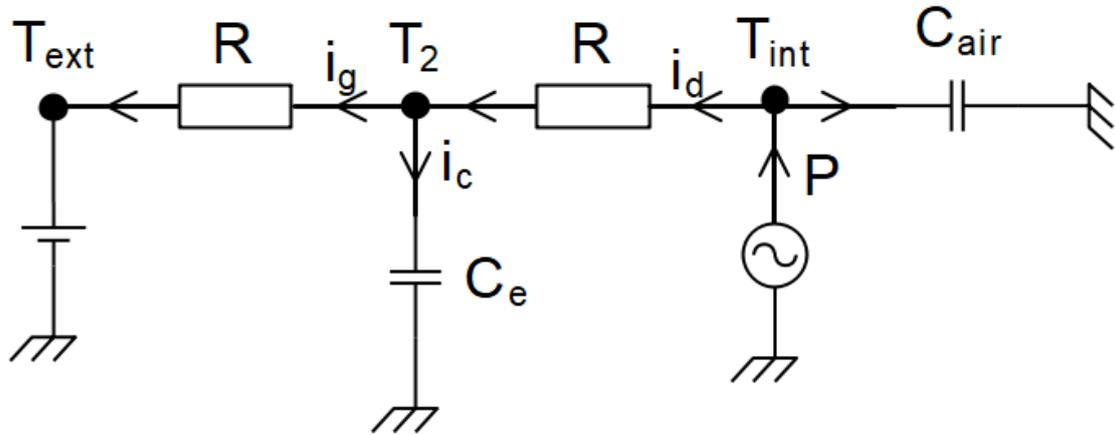
$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{9k_m}{\rho C e^2} \left(\frac{T_2 + B_i T_{ext}}{1 + B_i} - 2T_2 + \frac{T_2 + B_i T_{int}}{1 + B_i} \right)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{9k_m}{\rho C e^2} \frac{1}{1 + B_i} (T_2 + B_i T_{ext} - 2T_2 - 2T_2 B_i + T_2 + B_i T_{int})$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{9k_m B_i}{\rho C e^2 (1 + B_i)} (T_{ext} - 2T_2 + T_{int})$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{9k_m 2B_i}{\rho C e^2 (1 + B_i)} \left(\frac{T_{ext} + T_{int}}{2} - T_2 \right)$$

On obtient une équation de T_2 , ne dépendant que des potentiels T_{ext} , T_{int} et T_2 . On imagine alors le schéma ci-dessous :



Montrons que ce schéma électrique correspond bien à nos équations.

On a : $(T_{int} - T_2) = Ri_d$
 $(T_2 - T_{ext}) = Ri_g$
 $i_c = Ce \frac{dT_2}{dt}$

Loi des noeuds en T_2 :

$$i_d = i_g + i_c$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_{int} - T_2}{R} = \frac{T_2 - T_{ext}}{R} + Ce \frac{dT_2}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT_2}{dt} = \frac{2}{CeR} \left(\frac{T_{ext} + T_{int}}{2} - T_2 \right)$$

Ce qui correspond exactement à l'équation différentielle obtenue auparavant avec

$$\frac{1}{CeR} = \frac{9k_m B_i}{\rho C e^2 (1 + B_i)}$$

Justification de l'analogie au niveau de T_{int} : Au niveau du nœud T_{int} , nous avons d'abord ajouté un générateur d'intensité P , correspondant au radiateur. Ensuite, l'ajout du condensateur de capacité C_{air} nous permet bien de retrouver l'équation régissant T_{int} .

Déterminons R , on a : $(T_{int} - T_2) = Ri_d$
 et $i_d = (T_{int} - T_3)hS$ (flux de convection)
 et $T_3 = \frac{T_{int}B_i + T_2}{1+B_i}$

On en déduit :

$$T_{int} - T_2 = RhS \left(T_{int} - \frac{T_{int}B_i + T_2}{1 + B_i} \right)$$

$$\Leftrightarrow T_{int} - T_2 = \frac{RhS}{1 + B_i} (T_{int}B_i + T_{int} - T_{int}B_i - T_2)$$

$$\Leftrightarrow T_{int} - T_2 = \frac{RhS}{1 + B_i} (T_{int} - T_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{RhS}{1 + B_i} = 1$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1 + B_i}{hS}$$

Déterminons C_e , nous avons :

$$\frac{1}{C_e R} = \frac{9k_m B_i}{\rho C e^2 (1 + B_i)}$$

$$\Leftrightarrow C_e = \frac{\rho C e^2 (1 + B_i)}{9k_m B_i R} = \frac{\rho C e^2 (1 + B_i) h S}{9k_m B_i (1 + B_i)} = \frac{\rho C e^2 h S}{9k_m B_i}$$

avec $B_i = \frac{h e}{3k_m}$ alors

$$C_e = \frac{\rho C e^2 h S 3k_m}{9k_m h e}$$

Finalement :

$$C_e = \frac{\rho C e S}{3}$$

Annexe E

Courbes des écarts-types pour les différents modèles

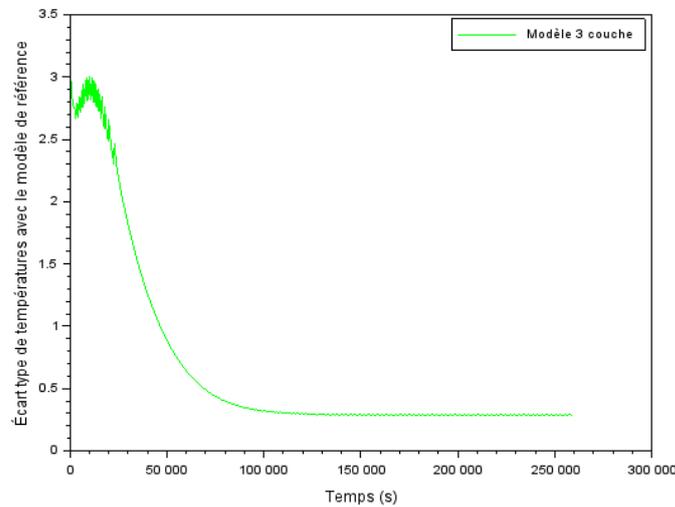


FIGURE E.1 – Écart-type du modèle 3 couches par rapport au modèle de référence

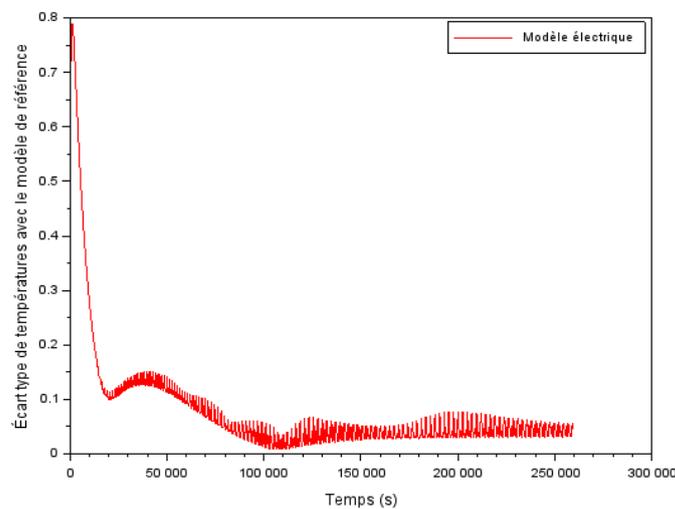


FIGURE E.2 – Écart-type du modèle électrique par rapport au modèle de référence

Annexe F

Application du modèle à une pièce simple sans éclairage

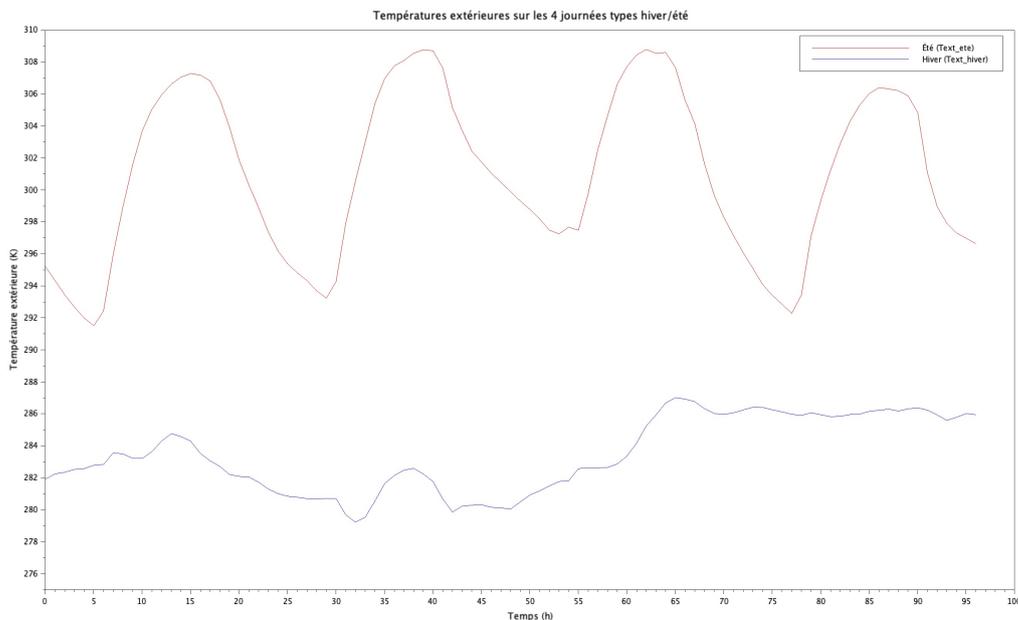


FIGURE F.1 – Température extérieures pour quatre journées types en été (*courbe du haut*) et en hiver (*courbe du bas*)

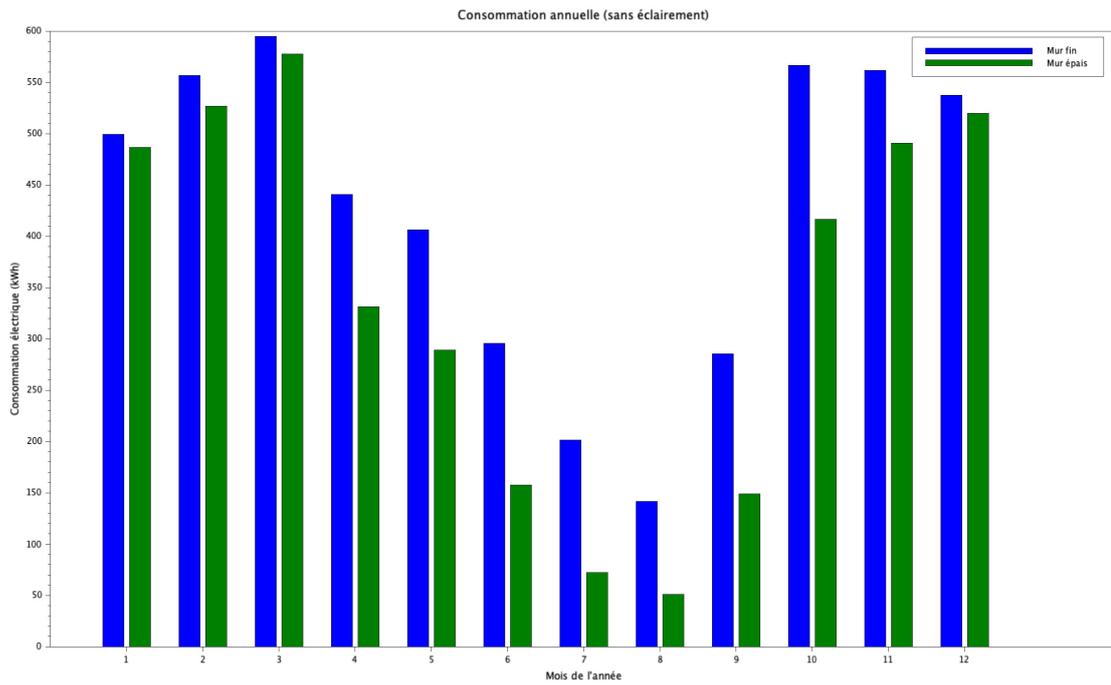


FIGURE F.2 – Consommation mensuelle sur une année d’une pièce simple en fonction de l’épaisseur des murs

En bleu la consommation mensuelle d’une pièce avec des murs fins, et en vert celle d’une pièce avec des murs épais.

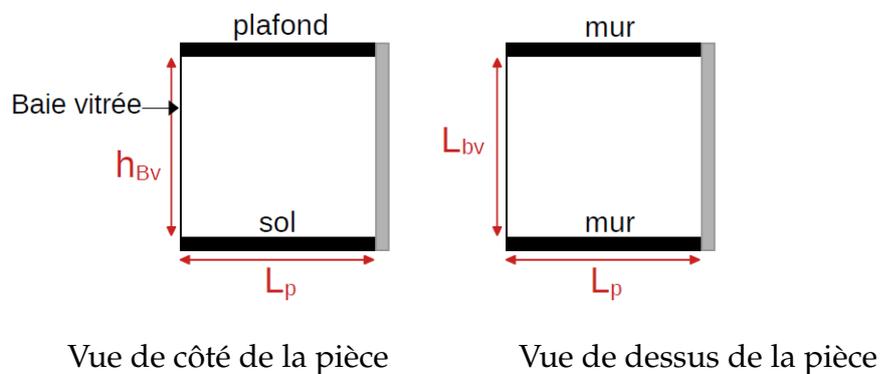
Annexe G

Liens vers les codes Scilab réalisés, la vidéo de comparaison des deux modèles et les données extérieures utilisées

- 2.3 Profil de température des modèles 3 couches, 3 profils affines et du modèle de référence dans le mur :
https://drive.google.com/file/d/1sn_ABRNOd4CdeP94Qm10k_f_aVFKMcz
- 2.3 Vidéo du graphe obtenu grâce au code précédent :
https://drive.google.com/file/d/1CX7bMocp808s_PGfFs94W2HB7Tx-bs3K
- 2.3 Test condensateur :
https://drive.google.com/file/d/1dACxFhFfIcLB7Q_Ax4ca5owEmLxBKLX_
- 2.4.1 Application du modèle - 4 journées types :
<https://drive.google.com/file/d/1xatOTr8Vm2RmcS9MfES85Yz1Sk7OIZiF>
- 2.4.2 Application du modèle - une année :
<https://drive.google.com/file/d/17ajLj2eU0w0yyImPuJceEw63KUrCJWwn>
- Fichier de données extérieures relevées en 2020 à Saint-Étienne-du-Rouvray (*nécessaire à l'exécution de certains codes*) :
<https://drive.google.com/file/d/1lJRuTU-URU6ntHY6fvQzN4I-xgi8HTIE>

Annexe H

Calculs de l'éclairement solaire sur les murs de notre pièce



Pour le calcul des projections, nous nous basons sur les 2 angles décrivant la position du soleil à tout instant : l'élévation α et l'azimuth β (dont la référence est le Nord). Le calcul de ces angles se base sur les équations de la position du Soleil définies dans la bibliographie aux points [6] et [7].

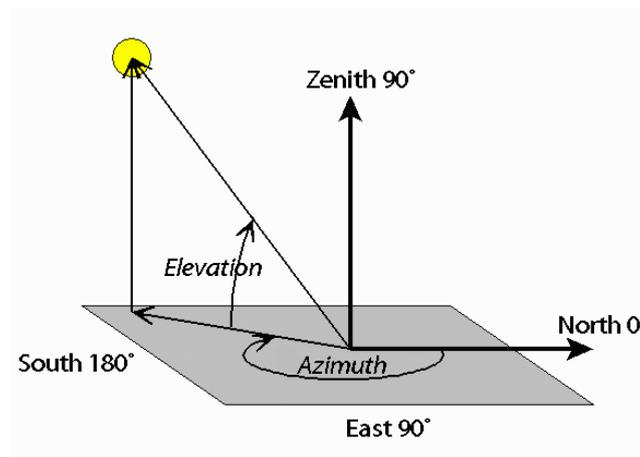
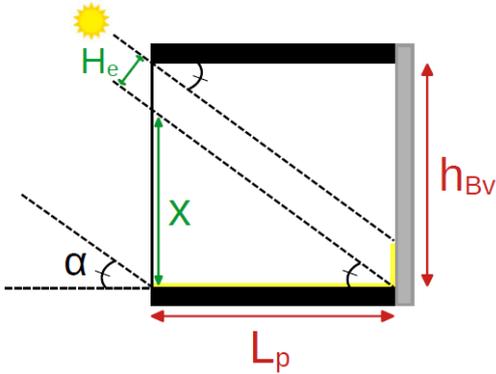


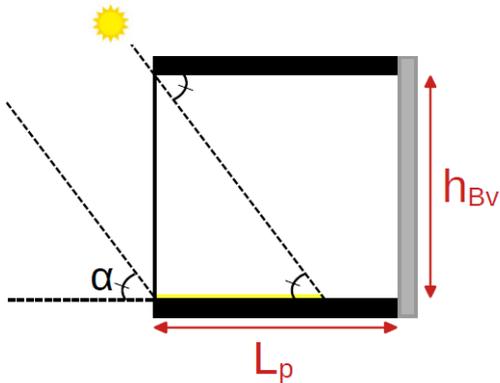
FIGURE H.1 – Élévation α et azimuth β du Soleil

1) Projection de l'éclairement solaire sur le mur du fond

Pour le calcul avec α , on se positionne de côté :

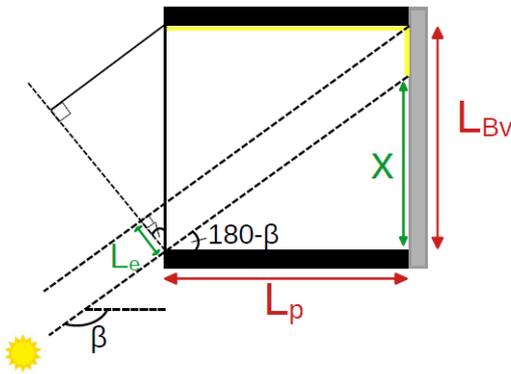


Cas 1 : $x < h_{Bv}$
 $\tan(\alpha) = \frac{x}{L_p} \Leftrightarrow x = L_p \tan(\alpha)$
 $\cos(\alpha) = \frac{H_e}{x} \Leftrightarrow H_e = x \cos(\alpha)$

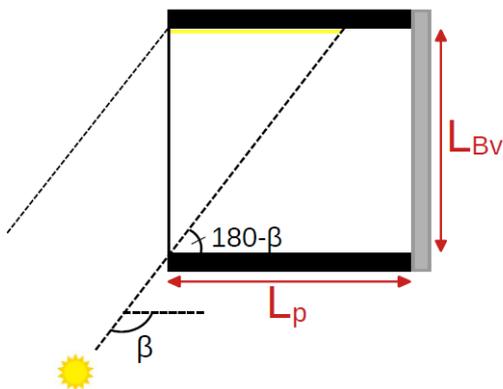


Cas 2 : $x > h_{Bv}$
 $H_e = 0$

Pour le calcul avec β , on se positionne au-dessus :



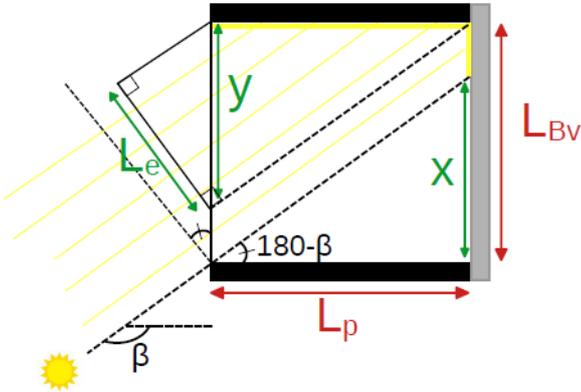
Cas 1 : $x < L_{Bv}$
 $|\tan(180 - \beta)| = \frac{x}{L_p} \Leftrightarrow x = L_p |\tan(180 - \beta)|$
 $\cos(180 - \beta) = \frac{L_e}{L_{Bv} - x} \Leftrightarrow L_e = (L_{Bv} - x) \cos(180 - \beta)$



Cas 2 : $x > L_{Bv}$
 $L_e = 0$

2) Projection de l'éclairement solaire sur les murs de gauche et de droite (depuis l'intérieur)

Pour le calcul avec β , on se positionne au-dessus :

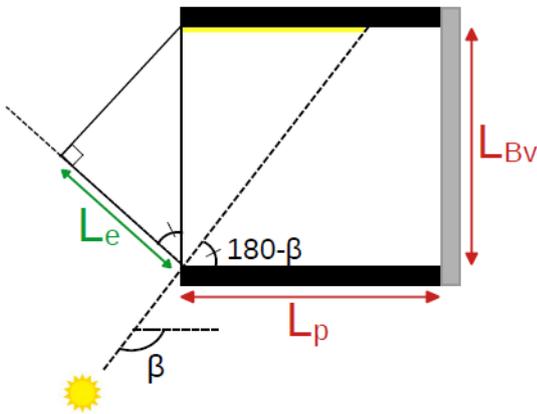


Cas 1 : $x < L_{Bv}$

$$|\tan(180 - \beta)| = \frac{x}{L_p} \Leftrightarrow x = L_p |\tan(180 - \beta)|$$

$$|\tan(180 - \beta)| = \frac{y}{L_p} \Leftrightarrow y = L_p |\tan(180 - \beta)|$$

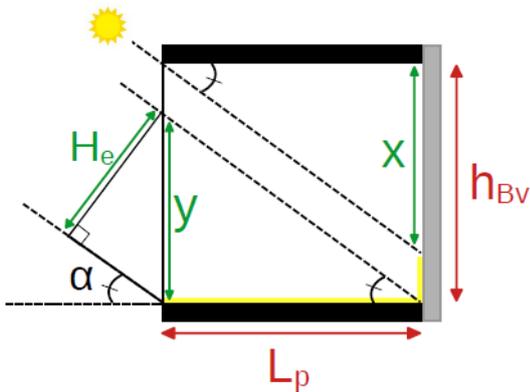
$$\cos(180 - \beta) = \frac{L_e}{y} \Leftrightarrow L_e = y \cos(180 - \beta)$$



Cas 2 : $x > L_{Bv}$

$$\cos(180 - \beta) = \frac{L_e}{L_{Bv}} \Leftrightarrow L_e = L_{Bv} \cos(180 - \beta)$$

Pour le calcul avec α , on se positionne de côté :

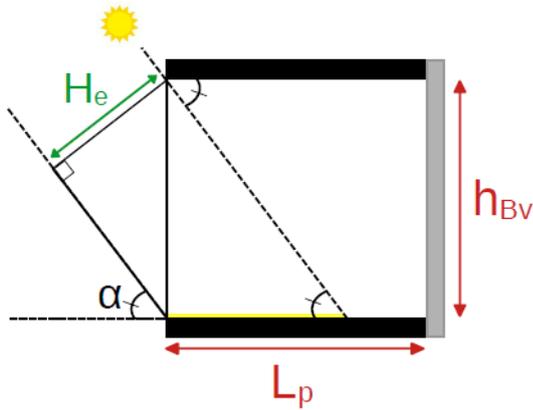


Cas 1 : $x < h_{Bv}$

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{L_p} \Leftrightarrow x = L_p \tan(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{L_p} \Leftrightarrow y = L_p \tan(\alpha)$$

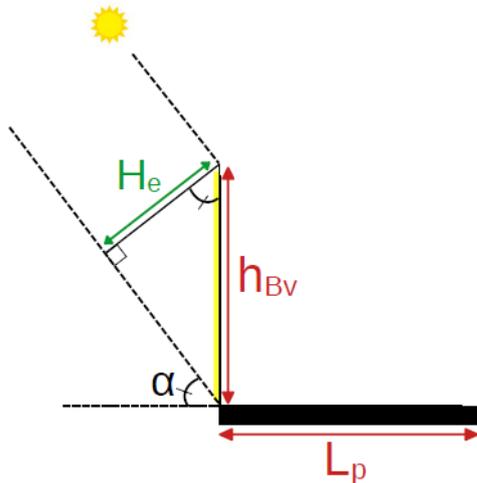
$$\cos(\alpha) = \frac{h_e}{x} \Leftrightarrow h_e = y \cos(\alpha)$$



Cas 2 : $x > h_{Bv}$
 $\cos(\alpha) = \frac{h_e}{h_{Bv}} \Leftrightarrow h_e = h_{Bv} \cos(\alpha)$

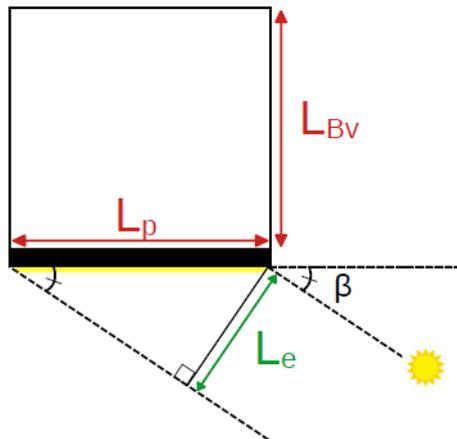
3) Projection de l'éclairement solaire sur les murs de gauche et de droite (depuis l'extérieur)

Pour le calcul avec α , on se positionne de côté :



$\cos(\alpha) = \frac{h_e}{h_{Bv}} \Leftrightarrow h_e = h_{Bv} \cos(\alpha)$

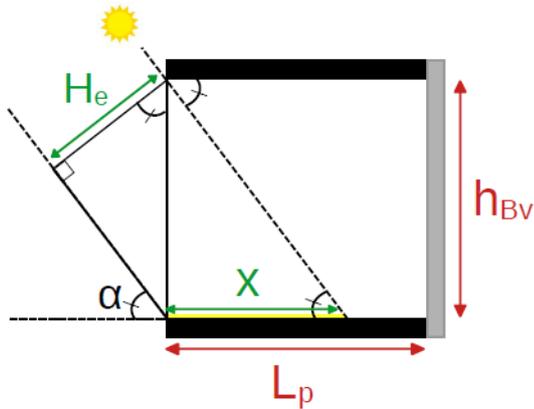
Pour le calcul avec β , on se positionne au-dessus :



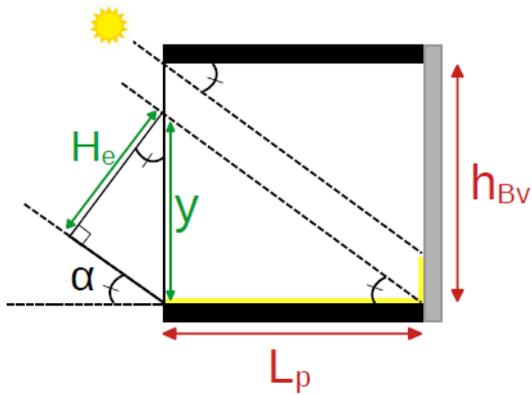
$\sin(\beta) = \frac{L_e}{L_p} \Leftrightarrow L_e = L_p \sin(\beta)$

4) Projection de l'éclairement solaire sur le sol

Pour le calcul avec α , on se positionne de côté :

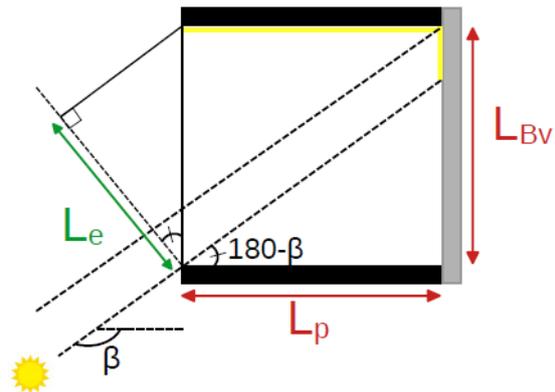
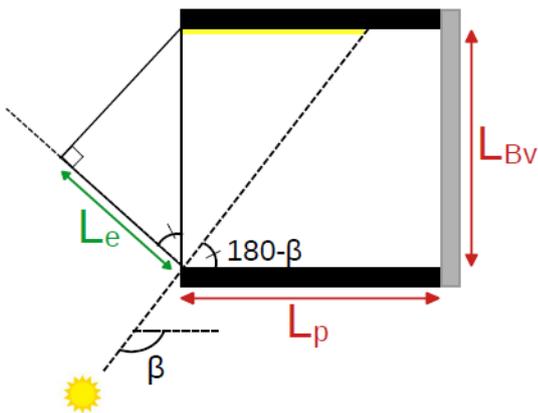


Cas 1 : $x < L_p$
 $\tan(\alpha) = \frac{h_{Bv}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h_{Bv}}{\tan(\alpha)}$
 $\cos(\alpha) = \frac{h_e}{h_{Bv}} \Leftrightarrow h_e = h_{Bv} \cos(\alpha)$



Cas 2 : $x > L_p$
 $\tan(\alpha) = \frac{y}{L_p} \Leftrightarrow y = L_p \tan(\alpha)$
 $\cos(\alpha) = \frac{h_e}{y} \Leftrightarrow h_e = y \cos(\alpha)$

Pour le calcul avec β , on se positionne au-dessus :



Nous remarquons avec les figures précédentes qu'il y a un seul cas à considérer :

$$\cos(180 - \beta) = \frac{L_e}{L_{Bv}} \Leftrightarrow L_e = L_{Bv} \cos(180 - \beta)$$

5) Vérification de la cohérence des projections

Pour vérifier la cohérence de ces projections, nous avons affiché sur un même graphe les puissances radiatives collectées par chaque mur intérieur et le sol, la somme de toutes les puissances radiatives collectées (*courbe noire*), ainsi que la puissance maximale pouvant être collectée (*courbe en pointillés*), c'est-à-dire si l'éclairement était normal à la baie vitrée.

Nous nous apercevons que la somme des puissances radiatives collectées par les murs intérieurs et le sol est bien inférieure à la puissance maximale pouvant être collectée, en été comme en hiver.

→ Les projections réalisées sont donc cohérentes.

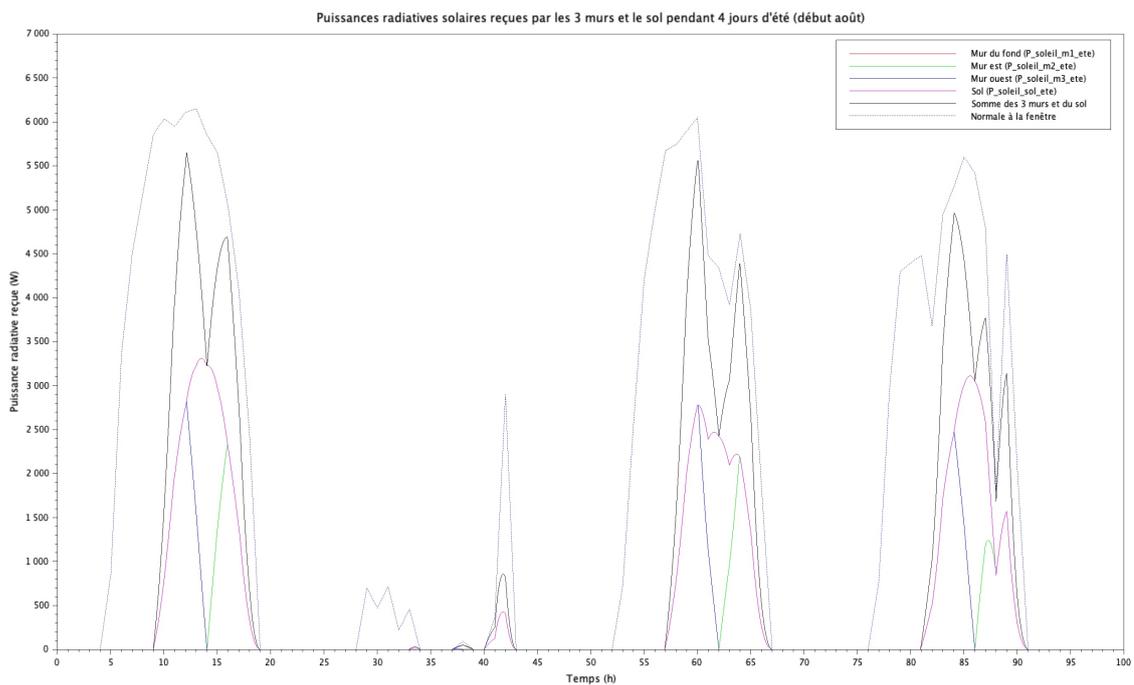


FIGURE H.2 – Puissances radiatives collectées par les murs intérieurs et le sol pendant 4 journées types en été

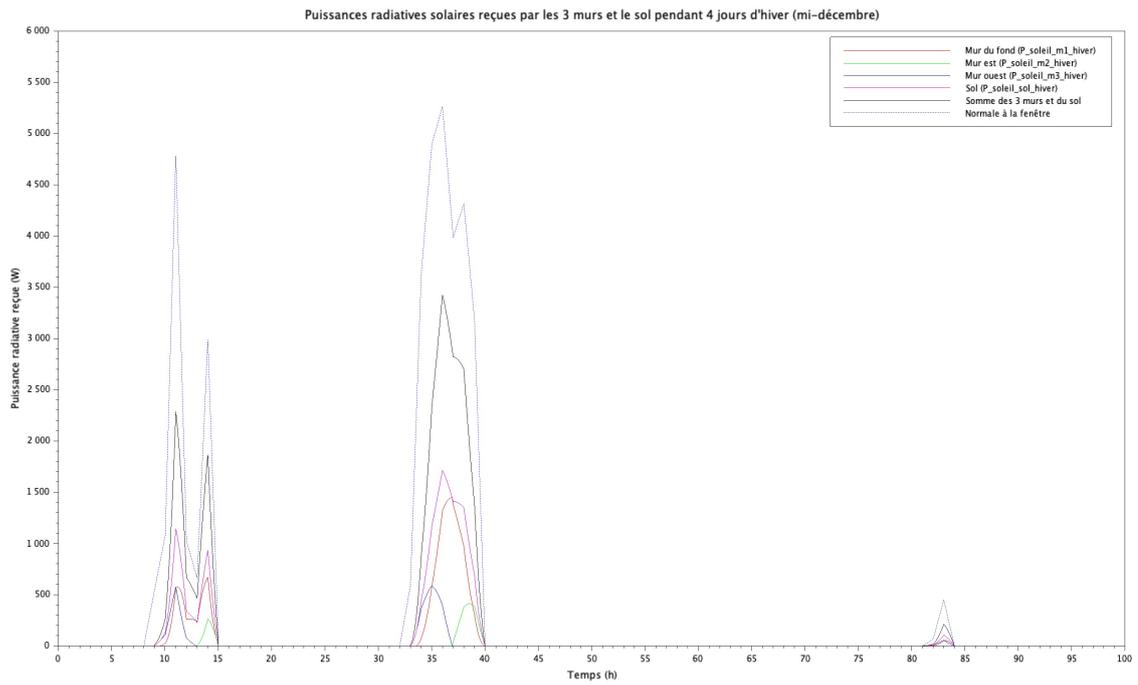


FIGURE H.3 – Puissances radiatives collectées par les murs intérieurs et le sol pendant 4 journées types en hiver