

## Signaux en action : Echantillonnage pour une analyse pointue



**Étudiants :**

Nour Chaabane  
Laurène Lecomte  
Nael Mathlouthi  
Kangping Huang

**Enseignant-responsable du projet :**

Hasnaa ZIDANI (LMI)

**Date de remise du rapport :** 15/06/2024

**Référence du projet :** STPI/P6/2024 – 17

**Intitulé du projet :** Signaux en action : Echantillonnage pour une analyse pointue

**Type de projet :** Analyse Numérique - Simulation

**Objectifs du projet :**

Le projet vise à étudier les concepts de base et les applications du traitement des signaux. Il inclut l'analyse en fréquence à travers des méthodes comme la série de Fourier et la transformée de Fourier, pour mieux comprendre les différents types de signaux.

Un autre objectif important est l'utilisation d'outils mathématiques, notamment les développements en série de Fourier, afin de modéliser et analyser les signaux de manière rigoureuse. Cela permet de poser une base théorique solide pour les études pratiques ultérieures.

Le projet comporte également une partie de simulation numérique. Cette section implique le développement et l'utilisation de techniques de simulation pour reproduire et analyser des signaux. L'objectif est de valider les modèles théoriques par des approches pratiques, en s'assurant que les méthodes développées sont efficaces et précises.

Enfin, l'étude d'un signal musical permet d'appliquer les concepts théoriques dans un contexte concret. En analysant un signal musical spécifique, nous mettons en pratique les méthodes d'analyse et de traitement du signal étudiées tout au long du projet.

En résumé, ce projet a pour but d'approfondir la compréhension et l'application des techniques de traitement du signal, en se concentrant sur l'analyse mathématique et numérique de divers types de signaux, avec une application spécifique sur les signaux musicaux.

**Mots-clés du projet :** Echantillonnage, Fourier, Théorème de Shannon

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>Organisation du travail</b>	<b>5</b>
<b>1 Le signal</b>	<b>6</b>
1.1 Définitions et champs d'application . . . . .	6
1.2 Analyse en fréquence . . . . .	7
<b>2 Outils mathématiques</b>	<b>8</b>
2.1 Le cadre de l'espace de Hilbert . . . . .	8
2.2 Etude d'un signal périodique - Série de Fourier . . . . .	9
2.3 Etude d'un signal défini sur un intervalle borné - Série de Fourier . . . . .	11
2.4 La transformée de Fourier continue et la transformée de fourier inverse continue . . . . .	12
2.5 La transformée de Fourier discrète et la transformée de fourier inverse discrète . . . . .	12
2.6 Relation entre les coefficients de Fourier exacts et approchés . . . . .	14
2.7 Théorème d'Echantillonnage et formule de Shannon . . . . .	14
<b>3 Analyse numérique et simulation</b>	<b>16</b>
3.1 Série de Fourier . . . . .	16
3.2 Retrouver le signal à partir du signal échantillonné . . . . .	16
<b>4 Application du traitement du signal sur un signal musical</b>	<b>18</b>
<b>5 Conclusion et perspectives</b>	<b>20</b>

# Notations et Acronymes

Les notations utilisées dans ce rapport sont les suivantes. On note :

- $L^2([0, T])$  l'ensemble des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continues et de carré intégrable sur  $[0, T]$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $T$  la période.
- $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dont la valeur absolue est intégrable.
- $\ell^2(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  de carré sommable.
- $c_n(f)$  le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier de la fonction  $f$
- $S(f)$  la série de Fourier de la fonction  $f$
- $S_N(f)$  la série de Fourier de la fonction  $f$  tronquée au rang  $N$
- $\tilde{F}$  la transformée de Fourier continue
- $F^{-1}(\tilde{F})$  la transformée de Fourier inverse continue
- $\tilde{f}$  la transformée Fourier discrète
- $f^{-1}(\tilde{f})$  la transformée de Fourier inverse discrète

# Introduction

Le traitement de signal est né de la nécessité croissante de comprendre, analyser et manipuler les informations transmises par des signaux physiques mesurables. Son émergence a été fortement influencée par le développement des ordinateurs numériques à partir des années 60, ouvrant ainsi la voie à des avancées considérables dans le domaine.

De nos jours, le traitement de signal joue un rôle crucial dans de nombreux secteurs, tels que les télécommunications, le traitement d'images, la médecine, et bien d'autres. Son objectif principal est d'extraire des informations utiles à partir de signaux bruités ou perturbés, permettant ainsi de prendre des décisions éclairées et de réaliser des actions spécifiques.

Dans ce contexte, notre projet se focalise sur l'analyse de signaux numériques. En explorant les concepts fondamentaux du traitement de signal et en les appliquant à un domaine spécifique notamment la musique, nous visons à approfondir notre compréhension de cette discipline et à démontrer son importance dans des applications concrètes.

# Organisation du travail

Pour mener à bien notre projet, nous avons commencé par identifier les différentes étapes nécessaires à sa réalisation. Tout d'abord, nous avons effectué des recherches bibliographiques pour comprendre le contexte du projet et nous familiariser avec. Cette compréhension a été essentielle pour la phase suivante où nous avons étudié les concepts mathématiques en rapport avec le projet.

Nous avons ensuite réalisé des simulations numériques afin de mettre en pratique les concepts étudiés. Ces simulations nous ont permis d'obtenir des résultats concrets, que nous avons analysés. Cette analyse a constitué la dernière étape avant la rédaction du rapport final, où nous avons consigné tout ce que nous avons appris.

Pour faciliter la collaboration, nous avons mis en place un groupe de discussion et un drive partagé, permettant à chaque membre de l'équipe de contribuer au projet et de suivre l'avancement des différentes parties en temps réel. Parallèlement, nous avons maintenu des échanges réguliers avec notre professeur encadrant pour obtenir des retours et des conseils précieux. Enfin, pour nous préparer à la soutenance orale, nous avons réalisé plusieurs sessions d'entraînement.

La répartition des tâches s'est organisée de la manière suivante :



# Chapitre 1

## Le signal

### 1.1 Définitions et champs d'application

Un signal est une grandeur physiquement mesurable qui transporte une information depuis une source vers un destinataire, souvent elle provient d'un capteur. Physiquement un signal peut être représenté par une tension, un courant, une onde sonore, ou autre. Mathématiquement un signal est une fonction à une, deux ou plusieurs variables. Ainsi, on distingue les signaux :

- Unidimensionnels : Ils modélisent des phénomènes ondulatoires, la variable est le temps comme les signaux sinusoïdaux représentant une oscillation répétitive et prévisible dans le temps.
- Bidimensionnels : Ils peuvent alors modéliser des images. On utilise une variable d'espace  $(x;y)$ . Les IRM réalisées pour visualiser le corps humain en sont un exemple.
- Tridimensionnels : Ils sont utilisés pour représenter des images 3D ou des images 2D qui évoluent dans le temps. Les variables sont alors respectivement  $(x;y;z)$  et  $(x;y;t)$ . C'est le cas des vidéos de surveillance car une vidéo n'est autre qu'une suite d'images bidimensionnelles dans le temps.

De plus, les signaux sont des objets qui peuvent être :

- Déterministes : La fonction décrivant le signal est parfaitement définie à tout instant.
- Aléatoires : A chaque instant, la fonction décrivant le signal prend une valeur particulière parmi un ensemble de valeurs et ceci de manière inconnue. Lors d'une conversation téléphonique, le bruit de fond est un signal aléatoire car les sources sont diverses : le vent, les personnes proches ou les voitures en circulation. Ce bruit est imprévisible et ne se répète jamais identiquement. Dernièrement, des algorithmes ont été développés pour filtrer ces bruits de fond sur les téléphones pour améliorer les conversations. Cela est possible grâce à la distinction des différents bruits et de la voix de l'interlocuteur.

Nous allons nous concentrer sur l'étude des signaux unidimensionnels déterministes. On distingue deux types de signaux unidimensionnels. Il y a :

- Les signaux analogiques  $x = x(t)$  : Ils varient continuellement en fonction du temps et peuvent prendre une infinités de valeurs. Le thermomètre utilise la chaleur d'un objet pour connaître sa température, qui est transférée au mercure dont la position peut prendre n'importe quelle valeur entre une certaine température minimale et maximale. Plus le mercure est haut, plus l'objet est chaud donc il a bien une analogie entre le mercure et la température
- Les signaux discrets  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  : Ces signaux sont définis seulement pour certaines valeurs de la variable  $t$ .

Pour le traitement en ordinateur, il est nécessaire de transformer un signal à valeurs continues en un signal à valeurs discrètes où ces valeurs discrètes correspondent à des niveaux de quantifications. Par exemple, ce sont des multiples d'une quantité élémentaire  $q$ . Cette approximation des valeurs exactes est appelée quantification. Nous n'examinerons pas ici les effets de cette opération.

Un signal discret et quantifié est appelé signal numérique.

Maintenant que nous avons définis les différents types de signaux, nous allons présenter quelques domaines d'applications du traitement du signal. Le traitement du signal consiste en une succession d'opérations à effectuer sur des signaux pour en extraire des informations utiles, les analyser ou les modifier selon les besoins.

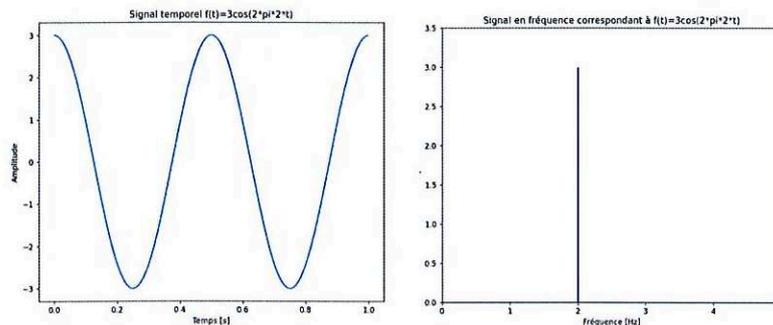
Dans le domaine audio, les applications sont présentes dans divers équipements tels que les amplificateurs, les consoles de mixage, le traitement de la parole et le contrôle de l'écho. Dans ce contexte, le capteur est un microphone. Il convertit les ondes sonores en signaux électriques. Plus précisément, le microphone détecte les variations de pression sur une membrane et les traduit en variations de tension. On utilise également les signaux dans le domaine des télécommunications pour les satellites, le téléphone ou le GPS par exemple.

## 1.2 Analyse en fréquence

Un signal peut être représenté de plusieurs façons. Nous avons l'habitude de l'observer et de le décrire dans le domaine temporel mais nous pouvons aussi le faire dans le domaine fréquentiel.

La fréquence d'un phénomène périodique correspond au nombre de répétitions de ce dernier pendant une seconde. La période  $T$  et la fréquence  $f$  sont liés par la relation :  $f = \frac{1}{T}$ . L'unité de la fréquence est le hertz de symbole "Hz".

Dans un premier temps, nous pouvons prendre l'exemple d'une fonction sinusoïdale. Son expression mathématique est  $X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$  où  $\omega_0 = 2\pi f_0$  avec  $X_0$  son amplitude,  $f_0$  sa fréquence et  $\phi$  sa phase à l'origine.



Ainsi, la représentation temporelle montre la forme du signal et la représentation fréquentielle montre le nombre de composantes sinusoïdales qui compose le signal. Ici, une seule de fréquence  $f_0=2$  Hz. Ce graphe est également appelé spectre du signal.

Les deux représentations sont équivalentes. Elles contiennent la même information et on peut passer facilement de l'une à l'autre à condition de connaître la phase à l'origine ou bien que celle-ci n'ai pas d'importance.

Nous pouvons généraliser cette représentation à toute fonction périodique et passer d'une représentation à une autre grâce à la décomposition en série de Fourier et à la transformée de Fourier. Nous allons voir les notions mathématiques nécessaires dans la partie suivante.

## Chapitre 2

# Outils mathématiques

### 2.1 Le cadre de l'espace de Hilbert

Nous exposons dans cette partie quelques éléments de la théorie des espaces de Hilbert. Ils permettent de développer les notions de base, de projection orthogonale en dimension infinie, de convergence et de Transformée de Fourier.

#### Définition : Espace préhilbertien

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

#### Définition : Espace de Hilbert :

Lorsqu'un espace préhilbertien muni de la norme  $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  est complet, on dit que cet espace est un espace de Hilbert

Dans l'espace Hilbertien, il ya un espace qui nous sera utile qui est l'espace  $L^2$ .

Ces fonctions, qui sont carrément intégrables, permettent une représentation adaptée des signaux pour plusieurs raisons : elles assurent que l'énergie du signal est finie, ce qui signifie que l'intégrale du carré de la fonction est limitée.

C'est à dire qu'on a pour l'ensemble des fonctions  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  mesurables de carré intégrable sur  $[0, T]$  de période  $T$  :

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Cela garantit non seulement que les signaux peuvent inclure des discontinuités, mais aussi que des outils comme les séries et les transformées de Fourier peuvent être appliqués de manière efficace et stable.

Produit scalaire : Soient  $f, g \in L^2([0, T])$ , le produit scalaire est défini comme suit :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$$

La norme associée est  $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$   
 $L^2([0, T])$  muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert

Propriété : Si  $f \in L^2([0, T])$  alors  $f$  est intégrable

Démonstration :

Soit  $f \in L^2([0, T])$ .

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a :

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt \right| \leq \left( \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

En choisissant  $g=1$ , on obtient

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right| \leq \left( \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

Ce qui prouve que  $f$  est intégrable

La décomposition d'un signal périodique en série de Fourier repose sur le principe de la représentation en base hilbertienne des fonctions trigonométriques dans  $L^2([0, T])$

Théorème :

La famille des fonctions trigonométriques  $\left\{ t \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{T}nt} = e_n(t) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée de  $f \in L^2([0, T])$ .

Démonstration :

Montrons que la famille des fonctions trigonométriques est une famille orthonormée et on admet le fait que c'est une base de  $L^2([0, T])$ ,

- 1) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \in L^2([0, T])$  car  $\int_0^T |e^{i\frac{2\pi}{T}nt}|^2 dt = \int_0^T 1 dt = T < +\infty$
- 2) Soient  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\langle e^{i\frac{2\pi}{T}nt}; e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nt} e^{-i\frac{2\pi}{T}mt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt$$

si  $n = m$ , on a  $\langle e^{i\frac{2\pi}{T}nt}; e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = \frac{1}{T} T = 1$

Si  $n \neq m$ , on a  $\langle e^{i\frac{2\pi}{T}nt}; e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \rangle = \frac{1}{T} \frac{T}{i2\pi(n-m)} [e^{i\frac{2\pi}{T}(n-m)t}]_0^T = \frac{-i}{2\pi(n-m)} (e^{i2\pi(n-m)} - 1) = 0$

Donc la famille des fonctions trigonométrique est une famille orthonormée.

Théorème : Décomposition selon une base hilbertienne (admis)

Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie (qui est séparable). Si  $\{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base de  $H$  (dénombrable), alors tout vecteur  $f \in H$  se décompose de manière unique comme combinaison linéaire (infinie) des  $e_n$  :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

et la série converge

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n\| = 0.$$

Dans  $L^2([0, T])$ , la famille  $\left\{ t \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{T}nt} \right\}$  est une base Hilbertienne.

## 2.2 Etude d'un signal périodique - Série de Fourier

La série de Fourier est une méthode de représentation des fonctions périodiques en termes de séries infinies de fonctions sinus et cosinus. Au 18ème siècle, Bernoulli et Euler ont étudié les propriétés des fonctions périodiques et ont tenté à les représenter en termes de fonctions trigonométriques. En 1822, Fourier a développé les séries et les transformées de Fourier dans sa monographie intitulée Théorie de l'analyse thermique. Il y écrit que les fonctions peuvent être décomposées en séries trigonométriques et qu'il est facile de prouver leur convergence. Le développement des séries de Fourier a considérablement fait progresser la physique mathématique et l'ingénierie. Elle est largement utilisée dans le traitement des signaux et des images, l'analyse des vibrations, le transfert de chaleur et bien d'autres domaines.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction quelconque de période  $T$ .

Nous nous intéressons à la question suivante : peut-on trouver une décomposition de la forme  $f(t) = \sum a_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$  ?

La réponse immédiate est non, si l'on envisage que des sommes finies. En effet, on obtient dans la somme de droite une fonction indéfiniment dérivable alors que  $f$  n'a aucune raison de l'être,  $f$  peut très bien être un créneau périodique par exemple.

Cependant, dans un mémoire daté de 1807 Joseph Fourier affirme que la réponse est oui pourvu qu'on utilise des sommes infinies.

Nous allons ainsi voir dans cette partie comment nous pouvons obtenir la décomposition évoquée en se plaçant dans le cadre de l'espace de Hilbert. Nous aurons également besoin que les fonctions périodiques considérées soient de carré intégrable.

Définition : Coefficients de Fourier complexes :

Soit  $f \in L^2([0, T])$ , on appelle coefficient de Fourier de  $f$  les nombres :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt, \text{ pour } n \in \mathbb{Z},$$

Définition : Série de Fourier :

On définit les séries de Fourier à partir des coefficients de Fourier. On appelle série de Fourier de  $f \in L^2([0, T])$ , notée  $S(f)$  la série définie par :

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} nt}.$$

Remarque :

$S(f)$  est le projeté orthogonal de  $f$  dans la base des fonctions trigonométriques avec le produit scalaire défini dans la partie précédente où  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ . Donc on a :  $S(f)(t) = f(t)$

Idee de l'approximation :

Si l'égalité  $S(f)(t) = f(t)$  ne peut pas avoir lieu pour une somme finie, on peut quand même tenter de la réaliser « au mieux » de la manière suivante :

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , peut-on trouver des coefficients  $x_n$  tels que  $\|f - \sum_{n=-N}^N x_n e_n\|_2$  soit minimale ?

Géométriquement, il s'agit de trouver un élément d'un sous espace de  $L^2([0, T])$  qui soit à distance minimale de  $f$ . Lorsqu'un tel élément existe, on dit que c'est la meilleure approximation de  $f$  dans ce sous espace.

Pour tenter de résoudre le problème d'approximation ainsi posé, cherchons à évaluer la distance de  $f$  à un polynôme trigonométrique quelconque :  $p = \sum_{n=-N}^N x_n e_n$ .

On admet qu'on trouve que le minimum est atteint lorsque  $x_n = c_n(f)$  et pour cette valeur seulement

Conclusion : la meilleure approximation de  $f$  existe et est unique, c'est :  $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(t)$ .

Propriété : décroissance des coefficients

Soit  $f \in L^2([0, T])$ , on a :

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$$

Démonstration :

D'après le théorème de Pythagore on a,

$$\|f\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2$$

$$\|S_N(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

$$\text{Or } \|S_N(f)\|_2^2 = \|\sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$$

$$\text{Donc } \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty$$

On a donc une suite croissante majorée donc elle converge.

$$\text{Donc } \lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$$

On peut se demander ce que devient  $S_N(f)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ .

Théorème de Parseval :  $\forall f \in L^2([0, T]), \lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n\|_2 = 0$

Etape de la preuve :

1) 2eme théorème de Weirstrass : L'ensemble des polynômes trigonométriques complexes est dense dans l'espace vectoriel des application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continu et  $T$  periodique muni de la norme infinie

ie : toute application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continue et  $T$  periodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques

2) la convergence avec la norme infinie implique la convergence avec la norme 2

3) on prouve la convergence

Remarque :

Soit  $f \in L^2([0, T])$ ,

D'après le théorème précédent, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = f$  mais on a aussi que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = S(f)$ . Donc d'après l'unicité de la limite, on retrouve bien que  $S(f) = f$

La formule de Parseval est un résultat fondamental en analyse de Fourier qui établit une relation entre l'énergie d'un signal périodique et ses coefficients de Fourier dans l'espace  $L^2([0, T])$

Formule de Parseval :

Soit  $f \in L^2([0, T])$  et  $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de fourier, on a

$$\|f\|_2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2$$

Soit  $g \in L^2([0, T])$  et  $\{c_n(g)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de fourier, on a

$$\langle f; g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt = \sum_{n=-N}^N c_n(f)c_n(g)$$

Le théorème de Dirichlet permet de préciser les conditions de convergence et d'approximation des fonctions périodiques par leurs séries de Fourier

Théorème de Dirichlet :

Si  $f$  est de classe  $C^1$  par morceau sur  $[0, T]$  alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$

Il est important de noter dans cette partie que pour une fonction  $f \in L^2([0, T])$ , sa décomposition en série de Fourier est unique.

## 2.3 Etude d'un signal défini sur un intervalle borné - Série de Fourier

Maintenant que nous avons vu que nous pouvons décomposer n'importe quelle fonction périodique de carré intégrable dans la base des fonctions périodiques. Nous pouvons nous poser la question suivante : Pouvons-nous faire de même pour les fonctions qui ne sont pas périodiques ?

Soient  $(a, b)$  un intervalle borné et  $f \in L^2(a, b)$ .

A priori, cette fonction n'admet pas de développement en série de Fourier car celui-ci n'existe que pour les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier et périodiques. Nous allons donc prolonger  $f$  à  $\mathbb{R}$  par périodicité avec une période  $b-a$ .

Nous allons voir deux façons d'effectuer ce prolongement.

Pour simplifier, on prend  $f \in L^2(0, a)$ .

La première possibilité est de prolonger  $f$  sur l'intervalle  $(-a, a)$  par imparité et de prolonger ensuite  $f$  à  $\mathbb{R}$  avec la période  $2a$ . Ainsi, on obtient un développement de  $f$  en série de sinus.

La seconde possibilité est de prolonger  $f$  sur l'intervalle  $(-a, a)$  mais cette fois-ci par parité avant de prolonger  $f$  à  $\mathbb{R}$  avec la période  $2a$ . Ainsi, on obtient un développement de  $f$  en série de cosinus.

Remarque : Contrairement au développement en série de Fourier d'une fonction périodique, ici nous n'avons pas l'unicité du développement en série de Fourier de  $f$  sur un intervalle borné car il dépend essentiellement de la façon dont on effectue le prolongement périodique à toute la droite réelle.

## 2.4 La transformée de Fourier continue et la transformée de fourier inverse continue

Définition :  $L^1(\mathbb{R})$  :

Ensemble des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dont la valeur absolue est intégrable. C'est à dire qu'on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

La transformée de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques du développement en série de fourier des fonctions périodiques. La transformée de Fourier associe à une fonction  $f(t)$  une autre fonction notée  $F(f(x))(v)$  ou plus simplement  $\tilde{F}(v)$ . Intuitivement, la transformée de Fourier est une version continue des coefficients de Fourier.

Définition : Transformée de Fourier à temps continue :

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la transformée de Fourier de  $f$  est définie par

$$\tilde{F}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi vt} dt$$

Bien que la fonction originale ne soit pas continue, sa transformée de Fourier l'est.

Théorème de Riemann-Lebesgue :

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on a

$\tilde{F}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Exemple pour illustrer le théorème précédent :

Considérons la fonction porte de largeur  $L$  fixée définie par  $f(t)=1$  pour  $t \in [-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$  et 0 sinon.

On calcule sa transformée de Fourier.

$$\tilde{F}(v) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i2\pi vt} dt = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cos(2\pi vt) dt - i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sin(2\pi vt) dt = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \cos(2\pi vt) dt$$

$$\text{Donc } \tilde{F}(v) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi v L)}{\pi v} & v \neq 0 \\ L & v = 0 \end{cases}$$

Maintenant que nous avons représenté un signal temporel par sa représentation fréquentielle, nous allons nous intéresser à l'inversion de la transformée de Fourier à temps continu qui nous permet de reconstruire une fonction à partir de ses composantes fréquentielles.

Définition : Inversion de la transformée de Fourier à temps continue :

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\tilde{F} \in L^1(\mathbb{R})$ .

$$F^{-1}(\tilde{F})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(v)e^{i2\pi vt} dv$$

Théorème d'inversion dans  $L^1(\mathbb{R})$  :

Soient  $f$  et  $\tilde{F}$  dans  $L^1(\mathbb{R})$

on a  $f(t) = F^{-1}(\tilde{F})(t)$ , en tout point  $t$  où  $f$  est continue

Remarque : Nous allons démontrer ce théorème dans le cas discret dans la partie suivante

## 2.5 La transformée de Fourier discrète et la transformée de fourier inverse discrète

On se place dans les conditions suivantes, celles rencontrées en pratique, on ne connaît pas  $f(t)$  mais on suppose qu'on a un système capable d'échantillonner la fonction aux instants  $nT_e$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Les valeurs à notre disposition sont donc les  $f(nT_e)$ . De plus, lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier de la fonction  $f(t)$  à l'aide d'un ordinateur, on est amené à tronquer la fonction temporelle et à analyser le signal pour les temps  $t \in [0; T]$  avec  $T > 0$ . On prend  $N$  échantillons donc on a  $T = NT_e$

Nous allons approcher l'intégrale  $\tilde{F}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi vt} dt$  par une somme d'aires de rectangles (approximation de Riemann) de durée  $T_e$  en limitant l'intégration à l'intervalle  $[0, (N-1)T_e]$ .

On a  $\tilde{F}(v) = T \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) e^{-i2\pi v n T_e}$

Nous devons également discrétiser les fréquences. On a  $\nu = \frac{\nu_e}{N}$  donc  $\nu_k = k \frac{\nu_e}{N}$

On obtient :  $\tilde{F}(\nu_k) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) e^{-i2\pi k \frac{\nu_e}{N} n T_e}$  donc  $\tilde{F}(\nu_k) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_e) e^{-i2\pi \frac{k n}{N}}$

Donc à un facteur multiplicatif près on obtient l'expression suivante

Définition :  $\ell^2(Z)$

Ensemble des suites à valeurs dans Z de carré sommable. C'est à dire qu'on a  $\sum u_n^2 < +\infty$

Définition : Transformée de Fourier finie :

Soit  $f = \{f_n\}_{n \in Z} \in \ell^2(Z)$  tel qu'il existe un  $N > 0$  et  $f_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$ . Alors la transformée de Fourier discrète finie de f est donnée par :

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi}{N} n k}$$

Définition : Inversion de la transformée de Fourier à finie :

Soit  $f = \{f_n\}_{n \in Z} \in \ell^2(Z)$  tel qu'il existe un  $N > 0$  et  $f_n = 0$  pour tout  $n \notin \{0, \dots, N-1\}$  et soit  $\tilde{f}$  sa transformée de Fourier. Alors

$$f^{-1}(\tilde{f})(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) e^{i \frac{2\pi}{N} n k}$$

Démonstration du théorème d'inversion dans le cas discret :

Soit  $f = \{f_n\}_{n \in Z} \in \ell^2(Z)$

Nous voulons montrer qu'on retrouve le signal d'origine en inversant la transformée de Fourier finie.

Soient

La transformée de Fourier finie  $\tilde{f}(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i \frac{2\pi}{N} n f_n}$  s'écrit matriciellement  $\tilde{F} = U F$

et son inversion  $f^{-1}(\tilde{f}_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) e^{i \frac{2\pi}{N} k n}$  s'écrit matriciellement  $F^{-1}(\tilde{F}) = \frac{1}{N} U^* \tilde{F} = \frac{1}{N} U^* U F$

On veut montrer que  $F^{-1}(\tilde{F}) = F$ . Ceci équivaut à montrer  $\frac{1}{N} U^* U F = F$  ou aussi que  $\frac{1}{N} U^* U = I$

$$\frac{1}{N} U^* U = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} U_{j;l}^* U_{l;i} f = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} j l} e^{-i \frac{2\pi}{N} l i} f_n = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} (j-k) l} = \begin{cases} 1 & \text{si } n - f_n \equiv 0[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = I$$

Donc, on retrouve le signal d'origine en inversant la transformée de Fourier finie.

Nous remarquons que pour toute fonction f(t), la valeur absolue de sa transformée de Fourier présente une symétrie par rapport à l'axe des fréquences nulles.

Propriété : Le spectre d'amplitude |f| est une fonction paire

Donc on peut écrire  $f^{-1}(\tilde{f})(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{f}(k) e^{i \frac{2\pi}{N} n k}$

Démonstration :

On a :

$$\tilde{F}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi v t} dt$$

$$\tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos(2\pi v t) - i \sin(2\pi v t)) dt$$

$$\tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi v t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi v t) dt$$

Or  $t \rightarrow \cos(2\pi v t)$  est paire et  $t \rightarrow \sin(2\pi v t)$  est impaire

Cas 1 : f est paire

On a  $t \rightarrow f(t) \cos(2\pi v t)$  est paire et  $t \rightarrow f(t) \sin(2\pi v t)$  est impaire

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi v t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi v t) dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi v t) dt = 0$

Donc  $\tilde{F}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi v t) dt$  et  $|\tilde{F}(\nu)|$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Cas 2 : f est impaire

On a  $t \rightarrow f(t) \cos(2\pi v t)$  est impaire et  $t \rightarrow f(t) \sin(2\pi v t)$  est paire

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi vt)dt = 0$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt$

Donc  $\tilde{F}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt$  et  $|\tilde{F}(\nu)| = 2 \int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Dans tous les cas  $|\tilde{F}(\nu)|$  est une fonction paire.

Donc  $|\tilde{f}|$  est une fonction paire

## 2.6 Relation entre les coefficients de Fourier exacts et approchés

Dans cette partie, nous allons nous demander quelle erreur on fait entre les coefficients  $c_n(f)$  exacts et les coefficients  $c_n^N = \tilde{f}$  calculés grâce à l'approximation de Riemann ?

Afin de former la série de Fourier de la fonction  $f$ , il faut d'abord calculer les coefficients  $\tilde{f}$ . Comme vu précédemment, lorsqu'on utilise l'approximation de Riemann en divisant l'intervalle considéré en  $N$  sous intervalles de même taille, on a  $\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$ .

Pour l'analyse et l'approximation des fonctions périodiques par leur série de Fourier ? les coefficients de Fourier peuvent être décomposés en séries de coefficients exacts et approximés ;

Théorème :

On suppose que la suite des coefficients de Fourier de  $f$  est sommable :

Les coefficients approchés satisfont l'égalité  $c_k^N = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{k+qN}(f)$

Démonstration

Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

On a  $c_k^N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$ . Or  $f_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(f) e^{i2\pi \frac{n}{N}k}$

Donc  $c_k^N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(f) e^{i2\pi \frac{n}{N}k}) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(f) e^{i2\pi \frac{n}{N}(l-k)}$ .

On peut intervertir les deux sommes car elles convergent.

Ainsi, on a  $c_k^N = \frac{1}{N} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(f) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{n}{N}(l-k)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l(f) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i2\pi \frac{l-k}{N}})^n$

Or  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i2\pi \frac{l-k}{N}})^n = \begin{cases} 1 & \text{si } l-k \equiv 0[N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i2\pi \frac{l-k}{N}})^n = 1$  pour  $l=k+qN$  avec  $q \in \mathbb{Z}$

Ainsi,  $c_k^N = \sum_{q \in \mathbb{Z}} c_{k+qN}(f)$

Remarque :

Le théorème précédent nous fournit une relation liant les coefficients approchés en fonction des coefficients exacts. Il en résulte une expression de l'erreur d'approximation :

$$c_k^N - c_k(f) = \sum_{q \neq 0} c_{k+qN}(f)$$

On a  $c_k^N \simeq c_k(f)$  pour  $-\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$

L'approximation à  $N$  fixé est d'autant meilleure que les coefficients  $c_k$  tendent vite vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini. C'est à dire lorsque  $f$  est plus régulière.

## 2.7 Théorème d'Echantillonnage et formule de Shannon

Le théorème d'échantillonnage a été formulé par Harry Nyquist, un ingénieur en télécommunications américain, en 1928. Il a été d'une grande contribution aux communications et, en 1924, alors qu'il travaillait aux laboratoires Bell, il a publié un article où il énonça que "le nombre maximum d'impulsions indépendantes pouvant être transmises par un canal télégraphique est inférieur à deux fois la largeur de bande du canal". Ce travail a servi de prémisses à Shannon. Le fondateur de la théorie de l'information, a énoncé ce théorème en 1948. Il est donc également connu sous le nom de théorème d'échantillonnage de Shannon. C'était un mathématicien et ingénieur américain, ayant travaillé aux Bell Labs durant la Seconde Guerre mondiale sur des travaux liés à la cryptographie.

On considère le signal trigonométrique tronqué à l'ordre  $N$  :  $f(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} n t}$  pour définir les termes suivant

Remarque : Les fréquences intervenant dans ce signal sont les  $\lambda_n = \frac{n}{T}$

Définition : fréquence de coupure :

On définit la fréquence de coupure par  $\lambda_c = \max_{n; c_n(f) \neq 0} |\lambda_n|$ . C'est à dire la fréquence maximale dans  $f(t)$

Définition : fréquence d'échantillonnage :

On définit la fréquence d'échantillonnage par  $\lambda_{ech} = \frac{N}{T}$ . Elle correspond au nombre de points de mesure par unité de temps.

Théorème : Echantillonnage

Soit  $f$  un signal d'énergie finie à bande limitée.  $f$  peut être reconstruite sans erreur à partir de ses échantillons  $f(t_n)$  prélevés aux instants  $t_n = \frac{n}{2v_0} = nT_e$

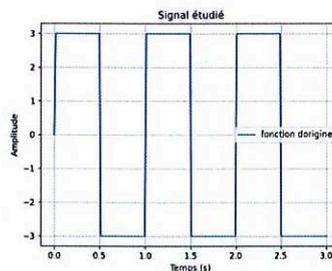
Remarque :

La période d'échantillonnage  $T_e = \frac{1}{2v_0}$  est une période limitée. Il est tout à fait possible d'échantillonner le signal à une fréquence plus élevée. Par contre, une fréquence d'échantillonnage inférieure interdit une reconstruction exacte du signal.

## Chapitre 3

# Analyse numérique et simulation

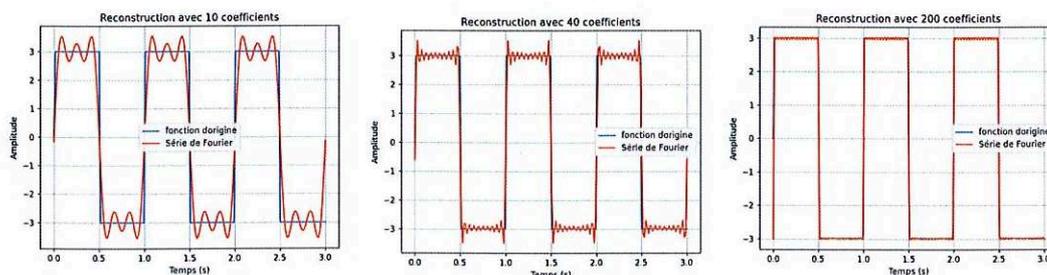
Dans cette partie, nous allons travailler sur un signal créneau de période  $T=1s$ , d'amplitude 3 et sur un temps d'étude correspondant à 3 périodes.



### 3.1 Série de Fourier

Nous souhaitons approcher le signal étudié par sa série de Fourier et nous allons illustrer le phénomène de Gibbs.

Lors de la reconstruction du signal on n'utilise qu'une partie des coefficients de la série de Fourier et non une infinité. Lorsque le nombre de coefficients utilisés augmente on, le signal reconstruit se rapproche du signal étudié.



Le phénomène de Gibbs correspond à l'apparition d'oscillation plus prononcées lorsqu'on s'approche d'une discontinuité.

### 3.2 Retrouver le signal à partir du signal échantillonné

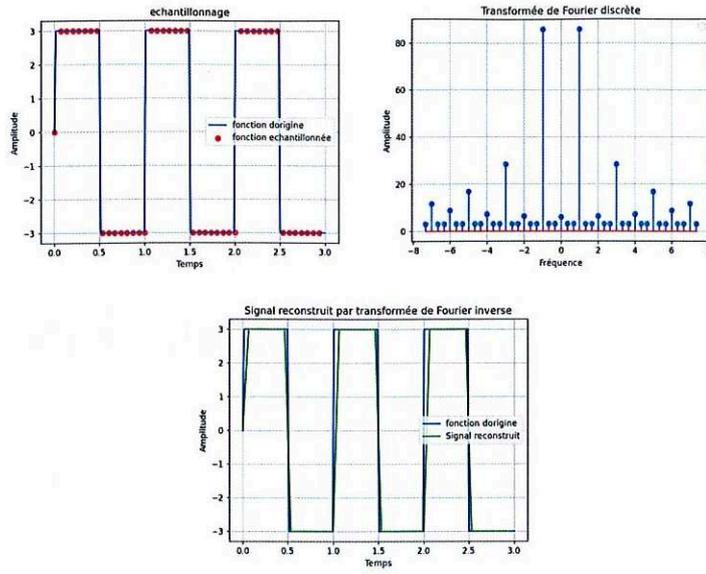
Nous souhaitons retrouver le signal d'étude à partir de son signal échantillonné.

On choisit donc une fréquence d'échantillonnage respectant la condition donnée par le théorème de Shannon. On prend  $f_e=15Hz$

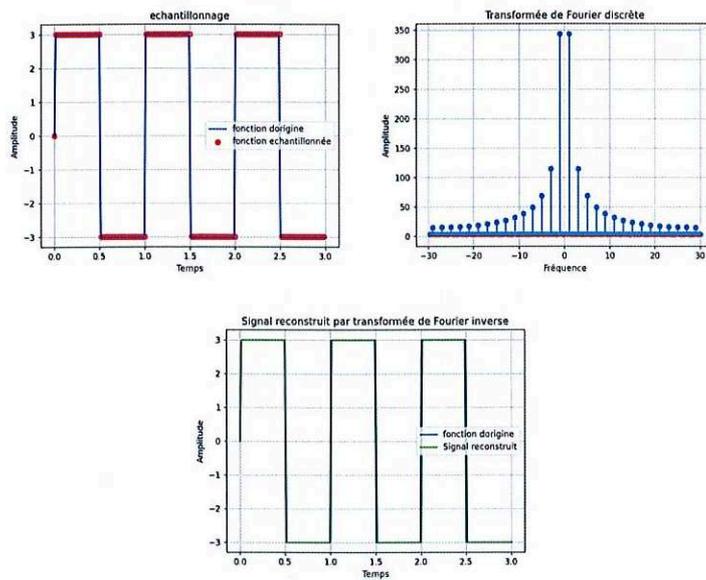
Tout d'abord, on échantillonne le signal.

Puis on calcule la transformée de Fourier discrète du signal échantillonné.

Enfin, on calcule la transformée de Fourier inverse.



Lorsque l'on répète cet algorithme avec une fréquence d'échantillonnage plus élevée  $F_e=60$  Hz. On remarque que le signal reconstruit est plus proche du signal d'origine.



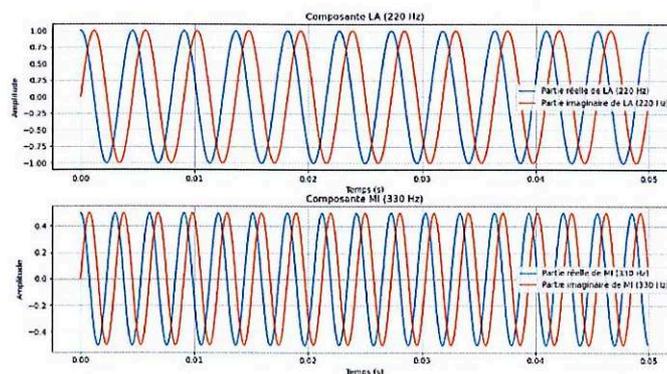
## Chapitre 4

# Application du traitement du signal sur un signal musical

But : analyser un signal qui correspond à un accord LA-MI

### 1/Génération des signaux :

Pour analyser le signal musical correspondant à un accord LA-MI, nous pouvons décomposer le signal en plusieurs composantes sinusoïdales, chacune avec une fréquence  $\nu$ , une amplitude  $A$  et une phase spécifique  $\phi$ . En utilisant des nombres complexes, nous pouvons représenter chaque composante sinusoïdale sous la forme  $Ae^{2i\pi\nu t + \phi}$ .



Nous allons générer les mesures  $y_k$  correspondant à un accord LA-MI à l'aide d'une fonction :

$$f(t) = e^{2i\pi\nu_1 t} + c_2 e^{2i\pi\nu_2 t}$$

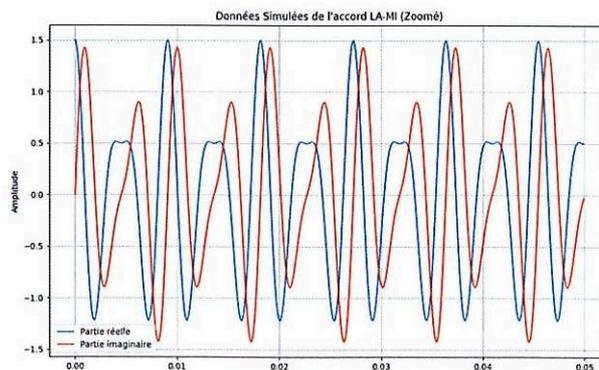
où  $\nu_1 = 220\text{Hz}$  pour LA et  $\nu_2 = 330\text{ Hz}$  pour MI.

On prend ensuite des mesures sur l'intervalle  $t \in [0, T]$ , avec  $T = 1$ . Échantillonner à une fréquence  $\nu_{ech} = N/T = N$ , où  $N$  est le nombre d'échantillons.

On peut exprimer la fonction en cosinus et sinus :  $f(t) = c_1(\cos(2\pi\nu_1 t) + i\sin(2\pi\nu_1 t)) + c_2(\cos(2\pi\nu_2 t) + i\sin(2\pi\nu_2 t))$

La partie réelle est :  $Re(f(t)) = c_1(\cos(2\pi\nu_1 t) + c_2(\cos(2\pi\nu_2 t))$

Et la partie imaginaire est :  $Im(f(t)) = c_1\sin(2\pi\nu_1 t) + c_2\sin(2\pi\nu_2 t)$



Nous visualisons ainsi les parties réelle et imaginaire du signal généré.

## 2/ Analyse avec la Transformation de Fourier Discrète (TFD) :

— Calculer la TFD des données et obtenir le spectre d'amplitude pour les fréquences  $\nu$  dans la plage  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ .

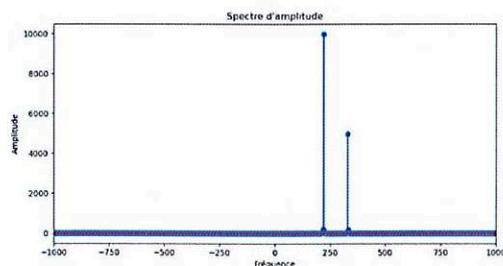
Pour une sinusoïde simple  $f[t] = c \cdot e^{\frac{2j\pi\nu t}{N}}$  :

$$F[k] = \sum_{t=0}^{N-1} c \cdot e^{\frac{2j\pi\nu t}{N}} \cdot e^{-\frac{2j\pi kt}{N}} = c \cdot \sum_{t=0}^{N-1} e^{\frac{2j\pi(\nu-k)t}{N}}$$

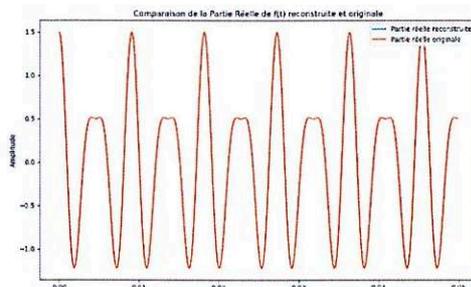
Si  $\nu = k$ , chaque terme de la somme est 1, donc :

$$F[k] = c \cdot \sum_{t=0}^{N-1} 1 = c \cdot N$$

C'est pourquoi la DFT d'une sinusoïde produit un pic dont l'amplitude est proportionnelle à  $c \times N$ .



— Effectuer la TFD inverse et vérifier que les mesures  $y_k$  sont retrouvées.



Erreur entre les mesures originales et reconstruites :  $3.895685529234777 \times 10^{-12}$

## 3/ Application de signal musical :

Le signal musical, a de nombreuses applications dans la vie quotidienne. Ces applications couvrent divers domaines, allant du divertissement à la santé en passant par les services publics.

1. Divertissement et médias : Sans aucun doute, les signaux musicaux sont couramment utilisés dans le domaine du divertissement et des médias. Par exemple, les bandes sonores des films, les effets sonores des jeux et les chansons que nous écoutons dépendent tous des signaux musicaux.
2. Communication : Sonneries de téléphone, alertes SMS et annonces pour les briefings.
3. Santé et thérapie : Les aides auditives et les implants cochléaires utilisent des signaux sonores pour aider les personnes malentendantes à entendre.
4. Traitement audio : Dans le traitement des signaux audio et les technologies de codage/décodage, les signaux musicaux sont largement utilisés pour développer des algorithmes de compression audio efficaces.
5. Système de navigation : le dispositif GPS guide le conducteur jusqu'à sa destination par le biais de messages vocaux.
6. Appareils intelligents et domotique : Comme Amazon Echo et Google Home, qui utilisent des signaux sonores pour le contrôle vocal et l'interaction. En termes de sécurité, des signaux sonores peuvent alerter les utilisateurs en cas de menaces potentielles telles qu'un incendie ou une intrusion.

## Chapitre 5

# Conclusion et perspectives

Dans le cadre de ce projet de traitement de signal, nous avons entrepris une analyse approfondie des concepts fondamentaux de cette discipline et les avons appliqués de manière concrète à l'analyse de signaux numériques, avec un accent particulier sur l'analyse de signaux musicaux. Nous avons utilisé des techniques telles que les séries de Fourier, les transformations de Fourier et l'échantillonnage pour extraire des informations significatives des données.

Notre travail nous a permis d'acquérir une compréhension approfondie des principes théoriques sous-jacents au traitement de signal, ainsi que des compétences pratiques en programmation et en manipulation de données. Nous avons pu mettre en pratique ces connaissances en utilisant des logiciels spécialisés pour implémenter des algorithmes de traitement de signal et interpréter les résultats obtenus de manière rigoureuse.

Pour les années suivantes, plusieurs perspectives s'ouvrent pour le développement futur de ce projet. Il est envisagé d'explorer d'autres méthodes de traitement de signal en dehors de l'approche classique basée sur les transformations de Fourier. Les ondelettes, par exemple, offrent une alternative puissante pour l'analyse de signaux, offrant des avantages tels que la capacité à représenter des signaux non stationnaires de manière plus efficace.

De plus, il est prévu d'élargir les applications du projet à d'autres domaines, en dehors de l'analyse de signaux musicaux. Par exemple, le filtrage de signaux pour la suppression de bruit ou la détection d'événements spécifiques pourrait être exploré. Cette diversification des applications permettra d'explorer davantage les capacités du traitement de signal dans des contextes variés et de maximiser son impact dans différents domaines.

En résumé, les perspectives pour la poursuite de ce projet sont prometteuses, avec des possibilités d'exploration de nouvelles méthodes de traitement de signal et d'application dans des domaines variés. Nous sommes convaincus que les années suivantes verront une continuation fructueuse de cette recherche.

# Bibliographie

## Livres :

- Analyse de Fourier et Applications, *Claude Gasquet et Patrick Witomski*, MASSON
- Analyse3, *Jean-Maire Monier*, DUNOD
- Analyse4, *Jean-Maire Monier*, DUNOD
- Mathématiques pour le traitement du signal, *Maitine Bergounioux*, DUNOD
- Débuter en traitement numérique du signal, *Martin Jean Noël*, ELLIPSES
- Applications musicales du traitement de signal : synthèse et prospective. *Hugues Vinet*. GRETSI,
- Document donné par Mme Zidani (LMI)

## Sites internet :

- <https://vincmazet.github.io/signal1/numerisation/echantillonnage.html>
- <https://www.youtube.com/watch?v=u2a-zi4wiQ4>
- <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.merker/Enseignement/Analyse-de-Fourier/transformee-de-Fourier.pdf#:~:text=Rappelons%20que%20la%20s%C3%A9rie%20de%20Fourier%20d%E2%80%99une%20fon>
- [https://moodle.luniversitenumérique.fr/pluginfile.php/660/mod\\_resource/content/9/Transformees-Fourier.pdf](https://moodle.luniversitenumérique.fr/pluginfile.php/660/mod_resource/content/9/Transformees-Fourier.pdf)
- [https://perso.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly\\_tfd.pdf](https://perso.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly_tfd.pdf)
- <https://w3.ens-rennes.fr/math/people/gregory.vial/files/cplts/fourier.pdf>
- Applications musicales du traitement de signal : synthèse et prospective( Hugues Vinet)
- [https://www.math.univ-toulouse.fr/~cbesse/mesassets/videos/L3Mapi3\\_20201023.mp4](https://www.math.univ-toulouse.fr/~cbesse/mesassets/videos/L3Mapi3_20201023.mp4)
- [https://numerical-analysis.readthedocs.io/en/latest/\\_downloads/Traitement\\_Signal\\_slides.pdf](https://numerical-analysis.readthedocs.io/en/latest/_downloads/Traitement_Signal_slides.pdf)
- [https://numerical-analysis.readthedocs.io/en/latest/Traitement\\_signal.html](https://numerical-analysis.readthedocs.io/en/latest/Traitement_signal.html)

# Annexes

## Décomposition en série de Fourier

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes
periode = 1
nombre = 5
amplitude = 3
temps_periode = np.linspace(0, periode, 200)
temps = np.linspace(0, 3 * periode, 200)

# Définition des différentes fonctions
def f(t):
    return amplitude * np.sign(np.sin(2 * np.pi * t / periode))
def cn(n):
    c_values = np.zeros_like(temps_periode, dtype=np.complex128)

    for i in range(len(temps_periode)):
        t = temps_periode[i]
        c_values[i] = f(t) * np.exp(-1j * 2 * n * np.pi * t / periode)

    return np.sum(c_values) / len(temps_periode)

def fourier(t):
    N = np.arange(-nombre, nombre + 1)
    f_series = np.zeros_like(N, dtype=np.complex128)

    for i in range(len(N)):
        f_series[i] = cn(N[i]) * np.exp(1j * 2 * N[i] * np.pi * t /
periode)

    return (f_series.sum()).real

# Programme principal
y = np.array([fourier(t) for t in temps])

# Affichage
plt.plot(temps, f(temps), label='fonction d\'origine')
plt.plot(temps, y, label='Série de Fourier')
plt.xlabel('Temps(s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Décomposition en série de Fourier')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

## Reconstruction d'un signal à partir des valeurs échantillonnées

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Constantes
periode = 1
amplitude = 3
Fe = 100          # Fréquence d'échantillonnage
Te = 1 / Fe      # Période d'échantillonnage
temps = np.linspace(0, 3 * periode, 200)
temps_echantillonnage = np.arange(0, 3 * periode, Te)

# Définition des différentes fonctions
def f(t):
    return amplitude * np.sign(np.sin(2 * np.pi * t / periode))

def transformee_fourier_discrete(signal):
    N = len(signal)
    transforme = np.zeros(N, dtype=np.complex128)
    for k in range(N):
        for n in range(N):
            transforme[k] += signal[n] * np.exp(-1j * 2 * np.pi * k * n /
N)
    return transforme

def calcul_fréquence(signal, Fe):
    N = len(signal)
    freq = np.zeros(N, dtype=np.complex128)
    for k in range(N):
        if k <= N // 2:
            freq[k] = k * Fe / N
        else:
            freq[k] = (k - N) * Fe / N
    return freq

def transformee_fourier_inverse(transforme):
    N = len(transforme)
    signal_reconstruit = np.zeros(N, dtype=np.complex128)
    for n in range(N):
        for k in range(N):
            signal_reconstruit[n] += (1/N)*transforme[k] * np.exp(1j * 2 *
np.pi * k * n / N)
    return signal_reconstruit

```

```
# Programme principal
signal_echantillonne = [f(t) for t in temps_echantillonnage]
#Echantillonnage du signal
transforme_signal = transformee_fourier_discrete(signal_echantillonne)
#Calcul de la transformée de Fourier
fréquence = calcul_fréquence(signal_echantillonne, Fe)
#Discrétisation des fréquences
signal_reconstruit = transformee_fourier_inverse(transforme_signal)
#Calcul de la transformée de Fourier inverse

#affichage
#Echantillonnage
plt.plot(temps, f(temps), label='fonction d\'origine', color='blue')
plt.scatter( temps_echantillonnage, signal_echantillonne, label='fonction
echantillonnée', color='red')
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('echantillonnage')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Spectre du signal
plt.stem(fréquence, np.abs(transforme_signal))
plt.xlabel('Fréquence')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Transformée de Fourier discrète')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Reconstruction signal
plt.plot(temps, f(temps), label='fonction d\'origine', color='blue')
plt.plot(temps_echantillonnage, np.real(signal_reconstruit), label='Signal
reconstruit', color='green')
plt.xlabel('Temps')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Signal reconstruit par transformée de Fourier inverse')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

## Application musicale

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Définition des paramètres
T = 1 # Intervalle de temps en secondes
N = 10000 # Nombre d'échantillons, augmentés pour une meilleure résolution
nu1 = 220 # Fréquence pour LA en Hz
nu2 = 330 # Fréquence pour MI en Hz
c1 = 1 # Amplitude pour LA
c2 = 0.5 # Amplitude pour MI

# Fonction pour générer les mesures correspondant à l'accord LA-MI
def generate_measurements(T, N, nu1, nu2, c1, c2):
    t = np.linspace(0, T, N) # Génère N points sur l'intervalle [0, T]
    f_t = c1 * np.exp(2j * np.pi * nu1 * t) + c2 * np.exp(2j * np.pi * nu2
* t) # Accord LA-MI
    return t, f_t

# Générer les mesures
t, f_t = generate_measurements(T, N, nu1, nu2, c1, c2)

# Visualiser les données
plt.figure(figsize=(12, 8))

# Zoomer sur une portion plus petite du signal (par exemple, les 0.05
premières secondes)
zoom_factor = 0.05
zoom_index = int(N * zoom_factor)

plt.plot(t[:zoom_index], f_t[:zoom_index].real, label='Partie réelle')
plt.plot(t[:zoom_index], f_t[:zoom_index].imag, label='Partie imaginaire')
plt.title("Données Simulées de l'accord LA-MI (Zoomé)")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Visualiser les composantes séparées
t, f_t1 = generate_measurements(T, N, nu1, 0, c1, 0)
t, f_t2 = generate_measurements(T, N, 0, nu2, 0, c2)

plt.figure(figsize=(12, 8))

```

```

# Tracé de la composante LA (220 Hz)
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t[:zoom_index], f_t1[:zoom_index].real, label='Partie réelle de LA
(220 Hz)')
plt.plot(t[:zoom_index], f_t1[:zoom_index].imag, label='Partie imaginaire
de LA (220 Hz)')
plt.title("Composante LA (220 Hz)")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.grid(True)

# Tracé de la composante MI (330 Hz)
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t[:zoom_index], f_t2[:zoom_index].real, label='Partie réelle de MI
(330 Hz)')
plt.plot(t[:zoom_index], f_t2[:zoom_index].imag, label='Partie imaginaire
de MI (330 Hz)')
plt.title("Composante MI (330 Hz)")
plt.xlabel("Temps (s)")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Appliquer une fenêtre de Hamming au signal initial
hamming_window = np.hamming(N)
f_t_windowed = f_t * hamming_window
# Calcul de la TFD et du spectre d'amplitude
Y = np.fft.fft(f_t)
amplitude_spectrum = np.abs(Y)

# Calcul des fréquences correspondant aux coefficients de la TFD
freqs = np.fft.fftfreq(N, 1/N)

# Plot du spectre d'amplitude
plt.figure(figsize=(10, 5)) # Créer une nouvelle figure

plt.stem(freqs, amplitude_spectrum)

plt.title("Spectre d'amplitude")
plt.xlabel("Fréquence")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.xlim(-1000, 1000)
plt.show()

```

```

# Calcul de la TFD inverse
f_t_reconstructed = np.fft.ifft(Y)

# Plot de la partie réelle de f(t) reconstruit
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(t[:zoom_index], f_t_reconstructed[:zoom_index].real, label='Partie
réelle reconstruite')
plt.plot(t[:zoom_index], f_t[:zoom_index].real, label='Partie réelle
originale')
plt.title("Comparaison de la Partie Réelle de f(t) reconstruite et
originale")
plt.xlabel("Temps")
plt.ylabel("Amplitude")
plt.legend()
plt.show()

# Vérification de l'égalité entre les mesures originales et reconstruites
print("Erreur entre les mesures originales et reconstruites :",
np.sum(np.abs(f_t - f_t_reconstructed)))

```