

Projet de Physique P6

STPI/P6/2024 – 11

REPARTITION D'UN POTENTIEL ELECTROSTATIQUE



Etudiants :

Alexane COURSIERES

Amadou GAYE

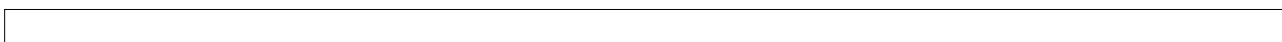
Morgane JOFFRE

Thomas JOUANS

Robin PINEL

Enseignant-responsable du projet :

M. Bernard GLEYSE





Date de remise du rapport : **15/06/2024**

Référence du projet : **STPI/P6/2024 – 10**

Intitulé du projet : **Répartition d'un potentiel électrostatique**

Type de projet : **Modélisation numérique et Bibliographie**

Objectifs du projet :

Notre projet de physique sur la répartition d'un potentiel électrostatique vise à résoudre des problèmes au sein de sphères et de disques. Pour cela, nous utiliserons différentes méthodes analytiques et numériques. Nous comparerons ces méthodes pour évaluer leur précision et leur efficacité. De plus, une bibliographie sera élaborée pour inclure les principales références théoriques et expérimentales sur le sujet. Puis, la modélisation joue un rôle clé, permettant de visualiser et d'analyser les distributions de potentiel. Enfin, ce projet est une opportunité de travail en équipe, favorisant la coopération et l'échange de compétences entre les membres pour atteindre nos objectifs communs.

Mots-clefs du projet :

- **Potentiel**
- **Modélisation**
- **Comparaison**
- **Entraide**

TABLE DES MATIERES

Introduction.....	3
Méthodologie / Organisation du travail.....	3
Travail réalisé et résultats.....	4
Équation de Laplace en coordonnées sphériques.....	4
Équation de Laplace en coordonnées sphériques (à une variable).....	4
Laplacien sphérique appliqué à une sphère chargée en surface.....	6
Laplacien sphérique appliqué à 2 sphères concentriques chargées en surface.....	10
Équation de Laplace en coordonnées polaires.....	12
Laplacien polaire appliqué à un cercle chargé.....	12
Laplacien polaire appliqué à 2 cercles concentriques chargés.....	14
Laplacien polaire appliqué à 2 cercles concentriques chargés.....	14
Méthode des différences finies.....	16
Discrétisation de l'équation de Laplace.....	16
Résolution de l'équation récurrente.....	18
Conclusions et perspectives.....	21
Bibliographie.....	22
Annexes.....	23
Organigramme de répartition du travail.....	23
Démonstration équation de la place en coordonnée polaires.....	24
Démonstration relation coefficients de Legendre.....	25

1. INTRODUCTION

Dans le cadre de notre deuxième année au sein du département Sciences et Techniques pour l'Ingénieur (STPI) à l'INSA, notre groupe a entrepris le projet d'étudier la répartition d'un potentiel électrostatique sur une sphère. Ce sujet, choisi pour nous, s'aligne sur les objectifs pédagogiques de notre formation. Il vise à nous doter d'une solide compréhension des principes physiques et des compétences en résolution de problèmes complexes.

La répartition du potentiel électrostatique est un phénomène fondamental en physique. En effet, il implique directement de nombreux domaines de l'ingénierie et des sciences appliquées. On peut citer le développement de matériaux isolants, la conception de capteurs électrostatiques, ou encore la compréhension des interactions entre les charges électriques dans divers environnements. Aborder ce sujet nous permet non seulement de consolider notre savoir en électrostatique mais aussi de nous familiariser avec des méthodes analytiques et numériques avancées, essentielles pour notre future carrière d'ingénieurs.

En dépit de la complexité et du caractère imposé de ce projet, il représente une opportunité d'appliquer concrètement nos connaissances théoriques. De plus, la comparaison des méthodes, la modélisation rigoureuse et une bibliographie bien étayée sont des éléments essentiels. Ils permettent enrichir notre approche et nous préparent à des situations professionnelles réelles pour concevoir et optimiser des dispositifs.

Finalement, le projet nous permet de développer notre capacité à travailler en équipe. Notre aptitude à communiquer des résultats scientifiques de manière claire et précise sera renforcée avec notamment la soutenance de fin de projet. C'est un projet qui s'inscrit dans une démarche d'apprentissage active. En effet, la confrontation directe avec les défis techniques et théoriques contribue de manière significative à notre formation d'ingénieur.

2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

L'organisation de ce projet a d'abord débuté par la mise en place de moyens de communication au sein du groupe. Pour cela, nous avons fait le choix d'échanger via un groupe Instagram et de créer un document partagé « Google Docs » pour pouvoir ajouter les rédactions de chacun au fur et à mesure.

Notre fichier « Google Docs » était séparé en deux parties distinctes :

- La résolution du problème avec l'équation de Laplace ;
- La méthode des différences finies.

Problèmes rencontrés :

Lors de notre projet, nous avons rencontré plusieurs défis. Tout d'abord, les ressources bibliographiques spécifiques aux sphères étant rares, il a été difficile de démarrer le projet et de trouver des références solides. De plus, Morgane a eu des difficultés à prendre en main le projet puisqu'elle est arrivée en milieu de semestre suite à un changement de sujet. C'est

pourquoi, le groupe a fait son maximum pour l'intégrer au mieux et lui expliquer les avancées et objectifs du projet. Nous avons également rencontré des obstacles dans la résolution des exemples, nécessitant des ajustements constants et de nombreux essais-erreurs. Enfin, nous avons éprouvé des difficultés pour convertir notre système d'équations en matrices de code. C'est le résultat d'une perte de temps considérable. Ces défis ont nécessité une adaptation continue et une collaboration renforcée au sein de notre équipe pour surmonter les obstacles et avancer dans notre projet.

L'organigramme qui résume les tâches réalisées par chaque membre du groupe figure en annexe 1 de document.

3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

Le potentiel électrostatique u , en un point, est l'énergie potentielle par unité de charge qu'une charge électrique aurait en ce point dans un champ électrique. Il se mesure en volts et se calcule comme le travail nécessaire pour amener une charge unitaire depuis l'infini jusqu'à ce point, sans changer son énergie cinétique. [1]

Une première approche du calcul du potentiel électrostatique a été celui avec les flux réalisé en P5. On peut notamment retrouver un exemple de calcul au sein d'une sphère. [2]

Dans le cadre de notre projet, nous avons considéré le potentiel créé par des charges dans un espace où aucune autre charge n'est présente, c'est à dire que le potentiel vérifie :

$$\Delta u = 0$$

Lors de notre projet, nous avons dans un premier temps résolu analytiquement l'équation de Laplace, puis effectué une résolution numérique.

3.1. Équation de Laplace en coordonnées sphériques

3.1.1. *Équation de Laplace en coordonnées sphériques (à une variable)*

Pour commencer à aborder ce projet de P6, nous avons résolu l'équation de Laplace pour un cas simple : une sphère uniformément chargée en surface.

Afin d'obtenir une expression du potentiel en tout point de l'espace, on résout l'équation de Laplace. Soit u le potentiel, on sait que $\Delta u = 0$.

Le potentiel créé par la sphère chargée en surface dépend uniquement du rayon, et de la charge surfacique σ . On a :

$$Q = \sigma 4\pi R^2$$

Dans le contexte de notre exercice, les propriétés sur le potentiel sont les suivantes :

- Le potentiel est nul à l'infini.
- Le potentiel continu en tout point de l'espace.

- Le potentiel est constant à l'intérieur de la sphère (le champ électrique est nul à l'intérieur car la sphère est chargée uniquement en surface, donc le potentiel est nul)

Calculons d'abord la valeur du potentiel sur la sphère, à partir de la charge surfacique. On a :

$$u(R) = \int \int_S \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \times \int \int_S dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \times 4\pi\epsilon_0 R^2 = \frac{Q}{4\pi R \epsilon_0}$$

L'équation de Laplace en coordonnées sphériques vaut :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Or, on sait que dans le cadre de notre exercice, le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale. On a donc :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

Réolvons donc l'équation différentielle suivante, après simplification : $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$

On intègre deux fois : $r^2 \frac{du}{dr} = c_1 \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{c_1}{r} + c_2, \forall r \neq 0$

Or, on sait que le potentiel est continu sur le rayon R de la sphère, et vaut : $u(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

Nous cherchons donc 2 expressions du potentiel, l'une à l'intérieur de la sphère, et l'autre à l'extérieur.

Voyons dans un premier temps l'expression du potentiel à l'extérieur. On a alors sur la sphère, d'après nos conditions (potentiel non constant et nul à l'infini) :

$$u(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{c_1}{R} + c_2 \Rightarrow c_2 = 0, c_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

Ce qui nous donne : $u(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \forall r > R$

Nous savons de plus que le potentiel est une fonction continue, spécialement sur la sphère, et que le potentiel est constant par rapport à r à l'intérieur de la sphère.

On a alors : $u(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \forall r < R$

On aurait également pu choisir à nouveau nos constantes d'intégration dans le cas d'un potentiel constant par rapport à r, les méthodes sont équivalentes. On aurait eu :

$$u(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{c_1}{R} + c_2 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \text{ ce qui mène au même résultat.}$$

On remarque que les propriétés du potentiel dans ce contexte ont bien été respectées : continu, constant à l'intérieur de la sphère et nul à l'infini.

3.1.2. Laplacien sphérique appliqué à une sphère chargée en surface

[3] [4] L'équation de Laplace en coordonnées sphériques s'écrit ainsi :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

Pour une symétrie sphérique, le potentiel V ne dépend pas de ϕ , ce qui simplifie l'équation en omettant le dernier terme :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0$$

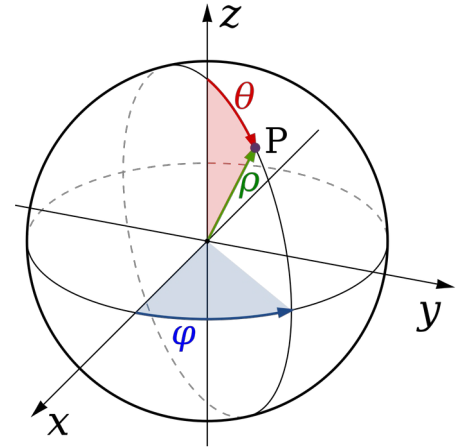


Figure 1 : repère en coordonnées sphériques pour une sphère

Afin de résoudre cette équation, nous allons supposer que la solution peut être écrite comme le produit de deux fonctions, $R(r)$ dépendant uniquement de r , et $\Theta(\theta)$ dépendant uniquement de θ . On obtient donc :

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

En remplaçant l'expression de $V(r, \theta)$ dans l'équation de Laplace, nous obtenons donc :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \frac{-1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right)$$

Cette équation indique que le côté gauche, qui dépend uniquement de r , doit être égal au côté droit, qui dépend uniquement de θ , pour toutes les valeurs de r et θ . Pour que cette égalité soit toujours vraie il faut donc que chaque côté soit égal à une constante qui ne change pas en fonction de r ou θ . On obtient donc les 2 équation suivantes :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R(r) = 0 \qquad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta(\theta) = 0$$

Résolution de la Partie Radiale :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda R(r) = 0$$

Cette équation est un exemple classique d'une équation différentielle d'Euler.

Les équations différentielles d'Euler ont des solutions de forme spécifique, qui peuvent être déterminées en substituant une solution proposée dans l'équation. [5]

La forme générale des solutions pour une équation différentielle d'Euler comme celle-ci est : $R(r)=r^m$, où "m" est une constante qui est à déterminer. En substituant cette forme dans l'équation différentielle, nous trouvons : $\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d(r^m)}{dr}\right) - \lambda r^m = 0$

Après dérivation nous avons : $m(m+1)r^m - \lambda r^m = 0$ ce qui donne : $r^m(m(m+1) - \lambda) = 0$ et $m(m+1) = \lambda$.

Or, on sait que dans le contexte de notre exemple, nous avons des conditions aux limites particulières : le potentiel doit être borné en 0, et nul pour r qui tend vers l'infini. On comprend donc bien la nécessité d'avoir 2 solutions pour m, une qui serait bornée en 0, et une qui aurait sa limite nulle en l'infini. La nature des solutions en $R(r)=r^m$, nous oblige donc à avoir deux cas, un m positif pour notre condition en 0 et un m négatif pour r en l'infini.

On pose donc $\lambda = n(n+1)$ et nos solutions sont donc les suivantes : $m=n$ et $m=-n(n+1)$

- Pour l'exposant $m=n$: $R(r) = Ar^n$
- Pour l'exposant $m=-n(n+1)$: $R(r) = Br^{-(n+1)}$

Résolution de la Partie Angulaire :

En posant le changement de variable $x = \cos(\theta)$, et $\lambda = n(n+1)$, nous retrouvons exactement l'équation différentielle de Legendre. Le choix de $\lambda = n(n+1)$ et pas $\lambda = n(n+2)$ par exemple est donc bien justifié par la nature de l'équation de Legendre.

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right) + n(n+1)*f(x) = 0$$

Les solutions de cette équation sont donc les polynômes de Legendre, en $x = \cos(\theta)$.

Construction de la Solution Générale :

La solution générale est donc une combinaison linéaire des solutions radiales et angulaires, avec des coefficients à déterminer en fonction des conditions du problème. Cela forme une série sommée sur n, qui exprime le potentiel en tout point de l'espace autour de la sphère.

La solution générale pour le potentiel $u(r, \theta)$ peut être exprimée sous la forme d'une série de termes associés à chaque valeur de n, chacun avec son propre coefficient à déterminer :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \text{ où :}$$

- A_n et B_n sont des coefficients à déterminer,
- $P_n(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre d'ordre n ,
- $A_n r^n$ représente le potentiel à l'extérieur de la sphère,
- B_n / r^{n+1} représente le potentiel à l'intérieur de la sphère.

Application des Conditions aux Limites :

Pour trouver les coefficients A_n et B_n , nous utilisons les conditions aux limites. Ces conditions sont que le potentiel doit être borné et continu pour tout r , et s'annuler pour r à l'infini.

- Le potentiel doit être fini partout à l'intérieur de la sphère. Cela signifie que pour r proche de 0, le potentiel doit être borné. Cette condition affecte les coefficients B_n . En effet, les termes en B_n / r^{n+1} ne sont pas bornés quand r tend vers 0.
- Le potentiel doit s'annuler pour r à l'infini. Cette condition limite signifie que lorsque r tend vers l'infini, $u(r, \theta)$ tend vers 0. Cette condition affecte les coefficients A_n . En effet, les termes en $A_n r^n$ ne sont pas bornés à l'infini.

Expression du Potentiel :

On définit donc le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère :

- À l'extérieur de la sphère ($r \geq R$) : $u_{\text{extérieur}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$
- À l'intérieur de la sphère ($r \leq R$) : $u_{\text{intérieur}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$

Calcul des Coefficients :

L'utilisation des Polynômes de Legendre nous permet de profiter des propriétés bien définies de ces polynômes, comme les formules de récurrence, qui simplifient de nombreux calculs analytiques et numériques, et leur orthogonalité. En effet, les coefficients multiplicateurs des polynômes de Legendre peuvent être calculés grâce au produit scalaire qui doit être nul puisqu'ils sont orthogonaux.

Nous pouvons désormais en déduire les termes A_n et B_n dans le cas de notre problème : une sphère de rayon R chargée en surface. Pour cela, le potentiel en $r = R$ est défini comme $f(\theta)$. Nous le développons en série de Legendre.

$$f(\theta) = u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Pour la suite, on pose : $a_n = R^n A_n$ et $b_n = \frac{B_n}{R^{n+1}}$

Or, les P_n forment une base, et les polynômes de Legendre sont orthogonaux, ce qui nous permet d'extraire les constantes a_n et b_n avec la relation ci-dessous (démonstration en Annexe 6.3) :

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Prenons donc quelques exemples de fonction de répartition du potentiel sur la sphère afin de déterminer les constantes b_n .

Afin de simplifier les calculs intégraux, on pose $x = \cos(\theta)$, $F(x) = f(\theta) = x$

On peut alors décomposer $F(x)$: $F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) = c_0 \times 1 + c_1 \times x$
on obtient alors $c_0 = 0, c_1 = 1$, et $F(x) = P_1(x) \Rightarrow f(\theta) = P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.

On a alors $\forall n \neq 1, b_n = a_n = 0$, et $\forall n = 1, b_1 = a_1 = 1$

$$\Rightarrow r \geq R : B_1 = R^2 b_1 \Rightarrow B_1 = R^2$$

$$\Rightarrow r \leq R : A_1 = \frac{1}{R} a_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{R}$$

On obtient donc les solutions pour $f(\theta) = \cos(\theta)$:

$$r \leq R : V(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{R}$$

$$r \geq R : V(r, \theta) = \frac{R^2 \cos \theta}{r^2}$$

Les propriétés du potentiel sont donc bien respectées : on a bien continuité en $r = R$, le potentiel est bien nul pour r à l'infini, et fini en r proche de 0.

On peut réaliser la même méthode avec des fonctions $f(\theta)$ différentes, voici un autre exemple :

	$r \leq R$	$r \geq R$
$f(\theta) = \cos(\theta)$	$u(r, \theta) = \frac{r \cos \theta}{R}$	$u(r, \theta) = \frac{R^2 \cos \theta}{r^2}$
$f(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$	$u(r, \theta) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{R^2}$	$u(r, \theta) = \frac{4R}{3r} - \frac{2}{3} \frac{R^3 (3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}$

3.1.3. Laplacien sphérique appliqué à 2 sphères concentriques chargées en surface

Dans ce second exemple, le début de la résolution de l'équation de Laplace reste le même, cependant les conditions aux limites changent. En effet, le domaine n'est plus divisé en 2 parties mais en 3, comme illustré dans le schéma. Nous aurons donc 3 domaines : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$; $r > R_2$. Le potentiel respectera les conditions suivantes : borné en 0, nul pour r à l'infini, et il doit maintenant être continu à la traversée des 2 sphères.

Puisque le potentiel électrostatique vérifie le principe de superposition, il est additif, c'est à dire que le potentiel créé par la réunion de deux systèmes de charges est la somme des potentiels créés par chaque système.

Grâce à cela, nous pouvons donc simplement sommer les expressions du potentiel dans le cas d'une sphère seule de rayon R_1 et d'une sphère seule de rayon R_2 .

On obtient donc les mêmes solutions générales du potentiel u pour $r < R_1$ et pour $r > R_2$. La différence se situe en $R_1 < r < R_2$, où l'on somme l'expression du potentiel extérieur de la sphère intérieure (de rayon R_1) avec l'expression du potentiel intérieur de la sphère extérieure (de rayon R_2).

Les solutions générales sont donc :

$$r < R_1 : u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n P_n(\cos(\theta))$$

$$r > R_2 : u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e_n}{r^{n+1}} P_n(\cos(\theta))$$

$$R_2 > r > R_1 : u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos(\theta))$$

Voyons l'expression du potentiel dans d'un exemple :

Conditions : $R_1 = 7, R_2 = 13, f(\theta) = \cos(2\theta) = g(\theta) = 5$

Nous devons d'abord calculer les coefficients des séries de Legendre qui satisfont ces conditions, puis utiliser ces coefficients pour écrire les expressions du potentiel dans chaque région.

Coefficients à l'intérieur :

$$f(\theta) = \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) ; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

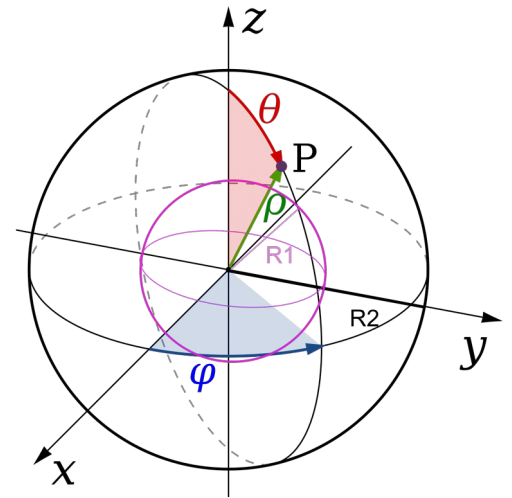


Figure 2 : repère en coordonnées sphériques pour des sphères concentriques

$f(\theta) = \cos(2\theta) = -\frac{1}{3}P_0 \cos(\theta) + \frac{4}{3}P_2 \cos(\theta)$ Le terme P_2 doit être multiplié par $\frac{4}{3}$ et le terme P_0 qui est 1 doit être inclus avec le facteur supplémentaire $-\frac{1}{3}$. Donc $a_0 = -\frac{1}{3}$ et $a_2 = \frac{4}{3}$.

Coefficients à l'extérieur :

$g(\theta)$ est une constante et peut être représentée par $P_0 \cos(\theta)$

Les coefficients pour à l'extérieur sont donc :

$e_0 = 65$ puisque $\frac{65}{13} = 5$, pour garantir que $u=5$ à R_2 , et tous les autres sont nuls pour $n > 0$.

Coefficients entre les deux sphères :

$$u(R_1, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n R_1^n + \frac{d_n}{R_1^{n+1}} \right) P_n(\cos(\theta)) ; \quad u(R_2, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_n R_2^n + \frac{d_n}{R_2^{n+1}} \right) P_n(\cos(\theta))$$

Posons : $c_n R_1^n + \frac{d_n}{R_1^{n+1}} = f_n$ et $c_n R_2^n + \frac{d_n}{R_2^{n+1}} = u_n$

On a : $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ et $u_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi g(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$

Après calcul, on obtient : $f_0 = -\frac{1}{3}$, $u_0 = 5$; $f_2 = \frac{45\pi^2 + 290}{36}$, $u_2 = \frac{75\pi^2 - 350}{4}$

On a en R_1 : $c_0 R_1^0 + \frac{d_0}{R_1^1} = f_0$ et $c_2 R_1^2 + \frac{d_2}{R_1^3} = f_2$

On a en R_2 : $c_0 R_2^0 + \frac{d_0}{R_2^1} = u_0$ et $c_2 R_2^2 + \frac{d_2}{R_2^3} = u_2$

Après avoir résolu les équations, nous trouvons : $c_0 = \frac{101}{9}$, $d_0 = -\frac{728}{9}$, $c_2 = \frac{-686}{531729}$, $d_2 = \frac{254706998}{531729}$

Expressions des potentiels :

Pour $r < R_1$: $u(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{3}P_0(\cos(\theta)) + \frac{4r^2}{147}P_2(\cos(\theta))$

Pour $R_1 < r < R_2$: $u(r, \theta, \phi) = \left(c_0 + \frac{d_0}{r} \right) P_0(\cos(\theta)) + \left(c_2 r^2 + \frac{d_2}{r^3} \right) P_2(\cos(\theta))$

Pour $r > R_2$: $u(r, \theta, \phi) = \frac{65}{r}$

3.2. Équation de Laplace en coordonnées polaires

3.2.1. Laplacien polaire appliqué à un cercle chargé

Voyons donc l'expression du potentiel dans le cas d'un cercle chargé dans le plan.

On rappelle tout d'abord l'expression du potentiel en coordonnées polaires (démonstration en Annexe 6.2) :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

On pose $f(r, \theta) = R(r)\phi(\theta)$ afin d'effectuer une séparation des variables.

$$\frac{\partial^2(R\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(R\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(R\phi)}{\partial \theta^2} = 0$$

$$R''(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\phi(\theta)'' = 0, \text{ on multiplie par } \frac{r^2}{R\phi}$$

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{-\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = k$$

Nous avons donc à nouveau une égalité entre la partie radiale et la partie angulaire. Cette égalité pour tout r et pour tout θ implique que ces deux fonctions sont des fonctions constantes. On appelle k la constante de séparation.

Nous résolvons $R(r)$ et $\Phi(\theta)$ en fonction des différentes valeurs de k :

- $k < 0$: est impossible car on obtiendrait des solutions imaginaires, or les valeurs du potentiel sont réelles.
- $k = 0$: on obtient l'équation angulaire suivante : $\phi''(\theta) = 0$

Or comme $\phi(\theta)$ est une fonction trigonométrique, cela implique que la répartition du potentiel est constant pour tout θ : $\phi(\theta) = a$

Pour la partie radiale, on obtient l'équation suivante : $rR''(r) + R'(r) = 0$

en primitivant $rR'(r) = cst$

$$R'(r) = \frac{cst}{r} \Rightarrow R(r) = A \ln(r) + B$$

- $k > 0$:

on commence par résoudre la partie angulaire: $\phi''(\theta) = -\phi(\theta)k$

Il s'agit d'une fonction trigonométrie, elle est donc de la forme:

$$\phi(\theta) = X \cos(\theta m) + Y \sin(\theta m)$$

$$\phi''(\theta) = -m^2 X \cos(\theta m) - m^2 Y \sin(\theta m) = -m^2 [X \cos(\theta m) + Y \sin(\theta m)] \Rightarrow k = m^2$$

Résolvons maintenant la partie radiale : $r^2 R'' + rR' - m^2 R = 0$

De même que pour l'équation en coordonnée sphérique, ou reconnaît l'équation d'Euler donc on pose $R(r) = r^x$

$$r^2(r^x)'' + r(r^x)' - m^2 r^x = 0 \Rightarrow x(x-1) + x = m^2 \Rightarrow x = \pm m$$

On obtient donc la solution de R(r) :

$$R(r) = A r^m + \frac{B}{r^m}$$

Selon le principe de superposition, on ajoute les deux solutions particulières.

On obtient comme solution générale:

$$u(r, \theta) = E \ln(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos(\theta n) + D_n \sin(\theta n))$$

Condition aux limites :

Comme pour la sphère, le potentiel est borné à l'intérieur du cercle, et nul à l'infini.

Seuls les coefficients A_n , B_n et E sont impactés par les variations de r .

Par une étude aux limites, on obtient l'équation suivante :

$$r < R, u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (\alpha'_n \cos(\theta n) + \alpha''_n \sin(\theta n)) \text{ avec } \alpha'_n = A_n C_n \text{ et } \alpha''_n = A_n D_n$$

$$r > R, u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n} (\beta'_n \cos(\theta n) + \beta''_n \sin(\theta n)) \text{ avec } \beta'_n = A_n C_n \text{ et } \beta''_n = A_n D_n$$

Par continuité de potentiel, nous avons aussi:

$$r = R : u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (\alpha'_n \cos(\theta n) + \alpha''_n \sin(\theta n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^{-n} (\beta'_n \cos(\theta n) + \beta''_n \sin(\theta n))$$

On suppose que $u(r, \theta)$ est développable en série de Fourier avec les coefficients a_n et b_n et de période $T = 2\pi$.

$$\text{Donc } f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(\theta n) + b_n \sin(\theta n))$$

Les coefficients de Fourier sont définis tels que :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$
- $b_0 = 0$
- Pour $n > 0$: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$
- Pour $n > 0$: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$

Comme $f(\theta) = u(R, \theta)$, pour tout $n \geq 0$ on a

- $a_n = R^n \alpha'_n = \beta'_n R^{-n}$
- $b_n = R^n \alpha''_n = R^{-n} \beta''_n$

Déterminons les coefficients pour un cercle de rayon $R=5$ et $f(\theta) = 40 \cos^3(\theta)$.

On pose $u(5, \theta) = f(\theta) = 40 \cos^3 \theta$

On linéarise : $f(\theta) = 40 \cos^3 \theta = 40 \left(\frac{1}{3} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos(\theta) \right)$

On reconnaît une série de Fourier avec les coefficients suivants :

- $a_1 = 30 \Rightarrow \alpha'_1 = \frac{a_1}{5} = 6$ et $\beta'_1 = 5 a_1 = 150$
- $a_3 = \frac{40}{3} \Rightarrow \alpha'_3 = \frac{a_1}{5^3} = \frac{8}{9}$ et $\beta'_3 = 5^3 a_1 = 200$

On obtient donc la fonction suivante :

$$r < 5, u(r, \theta) = 6r \cos(\theta) + r^3 \frac{8}{9} \cos(3\theta)$$

$$r > 5, u(r, \theta) = r^{-1} 150 \cos(\theta) + r^{-3} 200 \cos(3\theta)$$

3.2.2. Laplacien polaire appliqué à 2 cercles concentriques chargés

3.3. Laplacien polaire appliqué à 2 cercles concentriques chargés

De même que pour les sphères, nous avons trois zones du plan : $r \in [0; R_1]$, $r \in [R_1; R_2]$ et $r \in [R_2; +\infty]$. Les autres conditions sont maintenues, le potentiel est borné au voisinage de $r=0$ et est nul à l'infini.

Comme pour le cas des sphères, notre solution générale sera de la forme :

$$r < R_1 : u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (\alpha'_n \cos(n\theta) + \alpha''_n \sin(n\theta))$$

$$R_2 > r > R_1 : u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\gamma_n r^n + \frac{\delta_n}{r^n} \right) \cos(n\theta) + \left(\gamma'_n r^n + \frac{\delta'_n}{r^n} \right) \sin(n\theta) + \gamma_0 \ln(r) + B$$

$$r > R_2 : u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n} (\beta'_n \cos(n\theta) + \beta''_n \sin(n\theta))$$

Pour $r = R_1$, on a pour tout θ , par continuité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\gamma_n r^n + \frac{\delta_n}{r^n} \right) \cos(n\theta) + \left(\gamma'_n r^n + \frac{\delta'_n}{r^n} \right) \sin(n\theta) + \gamma_0 \ln(r) + B = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (\alpha'_n \cos(n\theta) + \alpha''_n \sin(n\theta))$$

et pour $r = R_2$, et pour tout θ , on considère de la même manière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\gamma_n r^n + \frac{\delta_n}{r^n} \right) \cos(n\theta) + \left(\gamma'_n r^n + \frac{\delta'_n}{r^n} \right) \sin(n\theta) + \gamma_0 \ln(r) + B = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n} (\beta'_n \cos(n\theta) + \beta''_n \sin(n\theta))$$

De même que pour le cercle simple, on retrouve des séries de Fourier tel que

$$f(\theta) = u(R, \theta) \text{ pour } R \text{ fixé, avec } f \text{ de la forme } f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

On obtient les relations suivantes entre les coefficients avec $n > 0$, pour $r = R_1$ et $r = R_2$:

$r = R_1$	$r = R_2$
<ul style="list-style-type: none"> • $a_0 = \alpha'_0 = \gamma_0 \ln(R_1) + B$ • $a_n = R_1^n \alpha'_n = \gamma_n R_1^n + \frac{\delta_n}{R_1^n}$ • $b_0 = \alpha''_0 = \gamma_0 \ln(R_1) + B$ • $b_n = R_1^n \alpha''_n = \gamma'_n R_1^n + \frac{\delta'_n}{R_1^n}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $c_0 = \beta'_0 = \gamma_0 \ln(R_2) + B$ • $c_n = R_2^n \beta'_n = \gamma_n R_2^n + \frac{\delta_n}{R_2^n}$ • $d_0 = \beta''_0 = \gamma_0 \ln(R_2) + B$ • $d_n = R_2^n \beta''_n = \gamma'_n R_2^n + \frac{\delta'_n}{R_2^n}$

On cherche les inconnues dans le cas de deux cercles concentriques de rayons respectifs $R_1 = 1$ et $R_2 = 2$.

Dans un premier exemple, on considère $F(\theta) = u_1$ et $G(\theta) = u_2$ deux fonctions constantes sur deux cercles concentriques chargés.

Par identification avec la forme des séries de Fourier, on trouve donc $a_0 = u_1$ pour F , et $c_0 = u_2$ pour G . Tout les autres coefficients sont nuls : $b_0 = 0, d_0 = 0$ et pour $n > 0$, $a_n = 0, b_n = 0, c_n = 0, d_n = 0$

On peut donc déterminer le potentiel dans les trois zones définies précédemment :

$$r < R_1 : u(r, \theta) = u_1$$

$$R_2 > r > R_1 : u(r, \theta) = \gamma_0 \ln(r) + B \text{ donc } u(r, \theta) = (u_2 - u_1) * \frac{\ln(r)}{\ln(2)} + u_1$$

$$r > R_2 : u(r, \theta) = u_2$$

Comme le potentiel est nul à l'infini on a : $u_2 = 0$ donc $G(\theta)$ est la fonction constante nulle.

Étudions maintenant un second exemple : $F(\theta) = 1 + \cos^2(\theta)$ et $G(\theta) = \sin^2(\theta) - \frac{1}{2}$

On commence par linéariser nos deux nouvelles fonctions, on obtient alors:

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{2} \text{ et } G(\theta) = -\frac{1}{2} \cos(2\theta)$$

En procédant à nouveau par identification, on a donc $a_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha'_0 = \frac{a_0}{1^0} = \frac{3}{2}$,

$$a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha'_2 = \frac{a_2}{1^2} = \frac{1}{2} \text{ et } c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta'_2 = 2^2 c_2 = -2$$

On détermine ensuite γ_n en fonction de a_0 et de c_0

$$a_0 = \gamma_0 \ln(R_1) + B \Rightarrow B = a_0 \text{ puis } c_0 = \gamma_0 \ln(R_2) + a_0 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{-a_0}{\ln(R_2)} \text{ ce qui implique que :}$$

$$\gamma_2 = -\frac{5}{2} * \frac{1}{15} = -\frac{1}{6} \text{ et que } \delta_2 = a_2 - \gamma_2 = \frac{2}{3}$$

Nous avons donc dans le cas de ces fonctions:

$$r < R_1 : u(r, \theta) = r^0 \alpha'_0 + r^2 \alpha'_2 \cos(2\theta) = \frac{3}{2} + \frac{r^2}{2} \cos(2\theta)$$

$$R_2 > r > R_1 : u(r, \theta) = \alpha'_0 + \gamma_0 \ln(r) + (\gamma_2 r^2 + \delta_2 r^{-2}) \cos(2\theta) = \frac{3}{2} - \frac{3 \ln(r)}{2 \ln(2)} + \left(-\frac{1}{6} r^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2}\right) \cos(2\theta)$$

$$r > R_2 : u(r, \theta) = -\frac{2}{r^2} \cos(2\theta)$$

3.4. Méthode des différences finies

3.4.1. Discrétisation de l'équation de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \phi^2} = 0$$

Nous allons discrétiser l'équation différentielle spatiale en approximant les dérivées par des différences finies centrées. Cela consiste à estimer la dérivée en un point en prenant une moyenne pondérée des valeurs de la fonction à ce point et à ses voisins. [6] [7] [8]

- Afin d'obtenir la relation d'approximation, on commence par diviser la longueur totale R (qui représente le rayon de la sphère) en N+1 intervalles égaux de longueur $\Delta r = \frac{R}{N+1}$. Cela donne N+2 points. De cette manière, nous obtenons des points de grille $r_i = i\Delta r$ pour $i=0,1,2,\dots,N+1$ où $r_0=0$ et $N=R$.

Pour la dimension θ , nous avons décidé de diviser l'intervalle complet de l'angle θ , qui va de 0 à π , en M+1 intervalles égaux. Nous utilisons M+2 points de grille dans cette dimension. Donc, on a : $\Delta\theta = \pi(M+1)$

Pour la dimension ϕ , nous avons décidé de diviser l'intervalle complet de l'angle ϕ , qui va de 0 à 2π , en K+1 intervalles égaux. Nous utilisons K+2 points de grille dans cette dimension. Donc, le pas de grille $\Delta\phi$ dans la dimension ϕ est calculé comme : $\Delta\phi = 2\pi(K+1)$.

- De la même manière que pour ρ , on obtient les points de grille $\theta_j = j\Delta\theta$ et $\phi_k = k\Delta\phi$.

En utilisant ces pas de grille, nous pouvons discrétiser l'espace en une grille tridimensionnelle avec des intervalles uniformes dans chaque dimension, ce qui nous permet de représenter l'équation différentielle sous forme discrète et de la résoudre numériquement.

On commence par simplifier cette équation en développant les dérivées avec les formules de produit et de somme des dérivées :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\cos\theta \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \phi^2} = 0$$

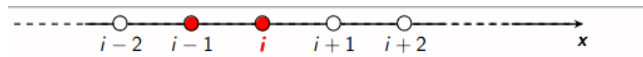
$$\frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j; \phi_k)}{\partial \phi^2} = 0$$

Dans notre cas, en considérant que le potentiel u ne dépend pas de ϕ , nous allons négliger le terme en ϕ . On a alors la simplification suivante :

$$\frac{2}{r} \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial \theta^2} = 0$$

Tout d'abord, on cherche à exprimer la dérivée partielle de $u(r_i; \theta_j)$ par rapport à r à l'aide des différences finies décentrées en amont.



Nous pouvons utiliser le développement en série de Taylor.

La formule de Taylor pour une fonction $f(x)$ autour de x_0 est :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Dans notre cas, nous utilisons cette formule pour $u(r_i; \theta_j)$ autour de r . En tronquant la série à la première dérivée, nous obtenons :

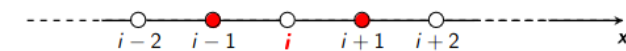
$$u(r_i; \theta_j) = u(r_i; \theta_j) + \Delta r \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} + o(\Delta r) \text{ et } u(r_{i-1}; \theta_j) = u(r_i; \theta_j) - \Delta r \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} + o(\Delta r)$$

En soustrayant ces deux expressions, nous avons : $\Delta r \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} \approx u_{i,j} - u_{i,j-1}$

On a alors en divisant par $2\Delta r$, nous obtenons l'expression recherchée :

$$\frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta r}$$

Ensuite, nous traitons la dérivée seconde par rapport à r en utilisant des différences finies centrées.



Pour retrouver cette méthode, on peut faire un développement limité d'ordre 3 sur les fonctions suivantes : $u(r_{i+1}; \theta_j)$ et $u(r_{i-1}; \theta_j)$.

On obtient à l'aide de la formule de Taylor Young :

$$u(r_{i+1}; \theta_j) = u(r_i; \theta_j) + \Delta r \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^2} + \frac{\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^3} + o(\Delta r^3)$$

et

$$u(r_{i-1}; \theta_j) = u(r_i; \theta_j) - \Delta r \frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^2} - \frac{\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^3} + o(\Delta r^3)$$

Puis on fait la somme de ces deux développements limités. En se simplifiant, on obtient l'expression des différences finies centrées qui nous permet d'approximer :

$$\frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^2} = \frac{u(r_{i+1}; \theta_j) - 2u(r_i; \theta_j) + u(r_{i-1}; \theta_j)}{\Delta r^2} + o(\Delta r^3)$$

Donc la formule d'approximation pour r est la suivante :

$$\frac{\partial^2 u(r_i; \theta_j)}{\partial r^2} \approx \frac{u(r_{i+1}; \theta_j) - 2u(r_i; \theta_j) + u(r_{i-1}; \theta_j)}{\Delta r^2}$$
 où u_i est la valeur de u au point de grille r_i et Δr est le pas de la grille dans la direction r .

Pour alléger les formules on écrit : $\partial^2 \frac{u_{i,j}}{\partial r^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2}$

Nous approximations également les dérivées partielles par rapport à θ de la même manière qu'avec le paramètre r_i . Supposons que nous ayons $M+1$ points de grille pour θ .

Pour θ , les formules d'approximation sont les suivantes :

$$\frac{\partial u(r_i; \theta_j)}{\partial \theta} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \theta} \text{ et } \partial^2 \frac{u_{i,j}}{\partial \theta^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \theta^2}$$

En substituant ces approximations dans notre expression de dérivée partielle par rapport à θ , nous obtenons une version discrétisée de l'opérateur dérivé par rapport à θ qui prend en compte le terme $o(\Delta \theta^3)$ provenant de la formule de Taylor-Young.

$$\frac{2}{r} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta \theta^2} = 0$$

3.4.2. Résolution de l'équation récurrente

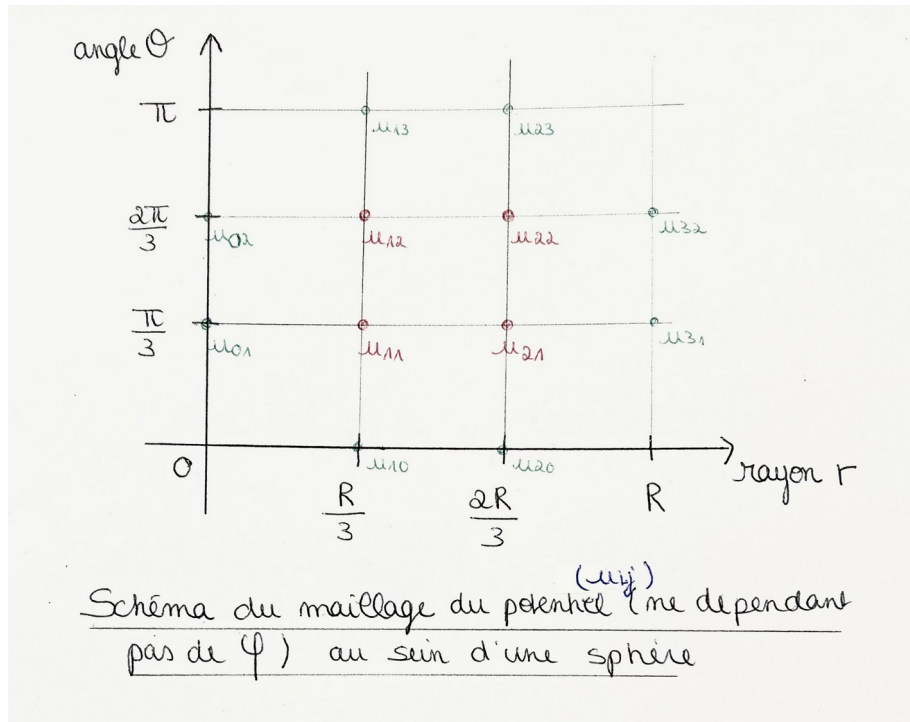
Nous voulons maintenant exprimer cela sous forme matricielle $A.u=b$, où A est la matrice des coefficients, u est le vecteur de $u_{i,j}$ et b est le vecteur des termes indépendants (donc les conditions aux limites).

Pour construire la matrice A , nous devons tenir compte de l'indexation des points de la grille. Supposons que nous ayons $N+1$ points en r et $M+1$ points en θ . La matrice A sera une matrice carrée de taille $(N)(M)$.

Nous allons prendre l'exemple d'un maillage avec $R=1$. Pour cela on prend $N=M=2$. La matrice est donc carrée de taille N^2 .

Nous avons décidé de simplifier le problème en prenant $\Delta r = \Delta \theta$. On pose alors

$$\Delta r = \frac{R}{N+1} = \frac{R}{3} \text{ car } N=2. \text{ De la même manière, on a : } \Delta \theta = \frac{\pi}{3}.$$



On distingue dans notre schéma les points verts, qui sont des conditions aux limites et feront donc partie de notre second membre, et les points rouge où nous cherchons à obtenir notre potentiel.

Pour construire notre matrice A, qui multiplie donc notre vecteur $u=(u_{1,1},u_{2,1},u_{1,2},u_{2,2})$, nous procédons de la manière suivante :

A partir de l'équation récurrente obtenue ci dessus, nous calculons la matrice A et le second membre b, en $i=j=1$, $i=2$ et $j=1$, $i=1$ et $j=2$, $i=j=2$, comme l'indique notre vecteur u.

Voyons donc ce que nous obtenons par exemple pour $u_{1,2}$, avec donc $i=1$ et $j=2$. Nous remplaçons $\theta = j\Delta\theta = j\frac{\pi}{3}$ et $r = i\Delta r = i\frac{R}{3}$ dans l'équation, ce qui nous donne :

$$\frac{2}{i\Delta r} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{1}{i^2 \Delta r^2 \tan \Delta\theta j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta\theta} + \frac{1}{i^2 \Delta r^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta\theta^2} = 0$$

Dans notre exemple de résolution, nous allons choisir $R = 1$ afin de simplifier les calculs, et le potentiel sur la sphère $V(R,\theta) = 1$. On s'attend donc à obtenir un potentiel après résolution égal à 1 sur tout les points rouges, c'est à dire en $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{2,2}$. Simplifions d'abord l'équation suivante :

$$18 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{R^2 i} + 9 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{R^2} + \frac{27}{i^2 R^2 \tan(\Delta\theta j)} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\pi} + \frac{81}{i^2 R^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\pi^2} = 0$$

$$18 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{i} + 9(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{27}{i^2 \tan(\Delta\theta j)} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\pi} + \frac{81}{i^2} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\pi^2} = 0$$

On calcule donc en $i=1$ et $j=2$, ce qui nous donne :

$$18(u_{1,2}-u_{0,2})+9(u_{2,2}-2u_{1,2}+u_{0,2})+\frac{27}{-\sqrt{3}}\frac{u_{1,2}-u_{1,1}}{\pi}+81\frac{u_{1,3}-2u_{1,2}+u_{1,1}}{\pi^2}=0$$

Nous obtenons donc ici les coefficients de la 3^e ligne de la matrice A et le 3^e terme du second membre b. Pour cela, il suffit d'isoler chaque u_{ij} et mettre dans la matrice A les coefficients multiplicateurs des termes correspondant au vecteur u (en rouge sur le schéma), et dans le second membre les coefficients multiplicateurs des termes sur les bords (en vert sur le schéma). Nous obtenons ainsi notre matrice A et notre vecteur b en continuant la même méthode pour tout les combinaisons de i et j compris entre 1 et 2 (correspondant au vecteur u). Nous avons ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{81(-2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9})}{\pi^2} & 9 & \frac{81}{\pi^2} & 0 \\ 0 & -9 - \frac{81}{2\pi^2} - \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} & 0 & \frac{81}{4\pi^2} \\ \frac{27}{\sqrt{3}\pi} + \frac{81}{\pi^2} & 0 & \frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{81*2}{\pi^2} & 9 \\ 0 & \frac{81}{4\pi^2} + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} & 0 & -9 - \frac{81}{2\pi^2} - \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 9 + \frac{27}{\sqrt{3}\pi} - \frac{81}{\pi^2} \\ -9 - \left(\frac{81-9\sqrt{3}\pi}{4\pi^2}\right) \\ 9 - \frac{81}{\pi^2} \\ -9 - \frac{81}{4\pi^2} \end{pmatrix}$$

Maintenant que nous avons notre matrice et le second membre, nous avons plus qu'à tester nos résultats en résolvant numériquement le système linéaire. On s'attend donc à obtenir $u = (1,1,1,1)$, comme expliqué précédemment.

Nous utilisons Python et la bibliothèque numpy qui nous permet de résoudre un système linéaire en un ligne de code.

Voici ce que nous obtenons :

```
import numpy as np
b = np.array([9-(81-9*np.sqrt(3)*np.pi)/(np.pi**2),
             -9-(81-9*np.sqrt(3)*np.pi)/(4*np.pi**2),
             -81/(np.pi**2)+9,
             -9-((81)/(4*np.pi**2))])

A = np.array([[81*(-2+(np.sqrt(3)*np.pi/9))/(np.pi**2),9,81/(np.pi**2),0],
             [0,-9-((81)/(2*np.pi**2))+9/4*(np.sqrt(3)/np.pi),0,81/(4*np.pi**2)],
             [(81+9*np.sqrt(3)*np.pi)/(np.pi**2),0,((-2*81)-9*np.sqrt(3)*np.pi)/(np.pi**2),9],
             [0,((81)/(4*np.pi**2))+((9*np.sqrt(3))/(4*np.pi)),0,(-9)-((81)/(2*(np.pi**2)))-((9*np.sqrt(3))/(4*np.pi))]])

x = np.linalg.solve(A, b)
n = sp.linalg.solve(A,b)
x
array([1., 1., 1., 1.]
```

Nous avons bien obtenu notre vecteur $u = (1,1,1,1)$, ce qui valide notre méthode et nos résultat. Nous pouvons donc généraliser cette méthode numériquement pour d'autres exemples, avec des rayons, maillages et conditions aux limites différentes. Le but ici était de résoudre l'équation sphérique de Laplace numériquement grâce aux différences finies, puis d'appliquer notre modèle dans un exemple choisi simple et prévisible afin de pouvoir le valider.

Cette partie nous a donc montré l'efficacité de la méthode des différences finies pour résoudre l'équation de Laplace sphérique dans le contexte d'un potentiel électrostatique. Cette méthode a permis de transformer l'équation en un système d'équations linéaires, offrant une solution numérique précise et fiable, puisque nous avons obtenu une solution quasi exacte. Nous avons ainsi compris le potentiel de généralisation de cette méthode dans le cadre d'autres problèmes physiques, comme en thermodynamique par exemple où cette méthode semblerait aussi très utile.

L'augmentation constante des puissances de calculs des processeurs nous permettrait ainsi de réaliser des maillages toujours plus fins et ainsi d'obtenir des solutions toujours plus précises au gré des progrès informatiques.

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Pour conclure sur ce projet, nous avons pu apprendre et acquérir de nouvelles compétences.

Tout d'abord, nous pouvons parler des compétences scientifiques. Nous avons étudié deux méthodes pour évaluer le potentiel électrostatique en un point : une analytique et une numérique. Elles ont chacune leurs avantages et leurs défauts : la méthode analytique est plus précise à condition de connaître la bonne fonction de répartition de la charge sur la surface. La méthode numérique quant à elle, bien que moins précise, grâce à son maillage, est plus adaptée dans un contexte expérimental où l'on ne peut pas relever le potentiel exact pour l'infinité de positions de l'espace. Ces deux approches ont enrichi notre analyse, alliant rigueur mathématique et capacité à résoudre des problèmes pratiques diversifiés.

D'autre part, ce projet nous a permis de consolider et d'apprendre de nouvelles choses sur le plan social. Le travail de groupe a été un aspect essentiel de cette expérience, nous obligeant à communiquer efficacement, à répartir les tâches équitablement et à tirer parti des forces de chacun. En termes de développement personnel, ce projet a été une occasion précieuse de renforcer nos compétences en collaboration et en résolution de problèmes complexes.

En réfléchissant sur l'apport personnel de cet E.C. projet, il est clair que cette expérience nous a offert bien plus que des connaissances théoriques. Elle nous a permis de développer des compétences pratiques et analytiques, tout en nous poussant à sortir de notre zone de confort et à explorer des approches novatrices pour résoudre des défis complexes.

Quant aux perspectives pour la poursuite de ce projet, plusieurs pistes peuvent être envisagées. L'une d'elles consisterait à tester et comparer de manière approfondie les différentes méthodes d'évaluation du potentiel électrostatique dans divers contextes pratiques afin de déterminer leur efficacité respective. Par exemple, nous pourrions développer un programme capable de calculer le potentiel électrostatique pour n'importe quel objet donné. En outre, le projet pourrait être étendu pour inclure une modélisation numérique plus avancée et l'utilisation de logiciels de simulation, afin d'affiner nos prévisions et d'explorer les applications potentielles de nos découvertes dans des domaines variés tels que la nanotechnologie ou la conception de capteurs.

5. BIBLIOGRAPHIE

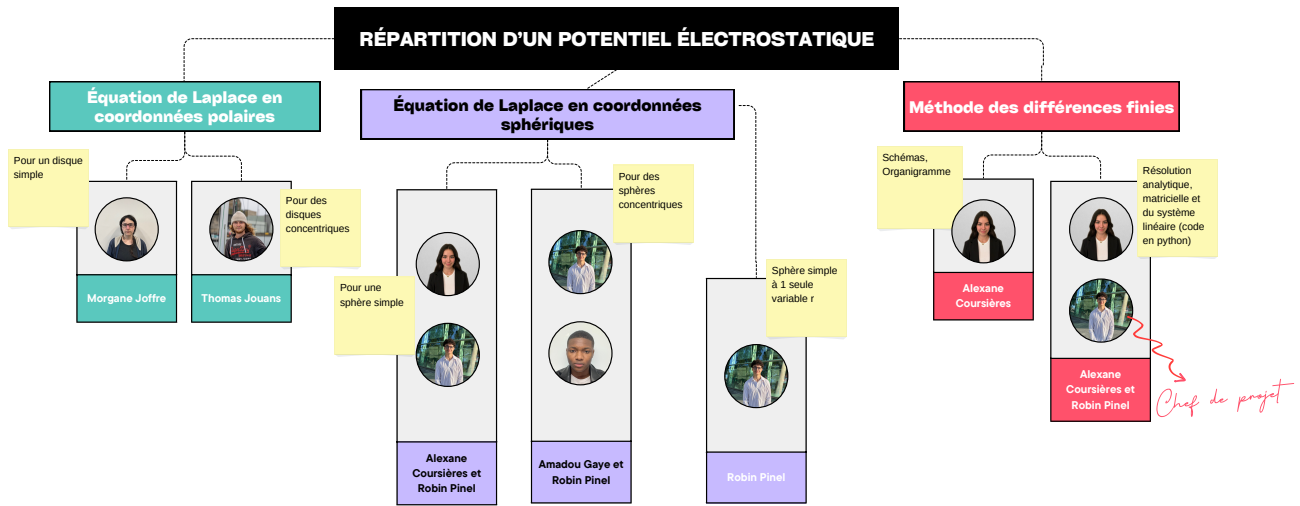
Tous les liens sont valides à la date du 09/06/2024.

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Potentiel_%C3%A9lectrique
- [2] <https://www.youtube.com/watch?v=E2m2Elgebl8>
- [3] [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_\(Herman\)/06%3A_Problems_in_Higher_Dimensions/6.05%3A_Laplaces_Equation_and_Spherical_Symmetry](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Differential_Equations/Introduction_to_Partial_Differential_Equations_(Herman)/06%3A_Problems_in_Higher_Dimensions/6.05%3A_Laplaces_Equation_and_Spherical_Symmetry)
- [4] https://www.google.com/url?sa=t&source=web&rct=j&opi=89978449&url=https://wikidocs.univ-lorraine.fr/download/attachments/58821135/CoursEDP.pdf&ved=2ahUKEwiZnlaJxo2GAXW5UaQEHRBwBOw4ChAWegQIBxAB&usg=AOvVaw2wspuO8nQOWfcGXi8KBpe_
- [5] https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_diff%C3%A9rentielle_d%27Euler
- [6] https://surface.syr.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1160&context=eecs_techreports
- [7] https://moodle.insa-toulouse.fr/pluginfile.php/83300/mod_resource/content/5/Introduction_Differences_Finies.pdf
- [8] <https://www.math.univ-paris13.fr/~japhet/MACS2/2014/projet1-diff-finies.pdf>

6. ANNEXES

6.1. Organigramme de répartition du travail

Organigramme Projet Physique de P6 n°10 - Juin 2024



6.2. Démonstration équation de la place en coordonnée polaires

On pose $g(r; \theta) = f(r \cos(\theta); r \sin(\theta))$

- Expression de x et y:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

- Expression en fonction de x et y:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)} = \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

On exprime les dérivés partielles cartésiennes de f en fonction des dérivées partielles polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2r \cos(\theta)}{2\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \cos(\theta) \quad \left| \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin(\theta)}{r}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2r \sin(\theta)}{2\sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}} = \sin(\theta) \quad \left| \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

On peut donc exprimer les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin(\theta) \left(\sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos(\theta)}{r} \left(\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial(\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta})}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial(\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta})}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin(\theta)}{r} \left(-\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

On peut maintenant remplacer les dérivée partiel dans l'équation de Laplace

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\Delta f = \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left(\cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{r^2} - \sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\sin^2(\theta)}{r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \right) + \left(\frac{\cos^2(\theta)}{r^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left(\sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{r^2} - \cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{r^2} \right)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

6.3. Démonstration relation coefficients de Legendre

On a :

$$\langle f, P_n \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m, P_n \right\rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} b_m \langle P_m, P_n \rangle \right\rangle$$

$$\text{Si } m=n, \langle f, P_n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \|P_n\|_2^2 = b_n \|P_n\|_2^2 ; \text{ Si } m \neq n, \langle f, P_n \rangle = 0$$

Donc si $m=n$, $\langle f, P_n \rangle = b_n \|P_n\|_2^2$ on a :

$$b_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\|P_n\|_2^2} = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\frac{2}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cdot P_n dx = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$