

Projet de Physique P6
STPI/P6/2024 - 09

Conduction Thermique



Etudiants :

BRUMENT Marie

CARLOTTI Marc-Antoine

ELGHOCHÉ Nader

MAGUER Matéo

MAUDUIT Amélie

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Cette page est laissée intentionnellement vierge.



Date de remise du rapport : 15/06/2024

Référence du projet : STPI/P6/2024 – 09

Intitulé du projet : *Conduction thermique*

Type de projet : *Modélisation, expérimental*

Objectifs du projet : L'objectif de ce projet est d'étudier le phénomène de conduction thermique au sein d'une barre de métal de dimension $a*b$. Pour cela, nous déterminerons le profil de température au sein de notre système en résolvant l'équation de la chaleur en deux dimensions et en régime instationnaire. Nous choisirons des conditions limites et initiales se rapprochant de la réalité. Premièrement, nous commencerons par discrétiser l'équation de la chaleur afin de modéliser simplement l'évolution de la température au sein de notre système avec un programme maple. Ensuite, nous résoudrons analytiquement cette équation puis nous la modéliserons numériquement.

Mots-clefs du projet : *Équation de la chaleur - instationnaire - discrétisation - résolution - numérique- analytique*

TABLE DES MATIERES

Table des matières

I. Introduction.....	6
II. Méthodologie / Organisation du travail.....	6
III. Travail réalisé et résultats.....	7
III.1. Définitions.....	7
III.2. Résolution de l'équation en 2D instationnaire.....	8
III.2.a. Cas sans second membre.....	8
III.2.b. Cas avec second membre (source de chaleur).....	9
III.2.c. Cas avec second membre (source de chaleur) stationnaire.....	10
III.3. Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D instationnaire.....	12
III.3.a. Méthode explicite.....	12
III.3.b. Méthode implicite.....	13
IV. Interprétation des résultats.....	16
IV.1. Vérification des résultats approchés et exactes.....	16
IV.2. Comparaison entre les solutions analytiques et les solutions approchées.....	17
V. Conclusion et perspectives.....	18
VI. Annexes.....	21

NOTATION ET ACRONYMES

Conduction : La conduction thermique est un mode de transfert d'énergie dans un milieu qui n'implique pas de déplacement de matière. Elle s'effectue seulement par l'agitation thermique des molécules qui se transmet de proche en proche.

Stationnaire : Un état est dit stationnaire lorsque les grandeurs décrivant notre système ne varient pas en fonction du temps. Dans notre cas, le système est stationnaire lorsque la température n'évolue plus.

Instationnaire : Un état est dit instationnaire lorsque ses grandeurs évoluent au cours du temps.

Explicite : Dans un schéma explicite, nous pouvons calculer la température à l'instant n en réalisant l'image de la température à cet instant. Nous avons une fonction

$$U(n+1) = f[U(n)].$$

Implicite : Dans un schéma implicite, nous pouvons calculer la température à l'instant $n + 1$ en résolvant un système linéaire de la température à l'instant n . Nous avons une fonction

$$U(n) = f[U(n+1)].$$

Coefficient de diffusivité thermique : C tel que : $\alpha = C^2$

I. INTRODUCTION

La conduction thermique est un phénomène physique qui décrit la diffusion de l'énergie thermique dans un milieu. Pour l'aborder, nous commencerons par établir l'équation physique qui le régit, à savoir l'équation de « diffusion ». Notre projet se concentrera ensuite sur la résolution analytique de cette équation dans plusieurs cas spécifiques. Pour ce faire, nous utiliserons des outils informatiques. En parallèle, nous chercherons à résoudre ces problèmes de manière purement mathématique.

Dans notre projet, nous étudions ce phénomène à travers une surface métallique en cuivre de longueur a et de largeur b , où seule la conduction thermique intervient. Nous travaillerons en régime instationnaire (dépendant du temps) et en deux dimensions. Nous supposons que la barre est isolée de tout autre transfert thermique que la conduction en son sein. En effet, nous avons dû restreindre notre étude en raison de la richesse du sujet.

Le but principal de ce projet est de nous amener à la compréhension d'un problème physique complexe au travers de la résolution des équations physiques qui le régissent. Ce projet nous introduit aux différentes méthodes de résolution d'équations, à commencer par la résolution analytique du problème puis leur modélisation à l'aide de logiciels informatiques tels que Maple. Nous exploiterons aussi la méthode par discrétisation d'une équation différentielle physique afin de résoudre numériquement l'équation de la chaleur.

II. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Description de l'organisation adoptée pour le déroulement du travail :

Dans un premier temps l'ensemble du groupe a lu les rapports des années précédentes pour comprendre les différents points à aborder au cours du projet. Par la suite nous nous sommes répartis naturellement les tâches, la partie analytique a été abordé par Matéo MAGUER et Nader ELGHOUCHE et la partie numérique par Marie BRUMENT et Amélie MAUDUIT, Marc-Antoine CARLOTTI. La rédaction du rapport s'est effectuée durant tout le long du projet, principalement par Marc-Antoine CARLOTTI les premières semaines puis par l'ensemble du groupe durant les dernières semaines.

Organigramme des tâches :

Tâches	Étudiants
Équation de la chaleur	Marc-Antoine CARLOTTI
Résolution analytique de l'équation de la chaleur en 2D instationnaire et stationnaire avec et sans second membre	Matéo Maguer et Nader ELGHOUCHE
Résolution numérique de l'équation de la chaleur en 2D instationnaire cas explicite et implicite	BRUMENT Marie
Simulation et interprétation de la résolution numérique avec Maple et Pascal	MAUDUIT Amélie
Forme matricielle de l'équation de la chaleur	BRUMENT Marie et MAUDUIT Amélie et Marc-Antoine CARLOTTI
Rédaction rapport	Ensemble du groupe

III. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

III.1. Définitions

Dans cette partie, nous établirons l'équation de la chaleur, aussi dite « équation de diffusion ». Nous considérons un système fermé, au repos et indéformable (c'est à dire pas de variation de volume et pas de travail mécanique), occupant un volume V limité par une surface Σ . La distribution de température n'est pas uniforme et évolue au cours du temps. Ainsi, le système n'est pas à l'équilibre thermodynamique et des flux de chaleur le traversent. Nous traduisons la situation précédente par la l'expression de la conservation de l'énergie :

$$\Phi_{\text{stockage}} = \Phi_{\text{échange}} + \Phi_{\text{produit}}$$

Dans un premier temps nous allons déterminer le flux de chaleur produit dans le volume, c'est à dire le flux de chaleur dissipé à l'intérieur du volume V .

$$\Phi_{\text{produit}} = P$$

Où P est la densité de puissance calorifique (en W/m^3).

De plus, le système étudié étant ici un solide, les échanges se réduisent aux flux conductifs tel que :

$$\vec{\varphi}_{\text{cond}} = -k_{tr} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

Avec k_{tr} la conductivité thermique du matériau. Le solide est dit uniforme et homogène, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\Phi_{\text{échange}} = \iint_{\Sigma} \vec{\Phi} * \vec{n} = \iiint_V \text{div}(\vec{\Phi}) * dV = -k_{tr} * \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(U)) = \alpha \Delta(U)$$

avec $\alpha = \frac{k_{tr}}{c * \rho}$ le coefficient de diffusivité en $m^2 s^{-1}$, ΔU le Laplacien de U , c la capacité thermique massique (en $J/K/kg$) du matériau. On sait aussi que :

$$\Phi_{\text{stockage}} = \rho c \frac{\partial U}{\partial t}$$

On en déduit l'équation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \Delta U + \frac{P}{\rho c}$$

Ce qui donne, en coordonnées carthésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{P}{\rho c}$$

III.2. Résolution de l'équation en 2D instationnaire

Dans cette seconde partie nous chercherons à déterminer les solutions de l'équation de la chaleur pour différents cas. Dans un premier temps nous nous intéresserons au cas 2D instationnaire sans second membre puis avec second membre. Dans un second temps nous nous pencherons sur le cas 2D stationnaire avec second membre.

III.2.a. Cas sans second membre

On pose le coefficient C tel que : $\alpha = C^2$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C^2 \Delta U, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall t > 0$$

On a les conditions suivantes :

Conditions aux limites : $U(0, y; t) = 0$; $U(x, 0; t) = 0$; $U(a, y; t) = 0$; $U(x, b; t) = 0$

Conditions initiales : $U(x, y; 0) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Séparation des variables :

$$U(x, y; t) = h(x)q(y)g(t)$$

Dans l'équation, on a :

$$h(x)q(y)g'(t) = C^2(h''(x)q(y)g(t) + q''(y)h(x)g(t))$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(t)}{C^2} = \frac{h''(x)q(y) + q''(y)h(x)}{h(x)q(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(t)}{C^2 g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} + \frac{q''(y)}{q(y)} = -v^2$$

D'où :

$$g'(t) = -\lambda^2 g(t) \quad \text{avec } \lambda = C v$$

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = -\left(\frac{q''(y)}{q(y)} + v^2\right) = -k^2$$

Donc :

$$h''(x) + k^2 h(x) = 0$$

$$q''(y) + \mu^2 q(y) = 0, \quad \text{avec } \mu^2 = v^2 - k^2$$

Finalement, on a :

$$h_m(x) = \sin(k_m x), \quad \text{avec } k_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$q_n(y) = \sin(p_n y), \quad \text{avec } p_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$g_{mn}(t) = B_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t}, \quad \text{avec } \lambda_{mn} = C\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

où a et b sont les dimensions de la plaque et : $m = 1, 2, 3, \dots$ et $n = 1, 2, 3, \dots$

Ainsi, il vient :

$$h_m(x) = \alpha \sin(kx) + \beta \cos(kx) \quad \text{et} \quad U(0, y, t) = U(a, y, t) = 0$$

d'où : $h(0)=0, h(a)=0 \Rightarrow \beta=0$ et $h(a)=\alpha \sin(ka)=0 \Rightarrow kma=n\pi$

D'où les fonctions propres :

$$U_{mn}(x, y, t) = B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t} \quad \text{et} \quad \lambda_{mn} = C\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Par superposition de fonctions propres :

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

En $t=0$:

$$U(x, y, 0) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(x, y)$$

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$A_{mn} = \frac{2}{a} * \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy \quad \text{et} \quad A_{mn} = B_{mn}$$

III.2.b. Cas avec second membre (source de chaleur)

L'équation est la suivante : $\frac{\partial U}{\partial t} = C^2 \Delta U + w(x, y, t), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall t > 0$

Avec $w(x, y, t)$ terme source.

Nous reprenons les mêmes conditions limites et initiales que dans le cas sans second membre c'est-à-dire :

Conditions aux limites : $U(0, y; t) = 0$; $U(x, 0; t) = 0$; $U(a, y; t) = 0$; $U(x, b; t) = 0$

Conditions initiales : $U(x, y; 0) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Nous reprenons les fonctions propres de l'expression homogène :

$$U_{mn}(x, y, t) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

$w(x, y, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1} C_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

C'est à dire en série de Fourier : $C_{mn}(t) = \frac{2}{a} * \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy$

En considérant l'expression non homogène : $U_{mn}(t) = C^2 \Delta^2 + C_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$

On dérive l'expression non homogène :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) &= C^2 U(t) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right) \right] \\ &+ w(x, y, t) \\ &= -\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + C_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 U(t) + C_{mn}(t)$$

Après résolution de cette équation différentielle nous obtenons :

$$U_{mn}(t) = \exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) \left(B_{mn} + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) C_{mn}(t) dt\right)$$

On obtient : $u(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} U_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$

Finalement l'expression de $u(x, y, t)$ est :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[\exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) \left(B_{mn} + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) C_{mn}(t) dt\right) \right] * \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

Conditions initiales : $u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m, n=1} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$

$$A_{mn} = \frac{2}{a} * \frac{2}{b} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) dx dy$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \text{ Avec } B_{mn} = A_{mn}$$

Aux temps longs, u ne dépend plus de la condition initiale f , mais est déterminé uniquement par le terme source w .

III.2.c. Cas avec second membre (source de chaleur) stationnaire

Résolvons maintenant l'équation de la chaleur en régime stationnaire c'est-à-dire quand : $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

L'équation de la chaleur devient alors : $C^2 \Delta U + w(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ toujours avec $w(x, y)$ le terme source.

On garde les mêmes conditions aux limites que précédemment :

Conditions aux limites : $U(0, y) = 0$; $U(x, 0) = 0$; $U(a, y) = 0$; $U(x, b) = 0$

Séparation des variables : $U(x, y) = h(x) q(y)$

On a l'équation : $-C^2(h''(x)q(y) + q''(y)h(x)) = w(x, y)$ on suppose $w(x, y)$ constant.
 $-C^2(h''(x)q(y) + q''(y)h(x)) = h(x)C(y)$

On reprend la solution du cas sans second membre pour $h(x)$, donc $h(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$

$$-C^2\left(-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) q(y) + q''(y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) C(y)$$

On pose $k = \frac{m\pi}{a}$ on a alors $-C^2(q''(y) - k^2 q(y)) = C(y)$

Finalement : $q''(y) - k^2 q(y) = \frac{-C(y)}{C^2}$ comme on suppose $w(x, y)$ constant alors $C(y)$ est

constant en y .

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[\exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) \left(B_{mn} + \int_0^t \exp\left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) C^2 t\right) C_{mn}(t) dt\right) \right]$$

$$* \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

De plus on remarque que : $h_p(y) = \frac{C(y)}{C^2 k^2}$ est solution particulière de l'équation-différentielle.

On prend la fonction $w(x)$ constante sur $[0, a]$ on la prolonge sur $[-a, a]$ en fonction impaire puis en fonction périodique de période $2a$.

Afin de déterminer $C_{(y)}$ on va utiliser les séries de Fourier :

$$C_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a w \sin(kx) dx \quad \text{comme } h(x) \text{ est une fonction de } \sin(x) \text{ et que } w \text{ est impaire.}$$

On a alors $C_m(y) = \frac{2w}{a} \int_0^a \sin(kx) dx$ étant donné que w est constant en x .

On résout cette intégrale :

$$\begin{aligned} C_m(y) &= \frac{2w}{a} \left[\frac{-1}{k} \cos(kx) \right]_0^a \\ C_m(y) &= \frac{2w}{a} \left(\frac{-1}{k} \cos(ka) + \frac{1}{k} \right) \\ C_m(y) &= \frac{2w}{ak} (1 - \cos(ka)) \\ C_m(y) &= \frac{2w}{a\left(\frac{m\pi}{a}\right)} \left(1 - \cos\left(\frac{m\pi}{a}a\right) \right) \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$C_m(y) = \frac{2w}{m\pi} (1 - (-1)^m)$$

On va maintenant passer à la résolution de l'équation homogène: $q''(y) - k^2 q(y) = 0$

La solution de cette équation homogène est de la forme : $q_h(y) = \gamma \cosh(ky) + \delta \sinh(ky)$

La solution de l'équation est alors la somme de la solution homogène et de la solution particulière

$$q(y) = q_h(y) + q_p(y)$$

On obtient donc : $q(y) = \gamma \cosh(ky) + \delta \sinh(ky) + \frac{C(y)}{c^2 k^2}$

On a $U(x, 0) = 0 \Leftrightarrow h(x)q(0) = 0 \Leftrightarrow q(0) \Leftrightarrow \gamma \cosh(k0) + \delta \sinh(k0) + \frac{C(y)}{c^2 k^2} = 0$

Donc : $\gamma = \frac{-C(y)}{c^2 k^2}$, de plus on a : $U(x, b) = 0$ donc :

$$h(x)q(b) = 0 \Leftrightarrow q(b) = 0 \text{ et donc } \delta = \frac{C(y)}{c^2 k^2 \sinh(kb)} (\cosh(kb) - 1)$$

Donc $\frac{-C(y)}{c^2 k^2} \cosh(ky) + \frac{C(y)(\cosh(kb) - 1)}{c^2 k^2 \sinh(kb)} \sinh(ky) - \frac{C(y)}{c^2 k^2}$

On reprend l'expression de $C_m(y) = \frac{2w}{m\pi} (1 - (-1)^m)$

L'expression finale est :

$$U(x, y) = \frac{2wa^2}{\pi^3 C^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^m)}{m^3} \sin(kx) \left[1 - \cosh(ky) + \frac{\cosh(kb) - 1}{\sinh(kb)} \right]$$

III.3. Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D instationnaire

Dans cette partie nous allons résoudre de deux manières l'équation de la chaleur en 2D instationnaire. L'objectif sera ici de la discrétiser par une méthode explicite et implicite. Le système est de dimension axb . Les températures seront considérées nulles aux quatre bords du maillage à tout instant t . Nous cherchons à déterminer la température en chaque point intérieur du maillage.

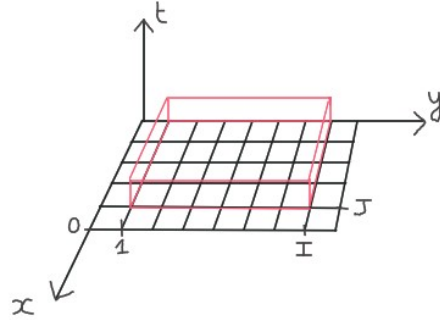


Schéma 2D instationnaire

III.3.a. Méthode explicite

Cette première méthode nous permet de calculer U le long du domaine considéré à tout instant t à partir des températures à l'instant t . Cette méthode repose sur une relation de récurrence.

On se place en un point de coordonnées (x_i, y_j, t_n) .

On introduit un pas spatial Δx selon x , un pas spatial Δy selon y et un pas temporel Δt selon t . On a alors $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ et $t_n = n\Delta t$ avec $i \in \{1, \dots, I\}$, $j \in \{1, \dots, J\}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$.

$\Delta x = \frac{a}{I+1}$ et $\Delta y = \frac{b}{J+1}$ et $\Delta t = \frac{t}{N+1}$ avec a et b les longueurs du segment du système.

$\forall (i, j, n) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, N\}$, on a d'après Taylor Young pour la première variable x :

(1)

$$U(x_i + \Delta x, y_j, t_n) = U(x_i, y_j, t_n) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta x^4)$$

(2)

$$U(x_i - \Delta x, y_j, t_n) = U(x_i, y_j, t_n) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta x^4)$$

On additionne (1) et (2) :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n) \right] \frac{1}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Pour la variable y :

(4)

$$U(x_i, y_j + \Delta y, t_n) = U(x_i, y_j, t_n) + \Delta y \frac{\partial U}{\partial y}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta y^4)$$

(5)

$$U(x_i, y_j - \Delta y, t_n) = U(x_i, y_j, t_n) - \Delta y \frac{\partial U}{\partial y}(x_i, y_j, t_n) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) - \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x_i, y_j, t_n) + O(\Delta y^4)$$

On additionne (4) et (5) :

$$(6) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n) \right] \frac{1}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

On suppose que l'on choisit Δx^2 et Δy^2 assez petits pour que $O(\Delta x^4)$ et $O(\Delta y^4)$ soient négligeables devant $f(x_i, y_j, t_n)$. Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n) \right] \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n) \right] \frac{1}{\Delta y^2}$$

Pour la variable t :

$$U(x_i, y_j, (t_n + \Delta t) - \Delta t) = U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + (\Delta t)^2$$

$$U(x_i, y_j, t_n) = U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - \Delta t \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, y_j, t_n + \Delta t)$$

$$\text{Ce qui nous permet de trouver : } \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, y_j, t_n + \Delta t) = \frac{U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - U(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer ces approximations dans l'équation de la chaleur qui est de la forme :

$$f(x_i, y_j, t_n) = \frac{\partial U}{\partial t} - C^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]$$

On trouve alors :

$$f(x_i, y_j, t_n) = \frac{U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - U(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} - C^2 \left[\left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n) \right] \frac{1}{\Delta x^2} \right. \\ \left. - C^2 \left[\left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n) - 2U(x_i, y_j, t_n) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n) \right] \frac{1}{\Delta y^2} \right] \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} - C^2 \left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] = f_{i,j}^n$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + C^2 \Delta t \left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] + \Delta t f_{i,j}^n$$

Nous considérons aussi que $\Delta x = \Delta y$ afin de simplifier les calculs, on a alors :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n \left(1 - 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n] + \Delta t f_{i,j}^n$$

III.3.b. Méthode implicite

Nous procédons de la même manière que la méthode explicite mais cette fois-ci à t_{n+1} car la méthode implicite permet de déterminer la chaleur en un point du volume à un temps donné t en fonction des températures de ce même point un instant plus tard.

On introduit le pas spatial Δx selon x , un pas spatial Δy selon y et un pas temporel Δt selon t . On a alors $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ et $t_n = n\Delta t$ avec $i \in \{1, \dots, I\}$, $j \in \{1, \dots, J\}$ et $n \in \{0, \dots, N\}$.

On trouve alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x_i, y_j, t_n) = \frac{U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - U(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) \right] \frac{1}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) = \left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n + \Delta t) \right] \frac{1}{\Delta y^2}$$

On remplace dans l'équation de la chaleur :

$$f(x_i, y_j, t_n + \Delta t) = \frac{U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - U(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} - C^2 \left[\left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) \right] \frac{1}{\Delta x^2} \right] - C^2 \left[\left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n + \Delta t) \right] \frac{1}{\Delta y^2} \right]$$

Nous considérons $\Delta x = \Delta y$, on a alors :

$$\frac{U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) - U(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} - \frac{C^2}{\Delta x^2} \left[\left[U(x_i + \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i - \Delta x, y_j, t_n + \Delta t) \right] \right] - \frac{C^2}{\Delta x^2} \left[\left[U(x_i, y_j + \Delta y, t_n + \Delta t) - 2U(x_i, y_j, t_n + \Delta t) + U(x_i, y_j - \Delta y, t_n + \Delta t) \right] \right] = f(x_i, y_j, t_n + \Delta t)$$

$$U_{i,j}^n = U_{i,j}^{n+1} \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \left[U_{i+1,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1} \right] - \Delta t f_{i,j}^{n+1}$$

Equation récurrente pour $t=0$ afin de prendre en compte les conditions initiales :

$$U_{i,j}^0 = U_0(x_i, y_j) \quad \forall i, j$$

$$U_{0,j}^n = 0, U_{I+1,j}^n = 0$$

$$U_{i,0}^n = 0, U_{i,J+1}^n = 0$$

On peut alors calculer cette formule pour i allant de 1 à I et j allant de 1 à J en considérant à l'intérieur du domaine, avec les conditions choisies préalablement :

On prend comme exemple $I=J=3$ et $n=0$:

$$\text{Pour } i=1 \text{ et } j=1 : \quad U_{1,1}^0 = U_{1,1}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \left[U_{2,1}^1 + U_{0,1}^1 + U_{1,2}^1 + U_{1,0}^1 \right] + \Delta t f_{1,1}^1$$

$$\Leftrightarrow U_{1,1}^0 = U_{1,1}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \left[U_{2,1}^1 + U_{1,2}^1 \right] + \Delta t f_{1,1}^1$$

$$\text{Car} \quad U_{0,1}^1 = U_{1,0}^1 = 0$$

Pour $i=1$ et $j=2$:
$$U_{1,2}^0 = U_{1,2}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{2,2}^1 + U_{0,2}^1 + U_{1,3}^1 + U_{1,1}^1] + \Delta t f_{1,2}^1$$

$$\Leftrightarrow U_{1,2}^0 = U_{1,2}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{2,2}^1 + U_{1,1}^1] + \Delta t f_{1,2}^1$$

Car $U_{0,2}^1 = U_{1,3}^1 = 0$

Pour $i=2$ et $j=1$:
$$U_{2,1}^0 = U_{2,1}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{3,1}^1 + U_{1,1}^1 + U_{2,2}^1 + U_{2,0}^1] + \Delta t f_{2,1}^1$$

$$\Leftrightarrow U_{2,1}^0 = U_{2,1}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{1,1}^1 + U_{2,2}^1] + \Delta t f_{2,1}^1$$

Car $U_{2,0}^1 = U_{3,1}^1 = 0$

Pour $i=2$ et $j=2$:
$$U_{2,2}^0 = U_{2,2}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{3,2}^1 + U_{1,2}^1 + U_{2,3}^1 + U_{2,1}^1] + \Delta t f_{2,2}^1$$

$$\Leftrightarrow U_{2,2}^0 = U_{2,2}^1 \left(1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} [U_{1,2}^1 + U_{2,1}^1] + \Delta t f_{2,2}^1$$

Car (x_i, y_j, t_n) .

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}^0 \\ U_{1,2}^0 \\ U_{2,1}^0 \\ U_{2,2}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & 0 \\ -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & 1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & 0 & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \\ -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & 0 & 1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \\ 0 & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & -\frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} & 1 + 4 \frac{C^2 \Delta t}{\Delta x^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{1,1}^1 \\ U_{1,2}^1 \\ U_{2,1}^1 \\ U_{2,2}^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t f_{1,1}^1 \\ \Delta t f_{1,2}^1 \\ \Delta t f_{2,1}^1 \\ \Delta t f_{2,2}^1 \end{pmatrix}$$

IV. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Après avoir résolu analytiquement et numériquement l'équation de la chaleur en 2D instationnaire avec et sans second membre, il est important de comparer les solutions et de se demander si elles sont exactes.

IV.1. Vérification des résultats approchés et exactes

Le groupe a implémenté un programme en pascal avec l'aide de l'enseignant responsable du projet avec comme objectif : calculer la différence maximale entre la solution exacte et la solution approchée. Un code en 1D instationnaire nous a été fourni pour cela, nous l'avons modifié pour le rendre applicable aux résultats obtenus dans ce rapport pour le cas 2D instationnaire. Le code est disponible en annexes 1 et 2.

Après lancement du code, nous obtenons les valeurs de températures exactes en chaque point du maillage avec le tableau $u(x,y,t)$. Plusieurs valeurs à $t=0$ sont fournies ci dessous. Nous avons par ailleurs pu vérifier le bon fonctionnement du code puisque en choisissant des conditions limites nulles sur les bords, chaque valeur de température sur un bord (point 0 ou 3 dans cet exemple) à tout instant est nécessairement nulle contrairement aux autres valeurs. Les valeurs de températures diminuent au cours du temps, en accord avec un refroidissement après un pic de chaleur. De plus, après comparaison des solutions avec le programme maple fourni par l'enseignant, nous avons pu voir que les valeurs obtenues coïncident. Effectivement, les valeurs $u(1,1,0)$ des deux codes sont très proches. $U(1,1,0) \approx 0,7901234$ pour le code en pascal et $u(1,1,0) \approx 0,07907411$ pour le code maple (x,y et t y sont divisés par de point de leur subdivision). Ainsi, nous pouvons valider le fonctionnement du programme en pascal.

```

u( 0, 0, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 0, 1, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 0, 2, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 0, 3, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 1, 0, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 1, 1, 0)= 7.9012345679012363E-001
u( 1, 2, 0)= 7.9012345679012363E-001
u( 1, 3, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 2, 0, 0)= 0.0000000000000000E+000
u( 2, 1, 0)= 7.9012345679012363E-001
u( 2, 2, 0)= 7.9012345679012363E-001

```

Valeurs des températures à $t=0$ en certains points du maillage obtenues avec le code pascal

```

1/3, 0, 18/19, 0.
1/3, 0, 37/38, 0.
1/3, 0, 1, 0.
1/3, 1/3, 0, 0.79074114209985067327
1/3, 1/3, 1/38, 0.47517419011324375814
1/3, 1/3, 1/19, 0.28266428149135716299
1, 1, 3, 0.16814170521047755790

```

Valeurs des températures à $t=0$ en certains points du maillage obtenues avec le code maple

Après avoir calculé chaque point du maillage, le code donne la différence maximum entre la solution approchée et la solution exacte qui est $0,79884001778111113$ au point $u(2,2,19)$. La solution approchée est en réalité le premier terme de la série de la solution exacte, c'est une série tronquée. Cette faible différence permet finalement de dire qu'utiliser la solution approchée pour des calculs ne fausse pas les résultats

IV.2. Comparaison entre les solutions analytiques et les solutions approchées

Il est désormais possible de comparer les solutions obtenues lors de la résolution analytique à celles obtenues dans le programme maple. Nous commençons par comparer les solutions sans second membre.

```
S22 := sum(sum(b[mn]*sin(k*x)*sin(l*y)*exp(-lambda[mn]^2*t), m = 1 .. 2), n = 1 .. 2);
S22 :=  $\frac{1024 \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-2\pi^2 t}}{\pi^6}$ 
S22p:=(x,y,t)->1024*sin(Pi*x)*sin(Pi*y)*exp(-2*Pi^2*t)/Pi^6;
```

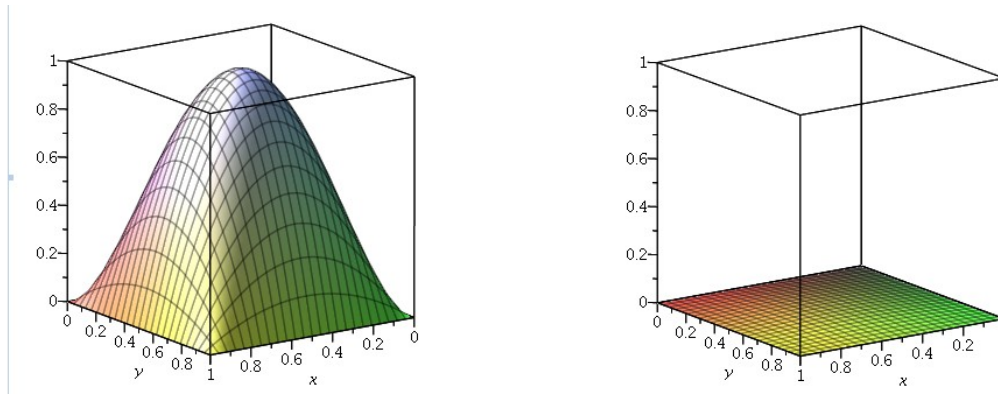
Série tronquée au premier terme sans second membre en maple

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}$$

Solution analytique sans second membre

En observant les deux solutions on remarque que la solution maple est en bien le premier terme de la série qui a été obtenue en résolution analytique avec $m=n=a=b=1$, $B_{1,1} = \frac{1024}{\pi}$ et $-\lambda^2 = -2\pi^2$.

Les résultats sont donc cohérents.



Ces deux graphiques de température sont issus de la résolution de l'équation de la chaleur en 2D instationnaire sans second membre du programme maple. On y remarque bien que la température est nulle sur les bords, en accord avec les conditions limites. De plus, la source de chaleur est située au centre du système. On peut voir que plus les points (x,y) sont éloignés du centre du graphique, moins la température est élevée. Après un cours instant, on obtient le second graphique, où la température est nulle en tout point. Cela semble cohérent. D'autant plus que d'après les résultats théoriques, la températures devient nulle en tout point lorsque t tend vers l'infini.

Nous comparons maintenant les solutions avec second membre.

$$\begin{aligned}
 & \text{> } S44 := \text{sum} \left(\text{sum} \left(\left(b_{mn} + \text{int} \left(c_{mn} \exp \left(\lambda_{mn}^2 \cdot u \right), u = 0 .. t \right) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(l \cdot y) \cdot \exp \left(-\lambda_{mn}^2 \cdot t \right), m = 1 .. 4, n = 1 .. 4 \right) \right); \\
 S44 := & \left(\frac{1024}{\pi^6} + \frac{4 \left(4 e^{2 \pi^2 t} - 4 \right)}{\pi^4} \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-2 \pi^2 t} + \left(\frac{1024}{27 \pi^6} \right. \\
 & + \frac{4 \left(4 e^{10 \pi^2 t} - 4 \right)}{15 \pi^4} \left. \right) \sin(3 \pi x) \sin(\pi y) e^{-10 \pi^2 t} + \left(\frac{1024}{27 \pi^6} \right. \\
 & + \frac{4 \left(4 e^{10 \pi^2 t} - 4 \right)}{15 \pi^4} \left. \right) \sin(\pi x) \sin(3 \pi y) e^{-10 \pi^2 t} + \left(\frac{1024}{729 \pi^6} \right. \\
 & + \frac{4 \left(4 e^{18 \pi^2 t} - 4 \right)}{81 \pi^4} \left. \right) \sin(3 \pi x) \sin(3 \pi y) e^{-18 \pi^2 t}
 \end{aligned}$$

Série tronquée au quatrième terme avec second membre en maple

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left[\exp \left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) C^2 t \right) \left(B_{mn} + \int_0^t \exp \left(-\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) C^2 t \right) C_{mn}(t) dt \right) \right] \sin \left(\frac{m \pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n \pi}{b} y \right)$$

Solution analytique avec second membre

L'égalité des deux solutions est moins flagrante cette fois ci, mais en les comparant on remarque qu'on a toujours les termes $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$ dans les deux solutions qui varient avec m et n pour a=b=1. Les expressions devant chaque terme de la série semblent correspondre à la solution analytique.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Durant ce projet, nous avons pu aborder le phénomène de conduction thermique sous différentes perspectives. Ce sujet d'étude a pu évoluer au fil des années avec l'aide des rapports de chaque groupe précédent, si bien que cette année nous avons pu traiter le cas 2D instationnaire qui n'avait jusqu'à lors pas été étudié. Notre étude se décompose en deux principales parties, une résolution analytique suivie d'une résolution numérique. Les solutions de ces deux résolutions nous ont permis de modéliser nos résultats. Cette étude nous a à la fois permis de mieux visualiser et comprendre le phénomène de conduction thermique, notamment avec des animations et modélisations sur le logiciel maple. Mais également d'approfondir nos connaissances sur la résolution d'équation en variant certains paramètres comme le terme source ou la dépendance en temps.

Il est important d'ajouter que ce projet a également été bénéfique au niveau personnel. En effet, il nous a appris l'importance du travail d'équipe et de la communication pour le bon déroulement d'un projet en fonction des besoins de chacun. Nous avons pu mettre à profit les qualités de chaque membre du groupe, que ce soit la rigueur, l'organisation ou les compétences informatiques, physiques et mathématiques. De plus, nous nous sommes rendus compte de l'importance de l'entraide, la solidarité et la bienveillance au sein d'un groupe afin d'avancer ensemble vers un objectif commun tout en coordonnant nos parties respectives pour rester cohérents.

Enfin, après avoir appréhendé le cas 2D instationnaire, nous pouvons envisager une perspective pour ce projet. Des expériences concrètes pourraient être menées afin de comparer nos résultats théoriques à de futurs résultats pratiques. Cela permettrait par ailleurs de visualiser davantage le phénomène de conduction thermique.

VI. BIBLIOGRAPHIE

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR/cours4_eqchal_loc.pdf

C'est un chapitre sur l'équation de chaleur. Il introduit la loi de Fourier et la conduction stationnaire pure 1D. Il y a plusieurs applications à différents types de surfaces et des exemples résolus (casserole, frigidaire, construction, visualisation de température, ...).

<https://www.techno-science.net/definition/3360.html>

C'est une définition de la conduction thermique et une explication de la loi de Fourier ainsi que de l'équation de la chaleur.

https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF_HTML/node9.html

C'est un cours sur la résolution analytique de l'équation de chaleur en régime instationnaire 1D.

http://dournac.free.fr/info/parallel_heat2d.html#equation

C'est une version MPI du code de résolution numérique de l'équation de chaleur 2D

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/diffusion/diffusion2d/diffusion2d.html>

Equation de diffusion à deux dimensions

Mathématiques/ modélisation :

<https://www.wattco.com/fr/2022/08/conditions-aux-limites-de-la-conduction-thermique/#:~:text=La%20conductivit%C3%A9%20thermique%20du%20corps,impos%C3%A9%20du%20c%C3%B4t%C3%A9%20gauche%2C%20T0.>

C'est un cours sur les conditions aux limites de la conduction thermique. Lors de la résolution de l'équation différentielle, il faut appliquer des conditions aux limites sur le domaine d'analyse pour obtenir une solution. Les trois conditions aux limites les plus courantes sont : la température constante, le flux thermique constant et la convection .

<https://www.thermal-engineering.org/fr/quest-ce-quune-condition-aux-limites-de-dirichlet-condition-aux-limites-de-type-i-definition/>

C'est une définition puis des explications sur la condition aux limites de Dirichlet.

https://energetique.uae.ma/formations/cours_informations/cours/cours_bouardi/cours_conduction/cours_conduction.pdf

C'est un cours sur les transferts de chaleur par conduction en régime permanent. Il aborde les conditions aux limites spacio-temporelles pour la résolution de l'équation de la chaleur p.31,40 (condition initiale, de Dirichlet, de Neumann et de Fourier).

Info :

<https://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/messaoudi-laid/files/equa-chalur.pdf> C'est un écrit sur la résolution de l'équation de chaleur en 1D instationnaire grâce à Maple

https://perso.limsi.fr/wietze/cours/MN/MN_chap4.pdf

Ce sont des explications sur la méthode des différences finies en stationnaire 2D puis en instationnaire 2D.

https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_des_diff%C3%A9rences_finies#:~:text=En%20analyse%20num%C3%A9rique%2C%20la%20m%C3%A9thode,suffisamment%20proches%20les%20uns%20des

Ce sont des explications sur la méthode des différences finies qui est une technique de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. On y trouve des exemples d'approximation d'opérateurs, des explications sur le maillage, le schéma numérique et sa convergence.

<https://stordeux.perso.univ-pau.fr/COURS/AN1.pdf>

C'est un cours sur la méthode des différences finies pour les problèmes aux limites statiques et aux limites d'évolution. On y trouve schéma numérique, approximation, conditions aux limites, ...

https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF_HTML/node11.html

C'est un cours sur la méthode des différences finies qui construit une approximation par différences finies de l'équation de la chaleur.

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/thermo/eqchaleur/eqchaleur.html>

C'est un cours qui introduit l'équation de diffusion thermique puis l'utilise sur deux exemples : conduction dans une plaque et échange thermique entre deux corps. On y trouve des codes informatiques pour chacun des exemples et des graphiques en fonction de x,y sur les échanges entre les corps et le temps de diffusion.

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/thermo/conduction/conduction.html>

C'est un document qui présente des exemples de résolution numérique de l'équation de poisson en régime stationnaire à deux dimensions. On y trouve des programmes python et différents graphiques sur la conduction thermique entre deux plaques et une source thermique dans une enceinte.

https://physique.colin-andre.fr/thermodynamique/diffusion_thermique/resolution_numerique_equation_diffusion.pdf

Résolution numérique cas 2D de l'équation de la chaleur avec programme python

VI. ANNEXES

```

53 var a:real;
54 begin
55 a:=abs(u[i,j,k]-exact(i,j,k));
56 if a >= sup then
57 begin
58 sup := a;
59 io :=i;
60 jo:=j;
61 ko:=k;
62 end
63 end;
64
65 (*debut du corps de programme*)
66 begin
67 io:=0;
68 jo:=0;
69 ko:=0;
70 sup:=0;
71 t:=m/q; {pas de temps}
72 h:=l/o; {pas d'espace x}
73 b:=n/p; {pas d'espace y}
74 r:=2*t*Diff/sqr(h); {r coefficient de stabilite, t represente le pas de temps: t=1/18}
75 if r>0.5 then writeln('le probleme ainsi discretise n'est pas stable','changer les constantes pour que la condition r<=0.5 soit verifiee',r)
76 else
77 begin
78 r:=r/2;
79 for i:=0 to (o) do
80   for j:=0 to (p) do
81     u[i,j,0]:=initial(i,j);{conditions initiales en t=0};
82   for k:=0 to(q-1) do
83     begin
84       for j := 0 to p do
85         begin
86           u[0,j,k+1]:=0; {temperature nulle en x=0};
87           u[o,j,k+1]:=0; {temperature nulle en x=l}
88         end;
89       for i := 0 to o do
90         begin
91           u[i,0,k+1]:=0; {temperature nulle en y=0};
92           u[i,p,k+1]:=0; {temperature nulle en y=n}
93         end;
94       for i:=1 to (o-1) do {i=espace}
95         begin
96           for j := 1 to (p-1) do
97             begin
98               u[i,j,k+1]:=u[i,j,k]+r*(u[i+1,j,k]+u[i-1,j,k]+u[i,j+1,k]+u[i,j-1,k]-4*u[i,j,k])+t*f(i,j,k);
99               supdif(i,j,k+1)
100             end;
101           end;
102       end;
103   écrire;
104   writeln('la difference maximum entre la solution approchée et la solution exacte est',sup,'en',io:4,' ',jo:4,' ',ko:4)
105 end;
106 end.

```

Annexe 1 : Code pascal calculant la différence entre la solution exacte et approchée (partie 1)

```

1 program edpexplicitite;
2
3 const m=0.5;(*longueur de l'espace des temps *)
4 l=1;(*longueur de l'espace des 'x'*)
5 n=1;(*longueur de l'espace des 'y'*)
6 o=3;(*nombre de points de la subdivision de l'espace des 'x'*)
7 p=3; (*nombre de points de la subdivision de l'espace des 'y'*)
8 q=38;(*nombre de points de la subdivision de l'espace temps*)
9 Diff=1; (*coefficient de diffusivité pour le cuivre=0.000113057 m^2/s et pour l'aluminium=0.00009827m^2/s*)
10
11 type
12 valu = array [0..o,0..p,0..q] of real;
13 var
14 i,j,k,io,jo,ko:integer;
15 sup,t,h,b,r:real;
16 u:valu;
17
18 function f(i,j,k:integer):real;(*fonction second membre*)
19 var x,y,z:real;
20 begin
21 x := i*h;
22 y := j*b;
23 z := k*t;
24 f := 0;
25 end;
26
27 function initial(i,j:integer):real;(*donne la valeur de la fonction cherchée en 't=0'*)
28 begin
29 initial := 16*i*h*j*b*(1-(i*h))*(1-(j*b))
30 end;
31
32 function exact(i,j,k:integer):real;
33 begin
34 exact:=(1024*sin(pi*i*h)*sin(pi*j*b))/(pi*pi*pi*pi*pi*pi)
35 end;
36
37 procedure ecrire;
38 var i,j,k:integer;
39 begin
40 for k:=0 to (q) do
41 begin
42   for i:=0 to (o) do
43   begin
44     for j:=0 to (p) do
45       writeln('u(',i:4,',',j:4,',',k:4,')=',u[i,j,k]);
46     end
47   end
48 end;
49
50 procedure supdif(i,j,k:integer);
51 (*cette procédure calcule la différence entre la fonction solution et la solution exacte,
52 au point (ih,jb,kt), et enregistre le maximum de cette différence sur la grille*)
53 var a:real;
54 begin

```

Annexe 2 : Code pascal calculant la différence entre la solution exacte et approchée (partie 2)