

Correction de l'IS de P1-1 du 9 avril 2024

Exercice 1 : Détente de Joule Gay-Lussac

1) On écrit le premier principe de la thermodynamique appliqué au système {compartiment 1 + compartiment 2}: $\Delta U = W + Q$.

Les parois sont calorifugées donc $Q = 0$.

Les parois sont indéformables donc $W = 0$.

On a donc pour ce système $\Delta U = 0$. Par extensivité de l'énergie interne, on peut écrire $\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{vide}}$ et comme l'énergie interne du vide est nulle, on en conclut bien que **l'énergie interne du gaz ne varie pas pendant la transformation.**

$$2) dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

3) Un gaz suit la première loi de Joule si son énergie interne ne dépend que de la température.

$$\text{On en déduit : } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \text{ et donc } dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = C_V dT.$$

4) Un gaz parfait suit la première loi de Joule.

$dU_A = C_V dT \Rightarrow \Delta U_A = C_V \Delta T = 0$. On en déduit que la température d'un gaz parfait ne varie au cours d'une détente de Joule-Gay Lussac, $T_f = T_i = 300 \text{ K}$.

On utilise la loi des gaz parfaits pour trouver la pression : $P_f = \frac{n R T_f}{V_f}$ et on trouve $P_f = 12,5 \text{ bar}$.

5a) Hypothèses du modèle du gaz parfait :

- Les molécules sont assimilables à des points matériels en agitation thermique.
- Les molécules n'interagissent pas entre elles.
- Les chocs sur les parois sont élastiques.

5b) Dans le gaz de Van der Waals, on ne néglige plus les interactions entre les molécules.

Le coefficient a correspond aux **interactions attractives** à moyenne distance. Ces interactions impliquent une diminution des chocs sur les parois (et donc de la pression) par rapport au gaz parfait.

Le coefficient b (covolume) permet de **prendre en compte le volume des molécules** qui ne sont plus considérées comme des points matériels. Cela diminue le volume accessible pour les molécules.

5c) On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz B. Dans l'état initial, il occupe le compartiment 1 et dans l'état final les deux compartiments. On sait que son énergie interne se conserve (question 1) mais son volume double $V_f = 2V_i$.

On a donc $U_f = U_i$.

$$\text{En remplaçant par l'expression de } U, \frac{n R}{\gamma - 1} T_f - \frac{a n^2}{V_f} = \frac{n R}{\gamma - 1} T_i - \frac{a n^2}{V_i}.$$

$$\text{On obtient l'expression } a = \frac{R(T_i - T_f)}{n(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right)$$

$$\text{Application numérique : } a = 0,356 \text{ Pa.m}^6.\text{mol}^{-2}$$

Exercice 2 : compressions d'un gaz parfait

1) L'équilibre mécanique du piston s'écrit $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$. Le piston subit son propre poids, la force pressante due à l'atmosphère située sur le piston et la force pressante due au gaz situé sous le piston.

Ainsi on a $-P_0 S \vec{u}_z + P_1 S \vec{u}_z + m \vec{g} = \vec{0}$ où \vec{u}_z est un vecteur unitaire de direction verticale dirigé vers le haut. En projetant cette équation vectorielle sur \vec{u}_z , on obtient $-P_0 S + P_1 S - mg = 0$

et donc finalement $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$

2) Il s'agit d'une **compression** car la pression augmente (on accepte aussi contraction car le volume diminue), **réversible** (ou lente) car de petites masses sont ajoutées successivement et **adiabatique** car les parois et le piston sont calorifugés.

Cette compression est bien réversible car le gaz est constamment à l'équilibre thermodynamique (les masses étant extrêmement petites). Le film de la transformation passé à l'envers est plausible.

3) Il s'agit d'un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible, on peut donc utiliser la loi de Laplace. $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$, ce qui donne $P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma \Leftrightarrow P_1 \cdot (h_1 S)^\gamma = P_2 \cdot (h_2 S)^\gamma$

Ainsi $h_2 = h_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/\gamma}$

Application numérique : $h_2 = 15,0 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{1/1,4}$ on obtient alors $h_2 = 9,14 \text{ cm}$

4) La relation de Laplace s'écrit aussi : $P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$ et donc : $T_2 = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

Application numérique $T_2 = 366 \text{ K}$

5) voir schéma ci-contre

On a bien $W > 0$; ce qui est cohérent car lors d'une compression, le système reçoit un travail.

6) Il s'agit d'une **compression** car la pression augmente (on accepte aussi contraction car le volume diminue), **rapide** car la force est exercée de façon brutale et **adiabatique** car les parois et le piston sont toujours calorifugés.

7) Pour cette transformation adiabatique, on a $Q = 0$

Ce gaz parfait suit la première loi de Joule donc

$$\Delta U = C_V(T_2' - T_1) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2' - T_1)$$

Le travail lors de cette compression à pression extérieure constante

vaut : $W = - \int_1^{2'} P_{ext} dV$ et donc $W = -P_2'(h_2' - h_1)S$, car la pression extérieure est toujours égale à la pression finale du système.

8) En écrivant le premier principe de la thermodynamique, on a $\Delta U = W + Q$, ce qui donne donc la relation

suivante : $\frac{nR}{\gamma - 1}(T_2' - T_1) = -P_2'(h_2' - h_1)S$ avec $P_2' = 2P_1$

9) • Pour la transformation $1 \rightarrow 2$, on a $W = \Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$

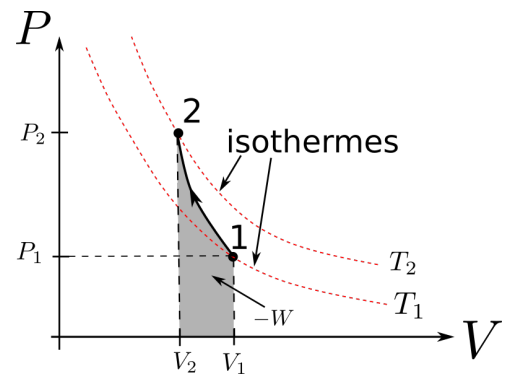
Application numérique : $W = \frac{6,59 \times 10^{-3} \times 8,314}{1,4 - 1}(366 - 300)$ et donc $W = 9,00 \text{ J}$

• De même, pour la transformation $1 \rightarrow 2'$, on a $W' = \Delta U' = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2' - T_1)$

Application numérique : $W' = \frac{6,59 \times 10^{-3} \times 8,314}{1,4 - 1}(386 - 300)$ et donc $W = 11,8 \text{ J}$

On a $W' > W$, la transformation rapide consomme plus de travail ; **le travail n'est pas une fonction d'état**, sa valeur dépend de la nature de la transformation.

10a) La première identité thermodynamique s'écrit : $dU = TdS - PdV$, ce qui donne donc $dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$



Or un gaz parfait suit la première loi de Joule, ainsi on a $dU = C_V dT$ et d'après l'équation d'état, on a $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$, ainsi $dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV$.

Par intégration, on obtient : $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{constante}$, ce qui est bien le résultat attendu.

10b) • Pour la transformation $1 \rightarrow 2$, on a $S^{ech} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_{ext}}$. Or cette transformation est adiabatique, donc

$$S^{ech} = 0.$$

La transformation $1 \rightarrow 2$ étant réversible, on a nécessairement $S^{cr} = 0$ et donc $\Delta S = S^{ech} = 0$

En résumé $\Delta S = S^{ech} = S^{cr} = 0$

Autre raisonnement : Par le calcul, on a $\Delta S = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{h_2}{h_1}$, on trouve exactement (littéralement) $\Delta S = 0$, et donc d'après le deuxième principe de la thermodynamique $S^{cr} = \Delta S - S^{ech} = 0$, la transformation est bien réversible.

• Pour la transformation $1 \rightarrow 2'$, $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2'}{T_1} + nR \ln \frac{h_2'}{h_1}$

Application numérique : $\Delta S = \frac{6,59 \times 10^{-3} \times 8,314}{1,4 - 1} \ln \left(\frac{386}{300} \right) + nR \ln \left(\frac{9,64}{15} \right)$

On trouve $\Delta S = 10,3 \times 10^{-3} \text{ J.K}^{-1}$

Pour la même raison que précédemment, $S^{ech} = 0$.

Ainsi, d'après le deuxième principe de la thermodynamique, $S^{cr} = \Delta S - S^{ech}$ et donc $S^{cr} = 10,3 \times 10^{-3} \text{ J.K}^{-1} > 0$

Cette **transformation rapide est bien irréversible**, ce qui est cohérent.