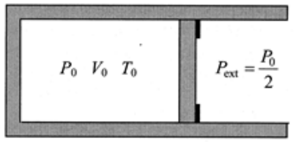
Exercice C4 : Détente d'un gaz parfait

Une quantité n d'un gaz supposé parfait et de coefficient isentropique γ, est enfermé dans un récipient aux parois complètement calorifugées ; l'une des parois est mobile, horizontalement, sans frottement.



Dans l'état initial (figure ci-contre), la paroi est bloquée et le gaz occupe alors un volume V_0 à une température T_0 et à une pression P_0. On débloque alors la paroi mobile et le gaz se détend spontanément, jusqu'à un nouvel état d'équilibre caractérisé par les paramètres V_1, T_1 et P_1. La pression de l'air extérieur est constante et égale à $P_{ext} = \frac{P_0}{2}$.

1) Caractériser la transformation subie par le gaz par un nom et au moins deux adjectifs. Justifier vos choix.

2) Déterminer les expressions de P_1, puis V_1 et T_1, en fonction de tout ou partie des données γ, V_0, T_0 et P_0.

3) Vérifier qu'il s'agit bien d'une détente. Le gaz s'est-il réchauffé ou refroidi ?

Correction :

1) Les parois étant calorifugées, la transformation est adiabatique.

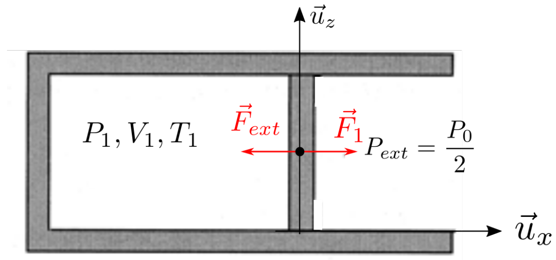
On débloque le piston, la pression P_{ext} passe alors de P_0 à $\dfrac{P_0}{2}$. Le mouvement du piston est donc rapide, la pression ne sera pas définie et uniforme dans le cylindre. On a donc une transformation rapide.

On le démontrera en question suivante, mais la pression finale est $P_1 = P_{ext} = \dfrac{P_0}{2} < P_0$, il s'agit donc d'une détente. Il s'agit également d'une dilatation et d'un refroidissement.

2) On pose $\vec{u}_x$ vecteur unitaire horizontal allant vers la droite et $\vec{u}_z$ vecteur unitaire vertical allant vers le haut (voir schéma). On pose également S la section du piston et m sa masse.

Dans l'état final, faisons le bilan des forces s'exerçant sur le piston :

* Force de pression exercée par l'extérieur : $\vec{F}_{ext} = -P_{ext} S \vec{u}_x$.
* Force de pression exercée par le gaz dans le cylindre : $\vec{F}_1 = P_1 S \vec{u}_x$.
* Poids du piston : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$.
* Réaction normale du support : $\vec{R} = R\vec{u}_z$.
* Frottements : négligeables



état final

D'après le PFD, utilisé dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a : $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_1 + \vec{P} + \vec{R}}$.

Le piston étant immobile, on a $\vec{a} = \vec{0}$.

On projette le PFD sur $\vec{u}_x$, on trouve alors : $0 = -P_{ext}S + P_1 S$.

Donc $P_1 = P_{ext} = \dfrac{P_0}{2}$.

La transformation étant rapide, il n'est pas possible d'utiliser la relation de Laplace, on doit revenir à la formulation générale du premier principe de la thermodynamique. $\Delta U = W + Q = W$ puisque la transformation est adiabatique.

- Au cours de la transformation, on a $P_{ext} = \dfrac{P_0}{2}$ constant.

Donc $\delta W = -P_{ext} dV = -\dfrac{P_0}{2} dV$.

En intégrant, on a $W = -\frac{P_0}{2}(V_1 - V_0)$.

• Le gaz étant un gaz parfait, il suit la première loi de Joule. U ne dépend donc que de T et on a alors $dU = C_V dT$.

En intégrant, on a $\Delta U = C_V(T_1 - T_0)$.

Ainsi, le premier principe devient $C_V(T_1 - T_0) = -\dfrac{P_0}{2}(V_1 - V_0)$.

D'après la relation des gaz parfaits à l'état initial et final, on a $P_0 V_0 = nRT_0$ et $\dfrac{P_0}{2}V_1 = nRT_1$.

On a donc $C_V(T_1 - T_0) = -nRT_1 + \dfrac{1}{2}nRT_0$.

Donc $(C_V + nR)T_1 = (C_V + \frac{1}{2}nR)T_0$.

Or la capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait vaut $C_V = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$.

Donc $\dfrac{\gamma nR}{\gamma - 1}T_1 = \dfrac{(\gamma + 1)nR}{2(\gamma - 1)}T_0$.

Ce qui donne finalement $\boxed{T_1 = \dfrac{\gamma + 1}{2\gamma}T_0}$.

On écrit alors
$V_1 = \dfrac{nRT_1}{P_1} = \dfrac{nR(\gamma + 1)T_0}{2\gamma\frac{P_0}{2}} = \dfrac{nR(\gamma + 1)T_0}{\gamma P_0} = \dfrac{\gamma + 1}{\gamma}\dfrac{nRT_0}{P_0}$.

Finalement $\boxed{V_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma}V_0}$.

3) On a $P_1 = \dfrac{P_0}{2} < P_0$, il s'agit donc d'une détente.

On a $\gamma > 1$, donc $\frac{1}{\gamma} < 1$.

On a donc $\frac{\gamma+1}{2\gamma} = \frac{1+\frac{1}{\gamma}}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$.

Donc $T_1 < T_0$. Il s'agit donc d'un refroidissement.