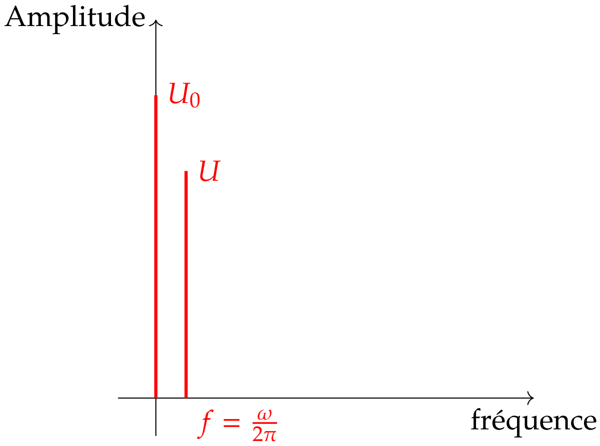
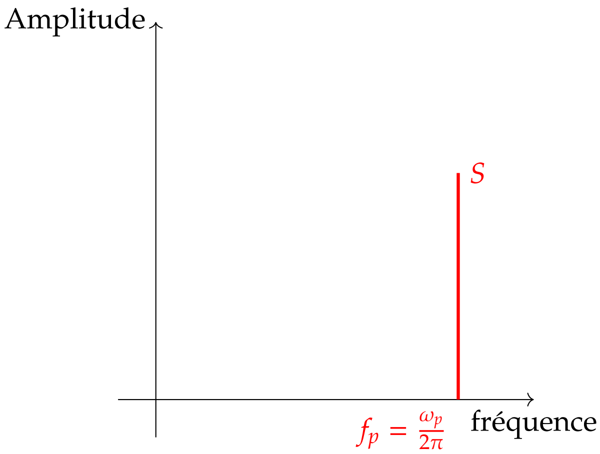
Correction - Exercice C3 - Détection d'un signal

1) $u(t)$ et $s(t)$ sont des signaux sinusoïdaux. Ils n'ont qu'une seule fréquence dans leur spectre.



Spectre de $u(t)$



Spectre de $s(t)$

On a $v(t) = u(t)s(t) = (U_0 + U\cos(\omega t))S\cos(\omega_p t) = U_0\cos(\omega_p t) + U\,S\cos(\omega t)\cos(\omega_p t)$.

En utilisant la relation donnée, on obtient : $v(t) = U_0\,S\cos(\omega_p t) + \frac{U\,S}{2}\Big(\cos((\omega + \omega_p)t) + \cos(\omega_p - \omega)t)\Big)$.

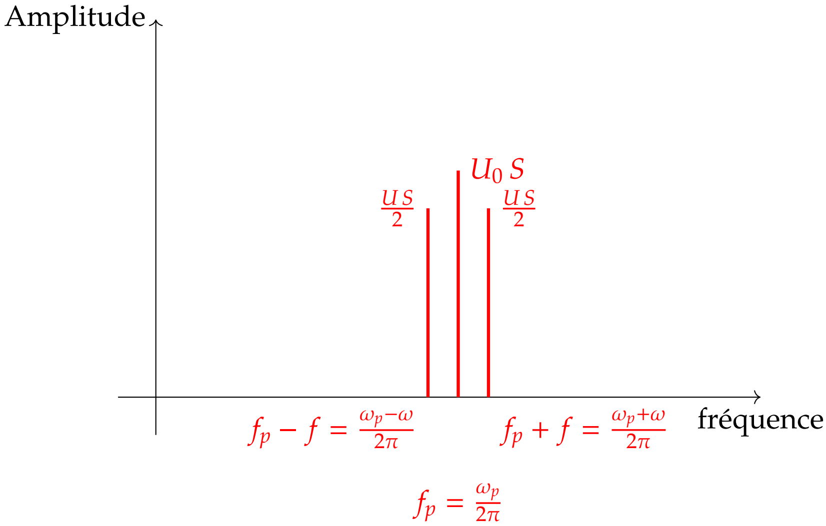
Finalement, $v(t) = U_0\,S\cos(\omega_p t) + \frac{U\,S}{2}\cos((\omega + \omega_p)t) + \frac{U\,S}{2}\cos(\omega_p - \omega)t)$.

2a) Avec la relation donnée, on a

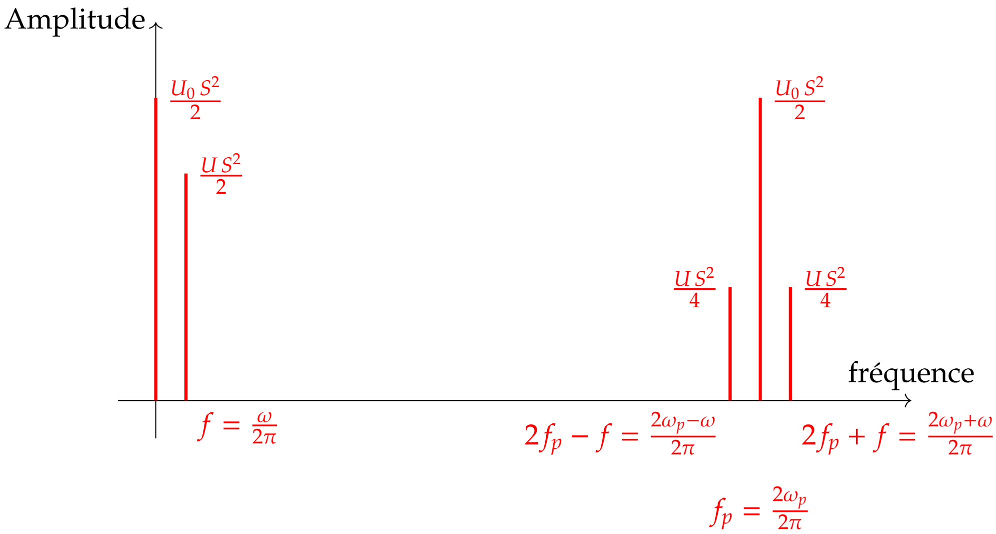
$$y(t) = \left(U_0\,S\cos(\omega_p t) + \frac{U\,S}{2}\cos((\omega + \omega_p)t) + \frac{U\,S}{2}\cos((\omega_p - \omega)t)\right)S\cos(\omega_p t)$$

$$y(t) = \frac{U_0\,S^2}{2}\Big(\cos(2\omega_p t) + 1\Big) + \frac{U\,S^2}{4}\Big(\cos((\omega + 2\omega_p)t) + \cos(\omega t)\Big) + \frac{U\,S^2}{4}\Big(\cos(2\omega_p - \omega)t) + \cos(\omega t)\Big)$$

$$y(t) = \frac{U_0\,S^2}{2} + \frac{U_0\,S^2}{2}\cos(2\omega_p t) + \frac{U\,S^2}{2}\cos(\omega t) + \frac{U\,S^2}{4}\cos((\omega + 2\omega_p)t) + \frac{U\,S^2}{4}\cos(2\omega_p - \omega)t)$$



Spectre de $v(t)$

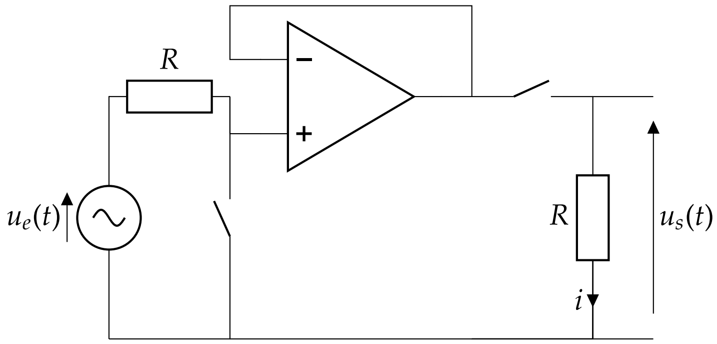


Spectre de $y(t)$

2b) Si on veut récupérer seulement le signal de fréquence ω, il faut utiliser un filtre passe-bande.

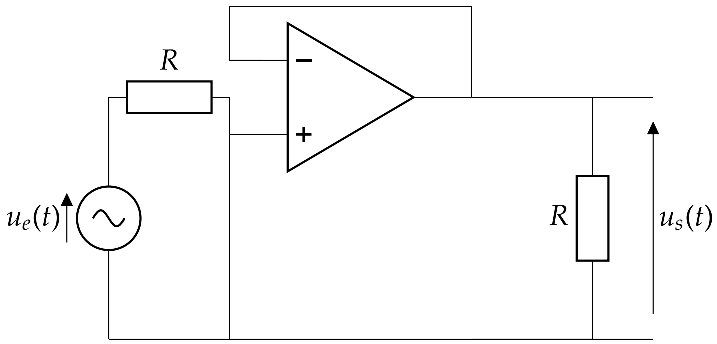
2c) Un filtre passe-bande d'ordre 2 possède deux caractéristiques : sa fréquence propre f_0 et son facteur de qualité Q.
On devra choisir $f_0 = f = 5$ kHz et Q de telles sorte à avoir $\Delta f = \frac{f_0}{Q} < f$. Cela permet d'enlever la valeur moyenne ainsi que les deux hautes fréquences présentes dans le spectre. Ce qui donne $Q > 1$.

3a) On retrace le circuit en remplaçant les condensateurs par leurs équivalents en hautes et basses fréquences.
En basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert :



On a donc un courant nul en sortie, donc $u_s = R\,i = 0$, tension aux bornes de la résistance.

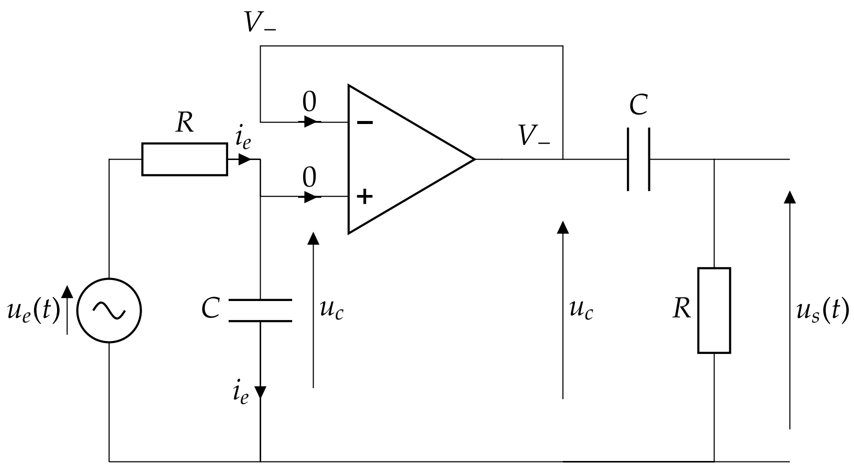
En haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil :



Dans ce cas, on a $V_+ = 0$ et comme $\epsilon = V_+ - V_- = 0$, on a $V_- = 0$ et donc le potentiel en sortie est nul (montage suiveur). On obtient aussi $u_s = 0$.

La tension de sortie est nulle en hautes et basses fréquences. On a bien un filtre passe-bande.

3b)



L'amplificateur est en montage suiveur, on a donc $V_- = V_+ = u_c$.

On a un pont diviseur de tension en sortie : $\underline{u}_s = \dfrac{R}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_c$.

On peut aussi écrire un pont diviseur de tension en entrée (l'intensité entant dans l'AO est nulle) : $\underline{u}_c = \dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_e$.

En combinant les deux, on obtient : $\underline{u}_s = \dfrac{R}{\underline{Z}_C + R}\dfrac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_e$.

En remplaçant avec les expression des impédances complexes, on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R\frac{1}{jC\omega}}{(\frac{1}{jC\omega} + R)^2}$$

On multiplie par $(jC\omega)^2$:

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2}$$

La forme canonique du filtre passe-bande s'écrit : $\underline{H} = \dfrac{A_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} = \dfrac{A_0}{1 + jQx - j\frac{Q}{x}}$.
Pour retrouver cette forme, on développe le dénominateur et on divise par le numérateur.
On obtient :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + 2jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{2 - j\frac{1}{RC\omega} + jRC\omega}$$

Enfin on divise par 2 le numérateur et le dénominateur :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - j\frac{1}{2RC\omega} + j\frac{RC\omega}{2}}$$

On peut maintenant identifier les paramètres : $\boxed{A_0 = \frac{1}{2}}$, $Qx = \frac{RC\omega}{2}$ et $\frac{Q}{x} = \frac{1}{2RC\omega}$.

On multiplie les deux dernières relations pour obtenir $Q^2 = \frac{RC\omega}{2}\frac{1}{2RC\omega} = \frac{1}{4}$, soit $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$.

On en déduit $\omega_0 = \frac{\omega}{x} = \frac{\omega Q}{\frac{RC\omega}{2}} = \frac{\omega \frac{1}{2}}{\frac{RC\omega}{2}}$, soit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$.
Pour l'application demandée, on doit prendre $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 5000 = 3,1.10^4$ rad.s^{-1}.

3c On trace le gain $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2)}}\right)$.

Et le diagramme en phase, $\phi = Arg(|\underline{H}| = -arctan\left(Q(x - \frac{1}{x})\right)$.

Théoriquement, la largeur de la bande passante est $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{5000}{\frac{1}{2}}$=10000 Hz. C'est bien ce qui se retrouve sur le tracé. On a ici un filtre passe-bande peu sélectif.
On trouve bien un maximum $G_{dBmax} = 20log(A_0) = 20log(\frac{1}{2}) = -6$ dB.

3d) On peut bien choisir les valeurs de R et C pour obtenir la valeur de f_0 souhaitée.
En revanche, ce filtre ne permet de faire varier Q qui est toujours égal à $\frac{1}{2}$. Ce filtre ne permet donc pas d'avoir un facteur de qualité supérieur à 1 comme désiré au départ.

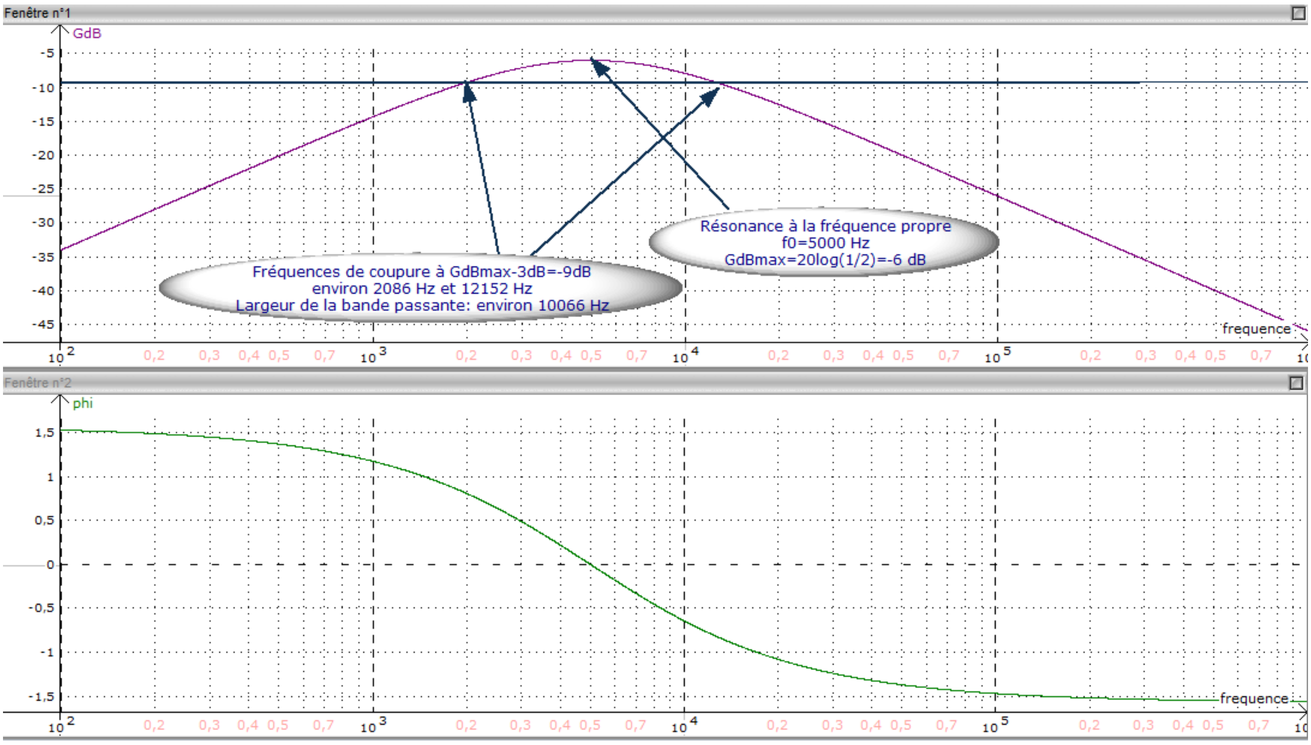


Diagramme de Bode en gain et en phase du filtre