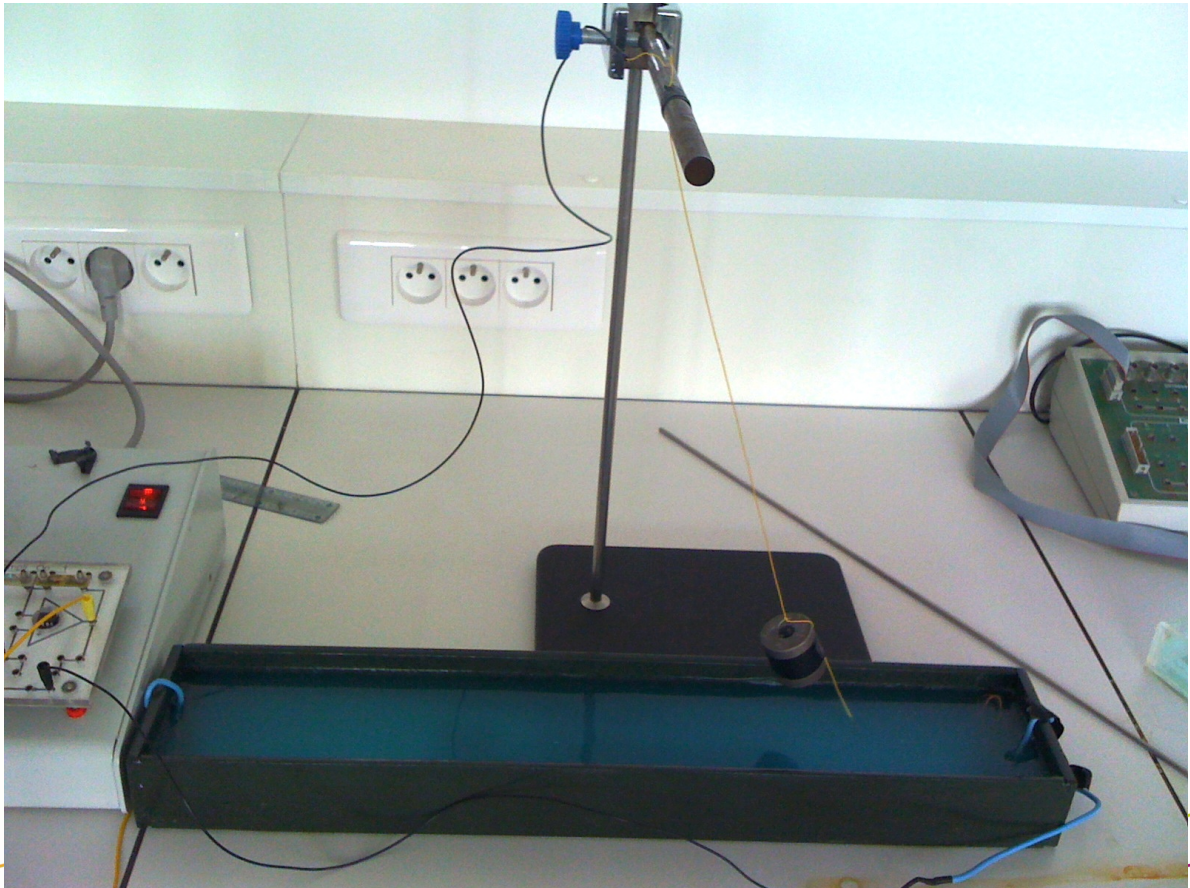


Projet de Physique P6-3
STPI/P6-3/2010 – 047

Étude d'un oscillateur (cas du pendule)



Etudiants :

Zeineb EL HAMMOUMI

Hadrien DEVILLEPOIX

Mohamed KAMOUN

Stéphane HENRIOT

Martial MOISSON

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Cette page est laissée intentionnellement vierge.

Date de remise du rapport : **18/06/2010**

Référence du projet : **STPI/P6-3/2010 – 047**

Intitulé du projet : ***Étude d'un oscillateur (cas du pendule)***

Type de projet : ***Théorique/expérimental***

Objectifs du projet : Étudier les oscillations du pendule simple de manière expérimentale. Étudier l'équation différentielle non linéaire régissant le mouvement du pendule. Avancer un calcul exact de la période du mouvement et proposer des méthodes de résolution numérique par programmation.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.....	5
2. Méthodologie / Organisation du travail.....	5
3. Présentation.....	7
3.1. Qu'est ce qu'un oscillateur mécanique?.....	7
3.2. Le pendule simple.....	7
4. Aspects physique et mathématique théoriques.....	7
4.1. Équation du système pendule.....	7
4.2. Présentation des méthodes numériques.....	13
4.3. Équation de la période du pendule.....	15
5. Aspect Expérimental.....	18
5.1. Explication du montage.....	18
5.2. Expérience.....	19
5.3. Résultats et exploitation.....	19
5.4. Comparaison avec les résultats théoriques.....	20
5.5. Problèmes rencontrés.....	20
6. Aspect informatique.....	20
6.1. Étude du mouvement a l'aide de méthodes numériques.....	20
6.2. Étude de la période en fonction de l'angle initial.....	21
7. Conclusions et perspectives.....	22
8. Bibliographie.....	23

1. INTRODUCTION

L'étude du mouvement d'un pendule remonte pour la première fois à 1657 lors de la conception de la première horloge « à poids » par Huygens. Cela a permis aussi à Richer de montrer en 1671 que la terre était aplatie aux deux pôles, à Borda de mesurer pour la première fois l'accélération de la pesanteur g en 1772, et à Foucault de prouver la rotation de la terre en 1852.

L'étude d'un oscillateur est un projet relativement complet, qui rassemble de la programmation, de l'analyse numérique, de la mécanique mais aussi des mathématiques. Contrairement à l'idée qu'on avait avant d'entamer ce projet portant sur un pendule simple, il s'est avéré que l'étude et la modélisation de son mouvement est beaucoup plus intéressante et peut aller bien loin qu'une simple démonstration faite en TD.

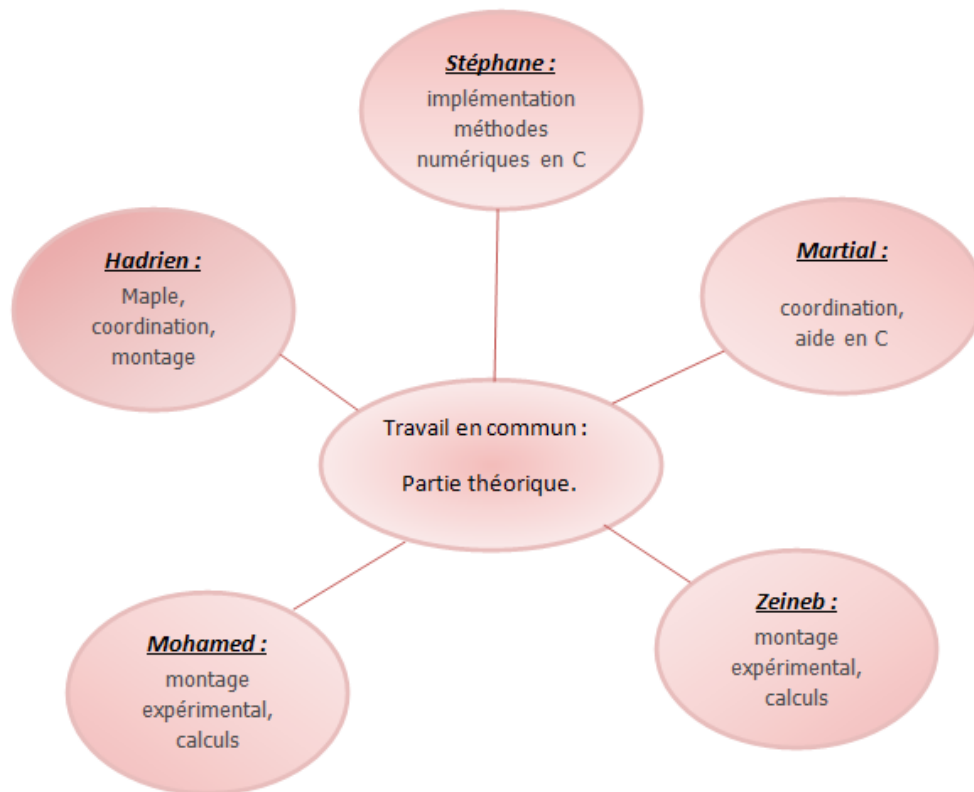
En effet, la plupart de nos séances se sont déroulées dans la salle d'informatique. Lors des deux premières séances, nous avons pris connaissance du sujet. Nous avons beaucoup travaillé sur la théorie, les démonstrations, et la maîtrise des méthodes utilisées. Puis à partir de la troisième séance, nous sommes passés à la pratique en travaillant sur le montage dans la salle de TP de physique. Ensuite on est passé à la partie programmation, qui a pris une grande partie du travail fait.

Le fait qu'on soit dans différentes thématiques a enrichi notre projet, nous étions complémentaires en terme de connaissance et de savoir-faire.

Nous allons dans un premier temps, à travers ce dossier, vous présenter les méthodes et l'organisation du groupe dans le suivi du travail. Ensuite, nous exposerons les généralités liées à l'étude, puis nous expliquerons le fonctionnement d'un pendule. Par la suite, nous nous attacherons à l'aspect mathématique et les méthodes utilisées. Enfin, nous passerons à l'aspect informatique pour modéliser le mouvement du pendule simple avec les langages de programmation : C++, Matlab et Maple.

2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

L'organisation a été dans un premier temps peu précise. En effet, notre sujet n'avait jamais été traité les années précédentes et donc nous ne savions pas dans quelle direction nous orienter. Nous nous sommes retrouvés à travailler tous les cinq au même endroit, à enchaîner la partie théorique avec des calculs de la période et des bilans énergétiques et la partie expérimentale avec deux tentatives de montages. Cette méthode de travail s'est révélée assez contre-productive. Ce qui nous a poussé à répartir convenablement les rôles, et ainsi nous avons formé une équipe de travail cohérente coopérative et surtout efficace. Après quelques séances, nous nous sommes partagé le travail comme l'indique l'organigramme des tâches ci-dessous.



Certains ont privilégié la partie « programmation » qui a été réalisé sur C++, Matlab et Maple, tandis que d'autres suivent le cours de P8 ont préféré la partie « explication physique ».

Durant la réalisation de notre projet, personne ne s'est réellement imposé en tant que chef de projet, chacun a mené sa tâche individuellement ou par groupe de deux. Nous avons aussi su garder un esprit de groupe en s'intéressant aux tâches que les autres effectuaient.

Malheureusement, il y a eu un petit accident qui a fait que notre bac a été cassé, et par conséquent on a pas pu avancer du côté expérimental, qui est resté bloqué sur la mesure de la période pour les petits angles. Par la suite, on a récupéré un nouveau bac (peint par Hadrien) du département Mécanique (le bac était en métal conducteur, ce qui gênait les mesures), et on a pu faire notre expérimentation en entier.

3. PRÉSENTATION

3.1. Qu'est ce qu'un oscillateur mécanique?

Un oscillateur mécanique est un système manifestant un mouvement périodique dans le temps (ou *pseudo-périodique* s'il existe une dissipation d'énergie) autour d'une position d'équilibre.

Exemples : pendule, balançoire, membrane d'un haut parleur, amortisseurs de voiture, diapason ...

3.2. Le pendule simple

3.2.1. Définition

Dans un premier temps, on définit le pendule pesant comme étant un système oscillant en rotation autour d'un axe horizontal ne passant pas par son centre d'inertie (balançoire ou balancier d'une horloge). C'est grâce à la définition du pendule pesant que l'on est en mesure de définir le pendule simple.

En effet, le pendule simple est un cas particulier du pendule pesant. Il est constitué d'un petit solide, suspendue en un point fixe par un fil inextensible de longueur noté L de masse négligeable.

Écarté de sa position d'équilibre, il oscille sous l'action de son poids.

3.2.2. Oscillations libre non amorties

Une oscillation est le trajet du pendule entre deux passages consécutifs par un point dans le même sens. Par ailleurs, les oscillations sont dites libres s'il n'y aucune intervention extérieure. De plus, elle seront dites non amorties si les frottements peuvent être négligés.

Nous verrons plus tard, dans l'aspect expérimental quelles hypothèses ont été retenues pour notre projet.

4. ASPECTS PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE THÉORIQUES

4.1. Équation du système pendule

4.1.1. Étude mécanique

Afin de pouvoir effectuer des comparaisons au niveau expérimental et informatique, il apparaît nécessaire d'avancer des résultats théoriques. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à dégager, dans un premier temps, une approche mécanique du problème. C'est cette approche qui nous est apparue comme la plus naturelle.

4.1.2. Grandeurs caractéristiques

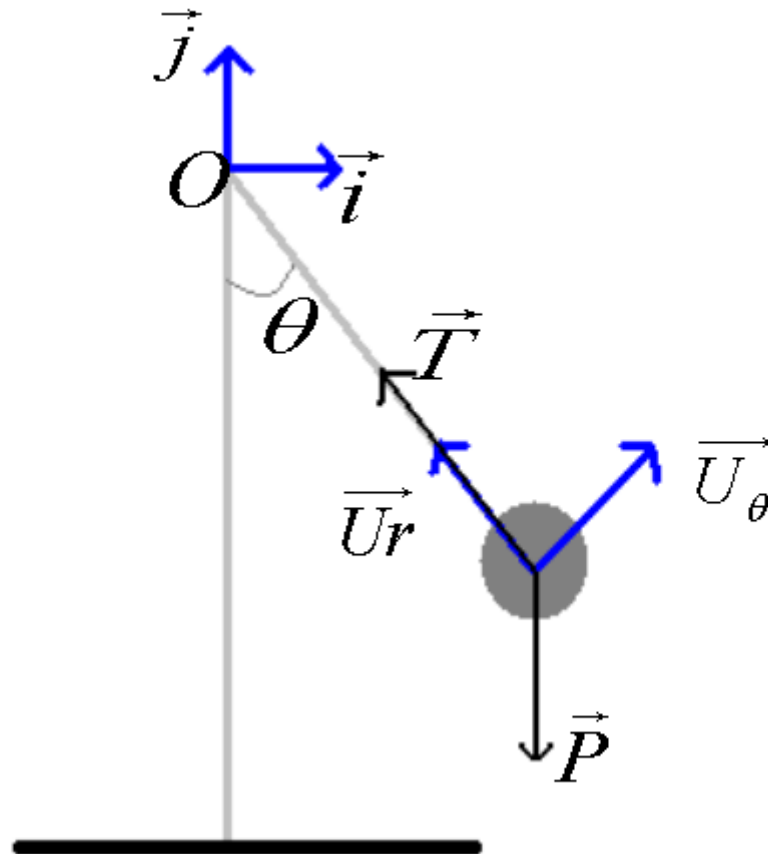


figure 1 :Schéma du pendule simple

Le système est étudié dans un référentiel R supposé Galiléen.

Le système est constitué d'un fil de longueur inextensible L et d'une masse m

La position du pendule est repérée par l'angle orienté θ ou écart à l'équilibre entre la verticale et la direction du fil.

L'amplitude θ_m du mouvement et la valeur maximale de l'angle θ .

L'angle θ varie entre $\pm \theta_m$

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormal.

$(O, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ un repère orthonormal sphérique.

$$\text{On } \vec{U}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$

$$\text{et } \vec{U}_\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

$$\vec{U}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

4.1.3. Étude théorique

Expression de l'accélération dans le repère sphérique :

Soit \underline{a} l'accélération du point matériel M, centre de gravité de la masse :

$$\text{On a : } \underline{OM} = \|\underline{OM}\| \underline{Ur}$$

$$\underline{OM} = L.(\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j})$$

On notera que θ n'est pas constant mais dépend du temps : $\theta = \theta(t)$

$$\underline{v}(M/R) = \frac{d\underline{OM}}{dt} = -\dot{\theta} L \sin\theta \underline{i} + \dot{\theta} L \cos\theta \underline{j}$$

$$\text{et } \underline{a}(M/R) = \frac{d\underline{v}(M/R)}{dt} = -[\ddot{\theta} L \sin\theta \underline{i} + \dot{\theta}^2 L \cos\theta \underline{i}] + [L\ddot{\theta} \cos\theta \underline{j} - L\dot{\theta}^2 \sin\theta \underline{j}]$$

$$\underline{a}(M/R) = -L\dot{\theta}^2 (\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}) + L\ddot{\theta} (-\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j})$$

$$\underline{a}(M/R) = -L\dot{\theta}^2 \underline{Ur} + L\ddot{\theta} \underline{U\theta}$$

Expression du poids dans le repère sphérique :

$$\underline{P} = -mg\underline{i} = mg \cos\theta \underline{Ur} - mg \sin\theta \underline{U\theta}$$

Expression de la tension du fil dans le repère sphérique :

$$\underline{T} = -Ur \cdot \|\underline{T}\|$$

Application de la 2ème loi de Newton :

D'après le principe fondamental de la dynamique on a :

$$\underline{P} + \underline{T} = m.\underline{a}(M/R)$$

$$\text{D'où } mg \cos\theta \underline{Ur} - mg \sin\theta \underline{U\theta} - \underline{Ur} \cdot \|\underline{T}\| = -mL\dot{\theta}^2 \underline{Ur} + mL\ddot{\theta} \underline{U\theta}$$

On obtient donc :

$$mg \cos\theta - T = -mL\dot{\theta}^2$$

$$-mg \sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

Nous ne retiendrons que le deuxième équation car nous ne connaissons pas T :

$$\text{eq 1. } \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Eq 1. n'est pas linéaire.

4.1.4. Mais ou sont Archimède et les frottements?

Dans l'étude faite précédemment, on ne prend en compte ni la poussée d'Archimède ni les frottements. Ces deux forces restent assez limitées quand on se trouve dans l'air, mais elle prennent beaucoup d'important en milieu liquide. C'est pourquoi nous présentons de manière concise une simulation Maple de la position angulaire dans les différents milieux.

Pour simplifier le calcul, on considère la masse comme étant une boule de masse m de rayon r , et le fil infiniment fin, de sorte à ce qu'il n'intervienne pas.

Selon la normale dirigée vers le haut, la poussée d'Archimède est égale à :

$$P_a = \frac{g \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho}{3}$$

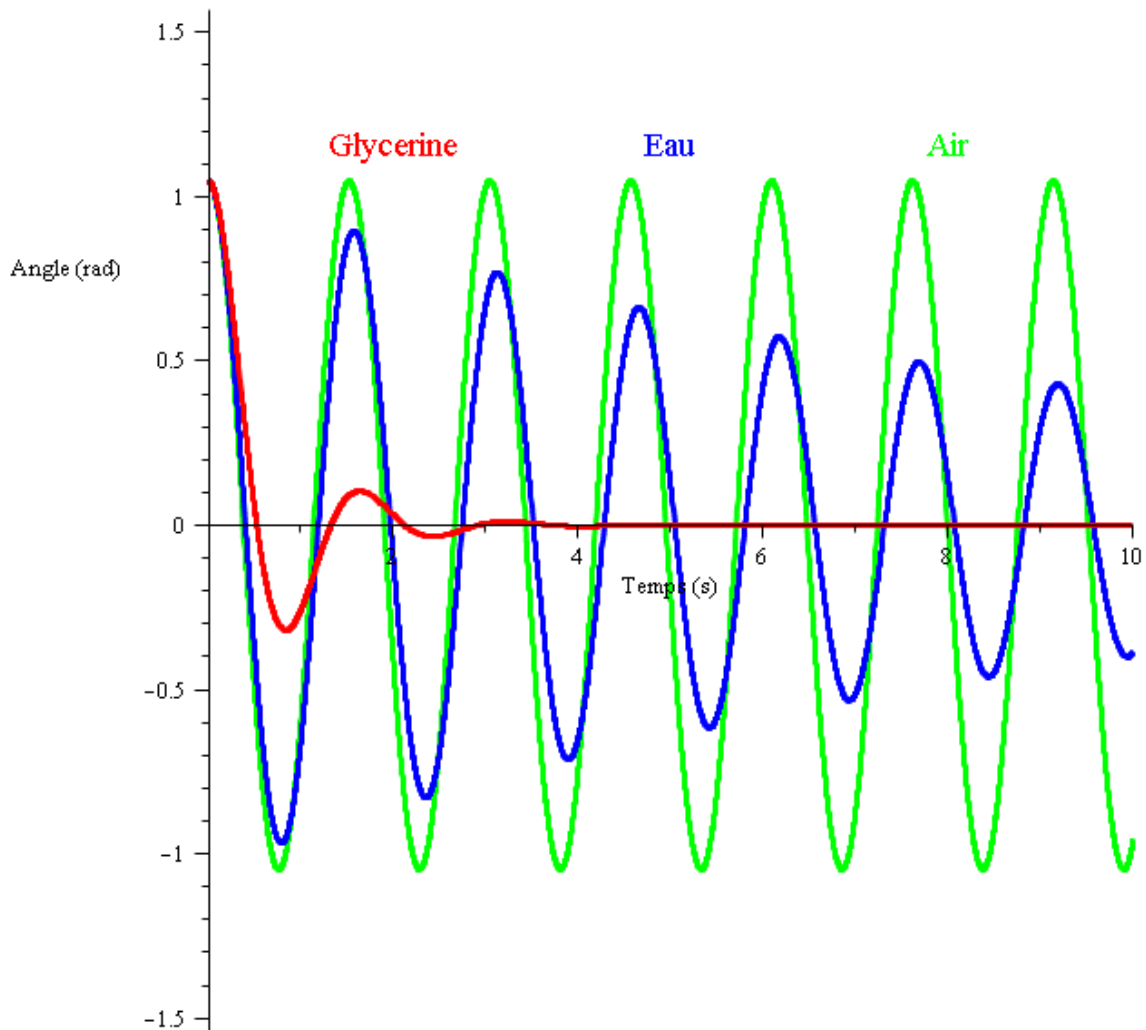
Pour ce qui est des frottements, on se place dans le cas où les frottements sont proportionnels à la vitesse. Stokes nous donne le coefficient pour une boule, μ étant la viscosité dynamique (Pa.s) :

$$F_{\text{Stokes}} = -6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r \cdot \text{vitesseAngulaire}$$

D'après Newton, on obtient :

$$-\frac{m g \sin(\Theta(t))}{l} + \frac{4}{3} g \pi r^3 \rho \sin(\Theta(t)) - 6 \pi \mu r \left(\frac{d}{dt} \Theta(t) \right) = m \left(\frac{d^2}{dt^2} \Theta(t) \right)$$

La bibliothèque DEplot de Maple permet de tracer directement la courbe solution d'une équation différentielle non linéaire :



Position angulaire du pendule dans différents fluides (angle initial = $\pi/3$)

(cf feuille Maple Cas_general_frottements)

4.1.5. Approche simpliste

Quand on commence la mécanique du point, le pendule est un incontournable. Cependant on ne résout l'équation différentielle du mouvement que dans le cas des petits angles. Nous avons tenu à présenter l'approche simplifiée de l'étude du pendule simple car nous pourrions par la suite comparer cette approche première avec les calculs plus généraux et complets. On verra également que la formule de période que l'on va trouver se vérifie bien pour notre premier montage expérimental

Alors:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Ainsi supposons que le système effectue de petites oscillations.

eq 2.
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$$

Eq 2. est maintenant linéaire. Résolvons cette équation différentielle.

$$\text{Notons } \omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Solution homogène (SH):

$$\text{Equation caractéristique : } r^2 + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = -4\omega^4 = (2i\omega^2)^2$$

$$r_1 = i\omega \quad r_2 = -i\omega$$

Forme de la solution (SH) :

$$\lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$$

Solution particulière (SP):

$$\text{à } t=0, \theta(0) = \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta(0) = \lambda_1 \cos(0) \Rightarrow \lambda_1 = \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

On obtient pour la période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ainsi, nous sommes capable de connaître l'amplitude du pendule en fonction du temps. Cependant, cette approche est limité au cas des petites oscillations et constitue une approximation. Nous verrons que nous pourrons améliorer les calculs et même, obtenir des résultats exacts ([cf 6.2](#)).

4.1.6. Problème de Cauchy et unicité des solutions

Posons le changement de variable suivant :

$$\text{eq 3.} \quad \begin{cases} z = \dot{\theta} \\ z' = \ddot{\theta} = f(z, \theta, t) \\ \text{Condition initiale : } z(0) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (non démontré en M5), $f : x \rightarrow \sin x$ est continue sur \mathbb{R} et est localement lipschitzienne en z : alors eq 3. admet une unique solution maximale.

4.2. Présentation des méthodes numériques

4.2.1. Méthode d'Euler

Dans notre cas, l'équation différentielle obtenue (eq 1.) n'est pas linéaire. Même si on est assuré qu'il existe une solution unique (problème de Cauchy-Lipschitz) elle n'est pas exprimable au moyen de fonctions usuelles. Il faut donc passer par des méthodes d'approximation numérique.

La méthode d'Euler est un algorithme permettant de construire une approximation de la solution d'une équation différentielle du premier ordre.

On voit dans un premier temps que eq 2. est une équation différentielle du second ordre. On peut la ramener à une équation différentielle du premier ordre en utilisant l'astuce précédente, c'est à dire en posant :

$$\begin{cases} z = \dot{\theta} \\ z' = \ddot{\theta} = f(z, \theta, t) \\ \text{Condition initiale : } z(0) = 0 \end{cases}$$

On réitère le processus, après n étapes, en reliant les points par des segments de droite, on obtient la courbe d'une fonction, dite affine par morceaux, qui est une approximation de la solution.

Posons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} z = \dot{\theta} \\ z' = \ddot{\theta} = f(z, \theta, t) \\ \text{Condition initiale : } \theta(t_0) = \theta_m \text{ et } z(t_0) = \dot{\theta}(t_0) = z_0 \end{cases}$$

On se donne une constante $h > 0$ (le "pas" de l'algorithme). Si h est suffisamment petit, comme on connaît $\theta(t_0)$ et $z(t_0)$, on connaît donc $\dot{\theta}(t_0)$ et $z'(t_0)$ et on peut faire l'approximation :

$$\begin{cases} \theta(t_0 + h) \approx \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0).h \\ z(t_0 + h) \approx z(t_0) + z'(t_0).h \end{cases}$$

Muni de ces approximations, on pose $t_1 = t_0 + h$ et on est ramené au même système différentiel, avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(t_1) = \theta_m + \dot{\theta}(t_0).h \\ z(t_1) = \dot{\theta}(t_0) + f(\dot{\theta}(t_0), \theta_m, t_0).h \end{cases}$$

A chaque étapes, on a probablement dévié un peu de la solution exacte. Ces erreurs peuvent se cumuler et on peut obtenir une solution approchée qui est très éloignée de la solution exacte. Cependant, cette méthode est relativement efficace (nous le verrons plus tard) à condition de prendre un pas h suffisamment petit (pour assurer la légitimité des

approximations), et de travailler sur un petit intervalle (pour limiter le nombre des approximations).

De plus, il faut garder à l'esprit que même si en théorie, l'erreur d'approximation tend vers 0 si h tend vers 0, on est en fait limité par la précision des calculs faits par la machine, qui doit faire des approximations numériques à chaque itération.

4.2.2. Méthode de Runge Kutta 4

La méthode de Runge Kutta 4 permet d'obtenir une meilleure approximation pour les équations différentielles du premier ordre (ce que l'on a obtenu en dimension 2 grâce au changement de variable opéré).

En effet, si la méthode d'Euler approxime la pente en évaluant la dérivée en un point (espacé de h par rapport à x_n , Runge Kutta permet de mieux épouser la courbe mais est plus lourde en calculs. Le principe est d'évaluer la pente à plusieurs points entre x_n et (x_n+h) , en pondérant de manière plus importante les points médians et en moyennant.

Avec le changement de variable $\theta' = z$, on a $z' = \frac{-g}{l} \sin(\theta)$.

D'où la dérivation vectorielle suivante : $\begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix}' = f(t, \theta, z) = \begin{pmatrix} f_1(t, \theta, z) \\ f_2(t, \theta, z) \end{pmatrix}$

D'après les hypothèses précédentes : $f_1(t, \theta, z) = z$; $f_2(t, \theta, z) = \frac{-g}{l} \sin(\theta)$

Le calcul des coefficients pour la méthode de Runge Kutta 4 donne donc :

$$k_{11} = f_1(\theta_n) = \theta_n$$

$$k_{12} = f_2(z_n) = \frac{-g}{l} \sin(z_n)$$

$$k_{21} = f_1(\theta_n + \frac{1}{2} h * k_{11}) = \theta_n + \frac{1}{2} h * k_{11}$$

$$k_{22} = f_2(z_n + \frac{1}{2} h * k_{12}) = \frac{-g}{l} \sin(z_n + \frac{1}{2} h * k_{12})$$

$$k_{31} = f_1(\theta_n + \frac{1}{2} h * k_{21}) = \theta_n + \frac{1}{2} h * k_{21}$$

$$k_{32} = f_2(z_n + \frac{1}{2} h * k_{22}) = \frac{-g}{l} \sin(z_n + \frac{1}{2} h * k_{22})$$

$$k_{41} = f_1(\theta_n + h * k_{31}) = \theta_n + h * k_{31}$$

$$k_{42} = f_2(z_n + h * k_{32}) = \frac{-g}{l} \sin(z_n + h * k_{32})$$

Et, finalement (moyenne pondérée des 4 coefficients pour approximation de la pente) :

$$z_{(n+1)} = z_n + \frac{h}{6} * (k_{11} + k_{21} + k_{31} + k_{41})$$

$$\theta_{(n+1)} = \theta_n + \frac{h}{6} * (k_{12} + k_{22} + k_{32} + k_{42})$$

4.3. Équation de la période du pendule

Nous avons pu voir grâce à l'étude mécanique du système pendule simple que l'équation différentielle obtenue était non linéaire. Désormais, il est possible d'approcher les solutions de cette équation numériquement notamment grâce à des méthodes plus ou moins performantes.

Dans cette partie, nous souhaitons pouvoir aboutir à des résultats exacts.

4.3.1. Étude énergétique

Procédons à une étude énergétique du pendule simple.

On sait que l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta = -mgL \cos \theta_m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta + mgL \cos \theta_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} mL \dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta_m - mgL \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} (\cos \theta_m - \cos \theta)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \sqrt{2(\cos \theta_m - \cos \theta)} \quad \text{on notera la période propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

On ne tient compte ici que de la valeur positive puisqu'il s'agit d'une vitesse angulaire.

$$\text{On a alors : } \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \sqrt{2(\cos \theta_m - \cos \theta)}$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{(\cos \theta_m - \cos \theta)}}$$

$$\text{or } \cos \theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \omega_0 dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2} \sqrt{\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right)\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 dt = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}}$$

On se rappelle que $(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Soit le changement de variable :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \sin \varphi \text{ avec } k = \sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right)$$

$$\theta = 2\arcsin(k \sin \varphi) \Rightarrow \frac{d\theta}{d\varphi} = 2k \cos \varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

On injecte dans eq2. :

$$\omega_0 dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Lorsque $\theta = 0$, $\varphi = 0$ et lorsque $\theta = \theta_m$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

De plus cette variation de 0 à $\frac{\pi}{2}$ correspond à $\frac{T}{4}$

$$\Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\text{avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ et } K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Cette intégrale est connue comme l'intégrale elliptique complète de 1ère espèce.

$$\text{Soit } |x| = | -k^2 \sin^2 \varphi | = \left| -\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \sin^2 \varphi \right| < 1$$

Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[$ l'intégrale admet le développement en série suivant :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{15}{48} k^6 \sin^6 \varphi + \dots + \frac{(2n-1)(-1)^{n+1}}{2 \cdot n!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi + \dots \right) d\varphi$$

De plus, l'intégrale est bornée et de la forme $\frac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha = -\frac{1}{2} < 1$. L'intégrale est donc convergente et l'intégrale de la série peut s'exprimer comme la série des intégrales :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{3}{8} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{15}{48} k^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \, d\varphi + \dots + \frac{(2n-1)(-1)^{n+1}}{2 \cdot n!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi + \dots \\
 \Rightarrow \frac{T}{T_0} & = \frac{2K(k)}{\pi} = 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{9k^4}{64} + \frac{150k^6}{1536} + \dots \\
 \Leftrightarrow T & = \frac{2K(k)}{\pi} \sqrt{\frac{L}{g}}
 \end{aligned}$$

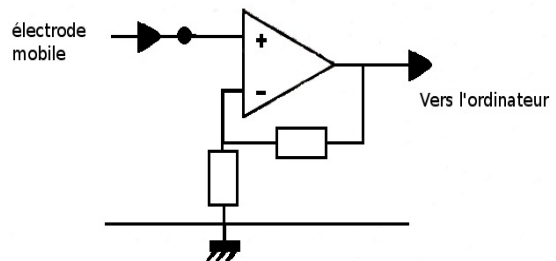
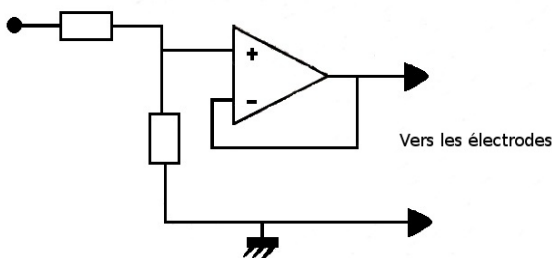
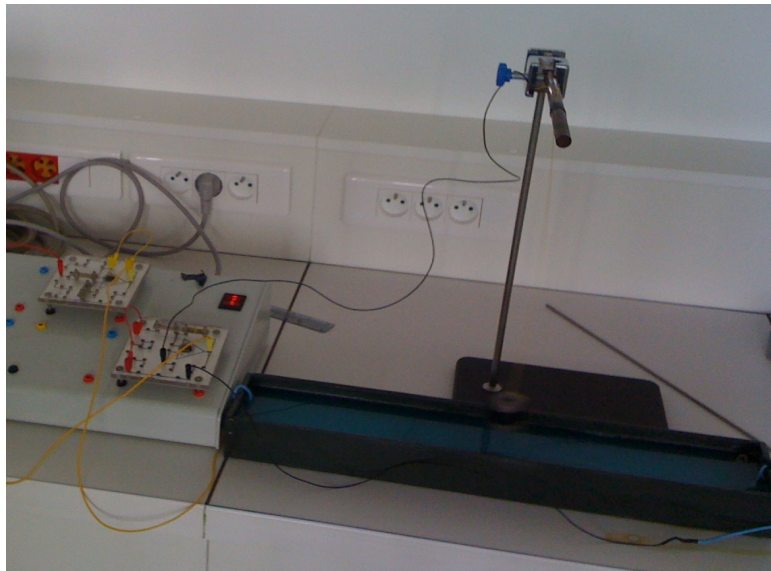
5. ASPECT EXPÉRIMENTAL

5.1. Explication du montage

Le montage a pour objectif de calculer l'angle θ que fait le fil par rapport à la verticale. La mesure de l'angle se fait en utilisant un bac contenant une solution de sulfate de cuivre (20 g/l) avec des électrodes en cuivre. L'électrolyse qui se produit est du type à anode soluble. Il n'y a donc pas création d'une force électromotrice et l'ensemble se comporte comme une résistance pure.

La mesure des angle se fait à l'aide d'un potentiomètre. La variation de l'angle donne lieu à une différence de potentiel entre 0 et 5V.

Le potentiomètre est relié à un convertisseur analogique-digital afin de pouvoir traiter directement les données sur un ordinateur.



5.2. Expérience

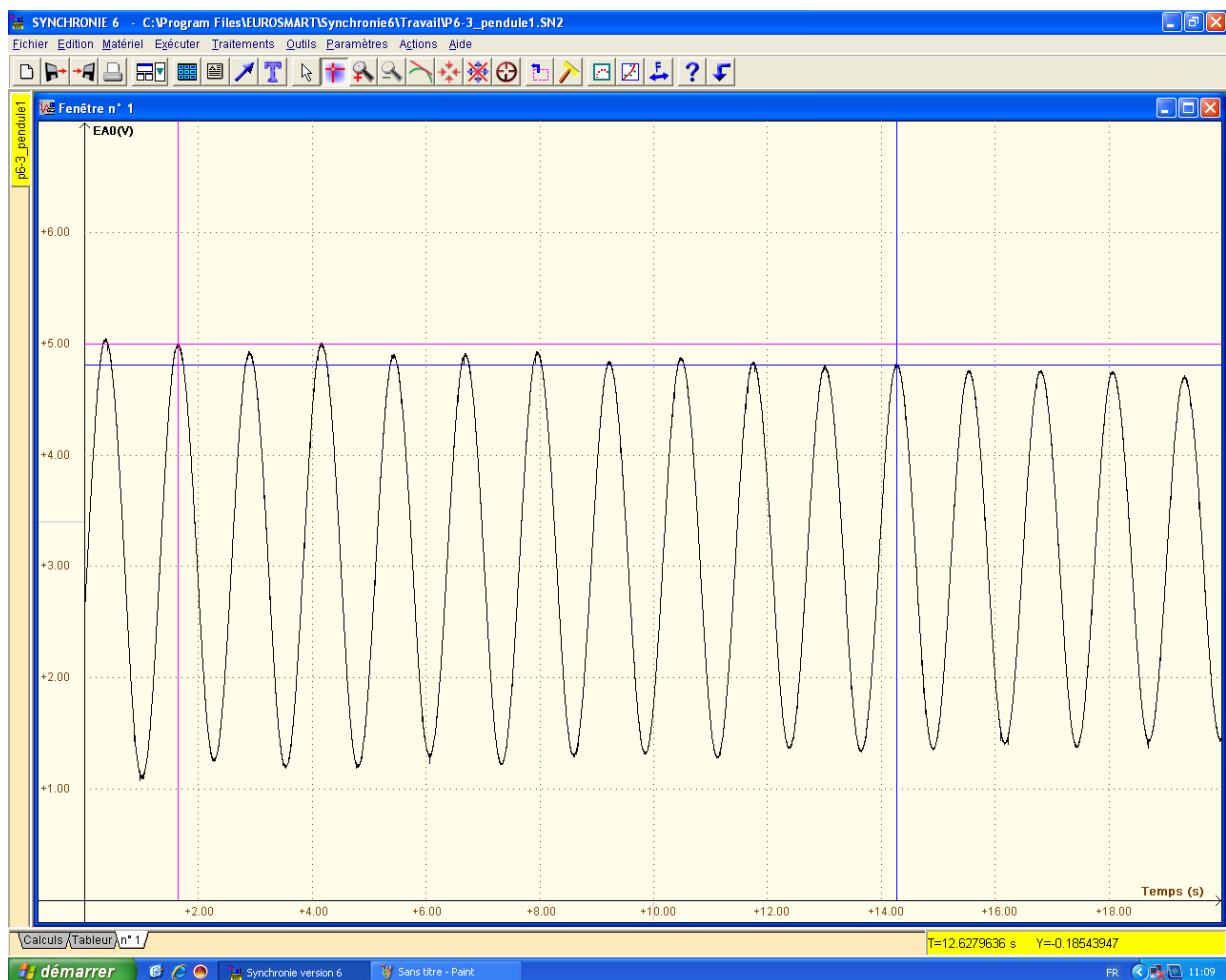
Après avoir connecté le montage à l'ordinateur, on utilise le logiciel Synchronie pour l'exploitation des résultats. Nous avons configuré le logiciel pour 10 secondes d'enregistrement sur 2000 points, avec verticalement 0V à 6V.

On éloigne ensuite la masse de son point d'équilibre et on commence l'acquisition avec synchronie.

Il faut faire attention à ce que le montage évolue convenablement. Le pendule doit osciller dans un plan verticale. Toute perturbation pourrait fausser les résultats.

5.3. Résultats et exploitation

L'expérience donne la courbe suivante :



Pour avoir une valeur qui soit la plus proche de la « vrai » valeur de la période, on prend un intervalle de temps contenant plusieurs périodes et on divise cette valeur par le nombre de périodes. On a pris un intervalle contenant 10 périodes et on a trouvé une valeur de la période de $T=1,26279s$

5.4. Comparaison avec les résultats théoriques

On rappelle que le calcul théorique de la période pour de petits angles donne l'expression suivante : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ l représentant la longueur du fil utilisé, g la constante de pesanteur.

On a utilisé un fil de longueur l=40 cm et on prend g=9,81. Cela nous donne un résultat de T=1.26875s. Si on calcul l'écart-type on trouve une valeur égale à 0.5%.

5.5. Problèmes rencontrés

On a commencé notre expérience avec un petit bac qu'on a du remplacer pour cause de casse. Le nouveau bac étant en métal, l'acquisition ne pouvait pas se faire. La conduction du bac brouillait les résultats. On l'a alors repeint afin d'éliminer ce problème.

En ce qui concerne les grands angles, le pendule dévie de sa trajectoire à cause des frottements. Cette déviation est si importante que l'acquisition nous était impossible.

6. ASPECT INFORMATIQUE

6.1. Étude du mouvement à l'aide de méthodes numériques

6.1.1. En C : Euler et Runge-Kutta 4)

La partie la plus difficile à appréhender au niveau de la programmation est due à la forme mathématique du problème en lui-même. En effet, on s'aperçoit dès les premiers calculs via la méthode d'Euler que le calcul est croisé, le problème posé en dimension 2 doit être calculé pour les 2 composantes à chaque itération, chacune nécessitant l'autre pour l'itération suivante.

En ce qui concerne plus particulièrement Runge Kutta 4, chacun de ces calculs sont encore dédoublés (même quadruplés) puisque chacun des 4 coefficients a lui aussi 2 composantes. Il faut admettre que nous avons eu du mal à distinguer les différents arguments des différentes fonctions apparaissant lors de la dérivation vectorielle et de l'application du calcul des coefficients de Runge Kutta 4.

Cela dit, une fois ces problèmes surmontés, Runge Kutta 4 montre une approche plus proche de la réalité, avec un pas plus petit. En effet, si la méthode d'Euler est stable pour un pas aux environs de $1/10^3$, celle de Runge Kutta ne l'est que depuis un pas de $1/10^4$, et ce avec une précision convenable en $o(h^5)$.

(cf code source C amplitude_pendule)

6.1.2. En Maple : Runge-Kutta Fehlberg 4(5)

Pour résoudre numériquement les équations différentielles, Maple implémente une optimisation de Runge-Kutta 4 : la méthode Fehlberg, couramment appelée RKF45.

C'est impressionnant de voir comment Maple effectue un nombre de calculs gigantesque, tout en gardant une précision donnée.

On a par exemple essayé 10.000 points, repartis sur 10 secondes. Ce calcul a pris moins de 5 secondes à Maple! Et avec un tel calcul, on obtient 15 chiffres significatifs, la méthode

étant en $o(h^5)$. Notons également que Maple est capable de faire du calcul arithmétique exact, ce qui signifie qu'aucune erreur n'est induite par l'encodage des nombres en machine. Les seules erreurs viennent donc de la méthode numérique utilisée, et de la mesure des paramètres (l'accélération due à la gravitation, ou encore la longueur du fil). Un tel nombre de chiffres significatifs n'a donc pas d'utilité sur terre, mais prend son sens en astronautique, où la précision est cruciale (cf feuille Maple RKF45).

6.1.3. Confrontation des résultats C et Maple avec Runge-Kutta

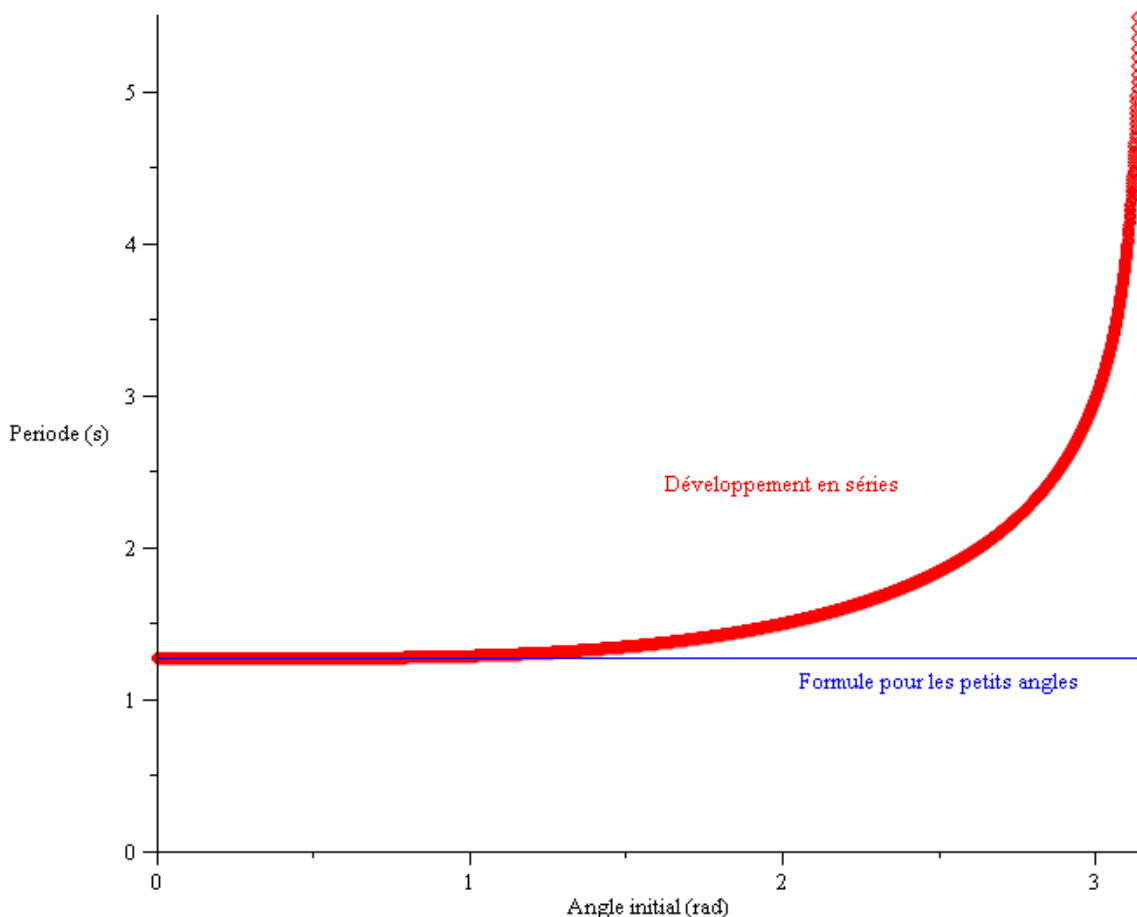
Nous avons lancé notre programme en C pour Runge Kutta 4 et Maple méthode RKF45 avec les mêmes paramètres. Bien que vraisemblables, les calculs en C donnent seulement 2 décimales correctes. Maple permet de faire du calcul arithmétique exact, ce qui fait que l'erreur sur les chiffres ne vient que de l'erreur induite par Runge Kutta.

6.2. Étude de la période en fonction de l'angle initial

Grâce au développement en séries de la période du pendule, on peut tracer la courbe de la période en fonction de l'angle initial.

Si l'on considère que le fil du pendule est rigide, on peut pousser l'angle initial jusqu'à π , et la formule reste vraie!

Les intégrales elliptiques sont intégrées à Maple, il suffit d'une fraction de seconde pour calculer la période pour 5000 angles différents entre 0 et π . En bleu la formule de la période pour les petits angles, cette formule ne peut sérieusement être appliquée que si l'angle initial ne dépasse pas $\pi/6$; en effet à $\pi/3$ elle ne donne plus que 2 bons chiffres (cf feuille Maple Periode_pendule).



7. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce projet nous a montré qu'à partir d'un problème physique d'apparence simple, on pouvait tomber sur des problèmes d'ordres mathématiques assez complexes (développement en séries de la période, problème de non linéarité de l'équation différentielle).

On a donc mis à l'épreuve nos compétences en informatique, que ce soit Maple, le langage C pour les méthodes numériques, et Matlab pour donner un sens graphique aux tableaux de nombres obtenus en C.

Une fois le problème posé et l'orientation définie, les tâches à accomplir se sont réparties de façon naturelle, chacun a travaillé sur ce qu'il faisait le mieux.

Nous ne sommes pas allés très loin dans l'expérimental, on a d'une part manqué de moyens techniques, mais de toute façon ce sujet était plus orienté théorique, plutôt que purement expérimental.

8. BIBLIOGRAPHIE

Sites Web

http://wapedia.mobi/fr/Pendule_simple

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

<http://boumbo.toonywood.org/sandrine/pageperso/agreg/cauchy-lipschitz.pdf>

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/physique/divers/MethodNum/Schw-doc/RK4_02.pdf

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

http://www.math.jussieu.fr/~chenhuayi/enseignement/2009_2010/projet.pdf

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

<http://montblancsciences.free.fr/terms/physique/cours/p15.htm>

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

http://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'_law

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/Index_Oscillat.html

(valide à la date du mercredi 16 juin 2010)

Livre

Kinzel W., Reents G., « Physics by Computer.. Programming Physical Problems Using Mathematica and C », Springer, 1998