Test du Chi 2

Stéphane Canu
stephane.canu@litislab.eu

M8 - Principes du traitement de l'information

June 4, 2019

Plan

1. Il y a t'il une relation entre ces deux variables ?

2. Exemple introductif : test d'une proportion
   - Cadre général
   - Comportement de l'échantillon dans le cas d'une pièce normale
   - La P-valeur
   - L'exemple des médiums

3. Comparaisons de variables qualitatives : les test du χ^2
   - L'exemple des 3 jurys
   - La loi du χ^2
   - Le test du χ^2 d'indépendance

Tests Statistiques : pour quoi faire ?

sur 140 thèses en médecine :

- 118 utilisent une méthode statistique
- 87 présentaient des tests statistiques.
  - 53 tests du χ^2
  - 33 tests de Student.

Le succès de ces 2 tests est dû à la question à laquelle ils répondent :

il y a t'il oui ou non une relation entre ces deux variables ?

- deux variables qualitatives : test du χ^2
  - Les principales maladies sont elles les même à Rouen et à Montpellier ?
- une variable qualitative et l'autre quantitative : Analyse de la variance
  - ces deux variétés ont elles le même rendement ?
- deux variables quantitatives : test de Student
  - y a t'il une relation entre la concentration d'ozone et la température ?

Exemple introductif : test d'une proportion

La question : les hypothèses $\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{la pièce est normale} \\ \mathcal{H}_1 : \text{la pièce est biaisée} \end{cases}$

sur 1000 tirage, j'ai observé :

502 fois pile avec la pièce 1

763 fois pile avec la pièce 2

521 fois pile avec la pièce 3

Exemple introductif : test d'une proportion

La question : les hypothèses

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{la pièce est normale} \\ \mathcal{H}_1 : \text{la pièce est biaisée} \end{cases}$$

Le modèle : observation et reformulation

Afin de pouvoir décider, nous allons observer l'échantillon $X_1, ..., X_n$ i.i.d. de loi parente $\mathcal{B}(p)$ (une loi de Bernouilli de paramètre p).

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{la pièce est normale} & \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2} \\ \mathcal{H}_1 : \text{la pièce est biaisée} & \Leftrightarrow \quad p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Une règle de décision raisonnable est la suivante : si la fréquence de « pile » est proche de $\frac{1}{2}$ nous allons décider la pièce est normale.

Embrouille

Mais même si $p = \frac{1}{2}$, il est toujours possible d'observer n fois pile...

Comment décider raisonnablement dans ce contexte ?

La question est donc de savoir comment contrôler l'erreur

Comment contrôler l'erreur : construire une règle de décision

Definition (règle de décision)

Une fonction de l'ensemble des observations vers celui des décisions

- soit on calcule la probabilité d'observer l'échantillon (en supposant que la pièce est normale). Si cette probabilité est inférieure à un certain seuil (typiquement 0,05) on rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$

- soit on fixe un seuil directement par rapport à la fréquence observée

$$\text{si } \frac{1}{2} - \text{seuil}_{\text{inf}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2} + \text{seuil}_{\text{sup}} \quad \text{on décide } \mathcal{H}_0$$

les seuil sont calculées en se fixant un taux d'erreur

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} - \text{seuil}_{\text{inf}} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{1}{2} + \text{seuil}_{\text{sup}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{\text{L'erreur } \alpha = \mathbb{P}(\text{décider } \mathcal{H}_1 \mid \mathcal{H}_0 \text{ est vraie})}$$

Quelle erreur contrôler ?

Réalités et décisions : 2 possibilités / 2 décisions

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 \text{ : la pièce est normale} \\ \mathcal{H}_1 \text{ : la pièce est biaisée} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{D}_0 \text{ : on décide la pièce est normale} \\ \mathcal{D}_1 \text{ : on décide la pièce est biaisée} \end{cases}$$

Deux types d'erreurs possibles

Quelle erreur contrôler ?

Réalités et décisions : 2 possibilités / 2 décisions

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{H}_0 \text{ : la pièce est normale} \\ \mathcal{H}_1 \text{ : la pièce est biaisée} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{D}_0 \text{ : on décide la pièce est normale} \\ \mathcal{D}_1 \text{ : on décide la pièce est biaisée} \end{array} \right.$$

Deux types d'erreurs possibles

- α ce produit N'est PAS efficace - Mais on décide de le fabriquer

$$\boxed{\alpha = \mathbb{P}(\text{décider } \mathcal{D}_1 \mid \mathcal{H}_0 \text{ est vraie})}$$

  on décide de ne pas soigner quelqu'un de malade

- β ce produit EST efficace - Mais on décide de ne pas le fabriquer

$$\boxed{\beta = \mathbb{P}(\text{décider } \mathcal{D}_0 \mid \mathcal{H}_1 \text{ est vraie})}$$

  on décide de soigner quelqu'un qui n'est pas malade

Remarques sur l'expérience

- la première question est de savoir comment fixer les seuils
  - minimiser un cout : $C_{00}\mathbb{P}(\mathcal{D}_0 \mid \mathcal{H}_0) + C_{01}\alpha + C_{10}\beta + C_{11}\mathbb{P}(\mathcal{D}_1 \mid \mathcal{H}_1)$
    - $\alpha = \mathbb{P}(\mathcal{D}_1 \mid \mathcal{H}_0) = \mathbb{P}(\text{décider } \mathcal{D}_1 \mid \mathcal{H}_0 \text{ est vraie})$
    - C_{01} : le cout associé à la fabrication d'un produit moins efficace
  - contrôler une erreur
    - pour α fixé, on construit une règle qui minimise β
    - le résultat est dit **statistiquement significatif** lorsqu'il est improbable qu'il puisse être obtenu par un simple hasard.

- une autre manière de voir consiste à choisir la taille de l'échantillon n de sorte que l'on puisse garantir une erreur faible
  - pour α et β fixés, on construit une règle qui augmente n si ces erreurs ne sont pas atteintes
  - trois décisions :
    - on décide $\mathcal{D}_0$
    - on décide $\mathcal{D}_1$
    - on décide d'effectuer une nouvelle expérience (on retire une pièce)

La pièce honnête : n tirages

$n = 1$ Il n'est pas raisonnable de décider quoi que ce soit dans ce cas

$n = 2$ trois cas possibles : il semble préférable d'augmenter n.

$n = 3$ quatre cas possibles : il semble toujours préférable d'augmenter n.

$n = 4$ $\mathbb{P}(\text{quatre piles}) = \frac{1}{16}$. si l'on admet comme règle de décision « si j'observe quatre piles ou quatre face je décide que la pièce est biaisée » je vais me tromper une fois sur huit (pour les pièces normales)

$n = 10$ si l'on admet comme règle de décision « si j'observe dix piles ou dix faces je décide que la pièce est biaisée » je vais me tromper une fois sur $2^9 = 512$ (pour les pièces normales). Mais que ce passe t'il si la pièce est biaisée ?

$n = 100$ cent un cas possibles. on décide que la pièce est fausse lorsque le nombre de pile observé en inférieur à k ou supérieur à $n - k$. on fixe k de sorte que $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i < k) = \frac{\alpha}{2}$. Mais que ce passe t'il si la pièce est biaisée ?

$n = 1000$ si la pièce est biaisée, il faut que le biais soit tout petit pour que je ne détecte pas...

La P-valeur

Definition (P-valeur)

la P-valeur de l'échantillon par rapport au test c'est la probabilité de tirer un échantillon encore plus rare que celui observé.

Exemple : si, sur 10 tirages d'un pièce on obtient 2 piles, alors la P-valeur p du test de « loyauté » de la pièce est
$p = \mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(N = 2) + \mathbb{P}(N = 8) + \mathbb{P}(N = 9) + \mathbb{P}(N = 10)$
où N est une v.a. distribuée suivant une loi de bernouilli de paramètre $1/2$.

Plus la P-valeur est petite, moins on aura confiance ne l'hypothèse de loyauté.

Récement, Killeen a proposé une alternative à la P-valeur appelée la P-répétition. Alors que la P-valeur p indique la probabilité que le résultat observé soit du au hasard, la P-répétition estime la probabilité de répéter ce résultat.

$$p_{\mathrm{rep}} = \left(1 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$$

L'exemple des médiums

- Imaginons que nous soumettions 1 024 000 personnes à une expérience de divination.
- Elle doivent lire dans les pensé d'une autre personne la couleur d'une carte (noire ou blanche) que ce dernier vient de tirer au hasard.
- Il y a une forte probabilité que de l'ordre de mille personnes répondent correctement à dix questions successives.
- Si l'on déclare ces mille personnes « médium » et qu'on les soumette à une nouvelle expérience analogue, Il y a une forte probabilité que de l'ordre d'une seule de ces mille personnes réponde correctement.

- Alors on en déduit qu'il y a une proportion de 1 pour 1000 de médium et que lorsque l'on révèle à une personne qu'elle est médium... elle cesse de l'être !

Plan

1. Il y a t'il une relation entre ces deux variables ?

2. Exemple introductif : test d'une proportion
   - Cadre général
   - Comportement de l'échantillon dans le cas d'une pièce normale
   - La P-valeur
   - L'exemple des médiums

3. Comparaisons de variables qualitatives : les test du χ^2
   - L'exemple des 3 jurys
   - La loi du χ^2
   - Le test du χ^2 d'indépendance

L'exemple du maïs

 

	Violet	Jaune
Lisse	135	44
Rugueux	47	14

Peut on estimer raisonnablement que la proportion est de 9 / 3 / 3 / 1 ?

`www.biologycorner.com/myimages/corn-genetics-chi-square/`

L'exemple des 3 jurys

Lors d'un examen national, les résultats des trois jurys ont été les suivants.

	reçu	refusé
Jury 1	50	5
Jury 2	47	14
Jury 3	56	8

Peut on estimer raisonnablement que les trois jurys ont eu le même comportement ou se sont-il comporté de manière différente.

Attention, si l'on estime qu'ils se sont comportés de manière différente, il va falloir refaire l'examen, car il aura été injuste.

Une table de contingence, deux questions possibles

	Violet	Jaune
Lisse	135	44
Rugueux	47	14

	reçu	refusé
Jury 1	50	5
Jury 2	47	14
Jury 3	56	8

Test d'adéquation

La question :

- la proportion de grains observé est elle conforme à la distribution théorique ?

Les variable Qualitatives « jury » et « reçu/refusé » suivent elles la distribution stipulée a priori

Test d'indépendance

La question :

- les jury sont-ils analogues ?

Les variable Qualitatives « jury » et « reçu/refusé » sont elles indépendantes

Les deux tests suivent la même méthodologie : test du χ^2

et ne diffèrent que par des détails

Les trois étapes d'un test : hypothèses, modèle et décision

la question : les jury sont-ils analogues ?

- Hypothèses : choix de l'état de référence $\mathcal{H}_0$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \text{les jurys sont identiques} \\ \mathcal{H}_1 : \text{les jurys sont différents} \end{cases}$$

- Modèle : si les jurys sont identiques alors les variables sont indépendantes $\mathbb{P}(\text{reçu par le jury } 1) = \mathbb{P}(\text{reçu})\mathbb{P}(\text{passer par le jury } 1)$

- Décision :
  - calcul de la $p - valeur$. Si l'on admet l'équivalence des jurys, quelle est la probabilité d'observer un tableau encore plus « différent » que celui qu'on a.
  - Prise de décision : si cette probabilité est faible (typiquement inférieure à $0,05$), on rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$

Le tableau de référence

Comment calculer « la probabilité d'observer un tableau » ?
Pour répondre à cette question, on peut construire un tableau théorique,

O	reçu	refusé	
Jury 1	50	5	55
Jury 2	47	14	61
Jury 3	56	8	64
	153	27	180

T	reçu	refusé	
Jury 1	46,75	8,25	30,56%
Jury 2	51,85	9,15	33,89 %
Jury 3	54,40	9,60	35,56 %
	85 %	15 %	180

Table : Données marginalisées (à gauche : les effectif marginaux sont en gris) et effectifs théoriques sous $\mathcal{H}_0$ (à droite en bleu)

$$\frac{N_{\bullet}j}{n} = \widehat{p}_{\bullet j} \rightarrow \frac{153}{180} = 0,85 \qquad \underbrace{0,85 \times 0,30}_{\widehat{p}_{ij} = \widehat{p}_{i\bullet}\widehat{p}_{\bullet j}} \times 180 = \frac{153 \times 55}{180} = 46,75$$

Comment mesurer la distance

$D(O, T)$ entre le tableau observé (O) et le tableau théorique (T)

Comment mesurer la distance entre les tableaux O et T

Definition (Distance du χ^2)

Soit O un tableau de contingence de I lignes et J colonnes d'effectif total n. Soit T un tableau de probabilité de même dimension. On appelle distance du χ^2 entre les tableaux O et T la quantité

$$D(O,T) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(O_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(N_{ij} - n\,\widehat{p}_{ij})^2}{n\,\widehat{p}_{ij}}$$

O_{ij}	$= N_{ij}$	les effectifs observés
T_{ij}	$= n\,\widehat{p}_{ij}$	les effectifs théoriques sous hypothèse d'indépendance
n		l'effectif total
$\widehat{p}_{ij}$		la probabilité estimée sous hypothèse d'indépendance

Exemple :

$$\begin{aligned}
D(O,T) &= \frac{(50-46{,}75)^2}{46{,}75} + \frac{(5-8{,}25)^2}{8{,}25} + \frac{(47-51{,}85)^2}{51{,}85} + \frac{(14-9{,}15)^2}{9{,}15} + \frac{(56-54{,}40)^2}{54{,}40} + \frac{(8-9{,}60)^2}{9{,}60} \\
&= 0,2259 + 1,2803 + 0,4537 + 2,5708 + 0,0471 + 0,2667 \\
&= 4,84
\end{aligned}$$

Distance du χ^2 est-elle grande ?

$$D(O,T) = 4,84$$

Est-ce Grand ? p-valeur $= \mathbb{P}\big(D(O,T) \geq 4,84\big)$

O	reçu	refusé	
Jury 1	50	5	55
Jury 2	47	14	61
Jury 3	56	8	64
	153	27	180

T	reçu	refusé	
Jury 1	46,75	8,25	30,56%
Jury 2	51,85	9,15	33,89 %
Jury 3	54,40	9,60	35,56 %
	85 %	15 %	180

sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ D est distribué suivant une loi du χ^2 à $(3-1)(2-1) = 2$ degrés de libertés :

$$\boxed{p\text{-valeur} = \mathbb{P}(D \geq 4,84) = 0,0887}$$

On estime à $8,9\%$ la probabilité d'observer un tableau encore plus différent que celui que l'on a. On conclue que la distance n'est pas très grande et que l'on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'indépendance des jurys.

Il est très peu vraisemblable que $D(O,T) = 0$. Autrement dit, des résultats trop loin des prévisions sont mauvais, mais des résultats trop bons ont vraisemblablement été falsifiés...

Plan

La loi du χ^2

Soit $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire normale centrée réduite. Soit $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ un échantillon de n réalisation i.i.d. de cette variable aléatoire.

Definition (La loi du χ^2)

On appelle loi du χ^2 à n degrés de libertés la loi de la variable aléatoire Z_n

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

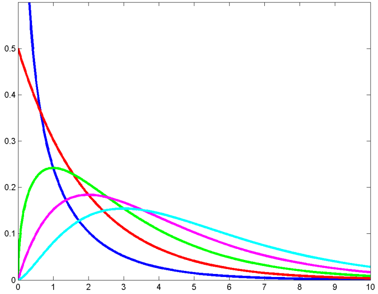

Figure : Exemples de loi du chi 2 pour 1 (bleu), 2 (rouge), 3 (vert), 4 (violet) et 5 (bleu ciel) degrés de liberté

Propriétés et approximation

$$\mathbb{E}(Z_n) = n \qquad \mathrm{Var}(Z_n) = 2n \qquad \mathrm{mode}(Z_n) = n - 2$$

En effet :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} Y_i^2) = n\mathbb{E}(Y^2) = nV(Y) = n$$

Lorsque le nombre de degrés de libertés est important on peut utiliser une approximation asymptotique de la loi du chi 2. Les plus utilisées sont les approximations de Paul Levy et de Fisher :

$$\text{Levy : } \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \to \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{Fisher : } \sqrt{2Z_n} - \sqrt{2n-1} \to \mathcal{N}(0,1)$$

Il existe aussi une loi du chi 2 dite décentrée. C'est la somme de carrés de carrés d'une variable gaussiènne non centrée. Nous ne l'utiliserons pas dans ce cours.

Vitesse de convergence de la loi du χ_2

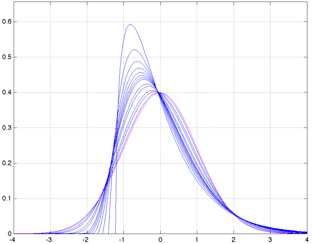

Figure : Exemples de densités d'une variable aléatoire W_n distribuée selon une loi centrée réduite du chi 2 pour $n = 3, 10, 20, 30, 100$ et 1000 degrés de liberté. En rouge on trouve la loi normale centrée réduite.

$$Z_n \sim \chi_n^2 \qquad\qquad W_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}}$$

La convergence est lente. L'approximation normale peut être utilisée pour $n > 30$.

le cas de la moyenne

si $X_1, X_2, ..., X_n$ est un échantillon de n réalisation i.i.d. d'une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et le variance σ^2.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{X}) &= \mathbb{E}(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \mu \qquad = \mu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V(\overline{X}) &= V(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \\ &= \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 \qquad = \tfrac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \qquad \sqrt{n}\frac{(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et

$$n\frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$$

La moyenne se concentre autour de l'espérance si $X_1, X_2, ..., X_n$ est un échantillon de n réalisation i.i.d. d'une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et le variance σ^2.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

puisque $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Il est moins évident c'est de montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ Lorsque l'on remplace le paramètre μ par son estimation $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ on perd un degré de liberté. En effet on a la décomposition suivante :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}}_{\chi_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \underbrace{n \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2}}_{\chi_1^2}$$

Qui permet de conclure en invoquant le théorème de Cochran sur l'additivité des degrés de liberté.

Theorem (Théorème du χ^2 (Pearson))

$$X_i = \frac{N_i - n\,\widehat{p}_i}{\sqrt{n\,\widehat{p}_i}} \qquad \sum_{i=1}^{I} X_i^2 \longrightarrow \chi^2_{I-1}$$

$$X_{ij} = \frac{N_{ij} - n\,\widehat{p}_{ij}}{\sqrt{n\,\widehat{p}_{ij}}} \qquad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}^2 \longrightarrow \chi^2_{(I-1)(J-1)}$$

Eléments de preuve dans le cas d'une variable à $I = 2$ modalités.

dans ce cas on a $n = N_1 + N_2$ et $p_1 + p_2 = 1$ et $N_1 \sim \mathcal{B}(n, p_1)$. Pour des échantillons assez grand on peut accepter une estimation gaussienne

$$\frac{N_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} \sim \chi^2_1$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{(N_1-np_1)^2}{np_1(1-p_1)} &= \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1(1-p_1)}(1-p_1+p_1) \\
&= \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_1-np_1)^2}{n(1-p_1)} \\
&= \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_1-np_1-n+n)^2}{n(1-p_1)} \\
&= \frac{(N_1-np_1)^2}{np_1} + \frac{(N_2-np_2)^2}{n(1-p_1)} \qquad = \sum_{i=1}^{2} \frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}
\end{aligned}$$

□

Mise en œuvre du test du χ^2

1. on construit un tableau de contingence O des observations (2 variables qualitatives de respectivement I et J modalités)
2. on calcule les marginales $p_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} O_{ij}$
3. on calcule pour chaque case du tableau des effectifs théoriques $T_{ij} = np_i p_j$ (en supposant l'indépendance)
4. on calcule la distance du χ^2
$$D(O,T) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(O_{ij} - T_{ij})^2}{T_{ij}}$$
5. on calcule le nombre de degrés de liberté du χ^2 : $d = (I-1)(J-1)$
6. on regarde dans les tables d'une variable aléatoire Z distribué suivant une loi χ^2 à d degrés de liberté la p-valeur de $D(O,T)$
$$pval = \mathbb{P}\big(Z \geq D(O,T)\big)$$
7. on décide qu'on ne peut pas conclure à la dépendance si la p-valeur est supérieure à 0,05, si $pval \geq 0,05$

Conditions d'utilisation du test du χ^2

- des observations tirées au hasard
- des observations indépendantes
- *n* suffisamment grand
- des Effectifs > 5 pour chaque élément du tableau

Conclusion

- La question face à une table de contingence :
  - étant donné une distribution de probabilités ?
    $\rightarrow$ l'exemple du maïs
  - ces deux variables qualitatives sont elles indépendantes ?
    $\rightarrow$ l'exemple des jurys

- La réponse :
  - poser les hypothèses
  - calculer la distance du χ^2 entre la table observé et la table théorique
  - proposer une décision à partir de la p-valeur

- Un test adoubé par la pratique...
  - réputé robuste

- Attention à la décision
  - surtout dans le cas de tests multiples

Repéres bibliographiques

- http://en.wikipedia.org/wiki/Pearson's_chi-square_test
- http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/
- http://www.douillet.info/~douillet/cours/decis/node3.html