

Conduction Thermique



Étudiants :

Lorraine JAZERON
Mathieu BOEDA

Zacharie GUILBAUD
Léo LANDEMAINE

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : 17/06/2023

Référence du projet : STPI/P6/2023 – 17

Intitulé du projet : Conduction thermique

Type de projet : *Modélisation*

Objectifs du projet :

L'objectif de notre projet est d'étudier le phénomène de conduction thermique dans un matériau. Nous avons deux problèmes distincts de conduction à résoudre. Nous devons déterminer la température dans un matériau 2D dans un cas stationnaire puis en 1D instationnaire, c'est-à-dire que la température dépend du temps. Pour cela, on étudie deux méthodes de résolution. La première est une discrétisation de l'équation de la chaleur qui va nous permettre de modéliser simplement l'évolution de la température d'un matériau. La seconde consiste à résoudre analytiquement l'équation de la chaleur et à modéliser la solution numériquement. Notre projet est alors réalisé en salle informatique et encadré par M. Bernard Gleyse.

Mots-clefs du projet : *Discrétisation, simulation, résolution, équation de la chaleur*

Remerciements :

Nous remercions Monsieur Bernard Gleyse de nous avoir accompagné durant la totalité du projet. Nous remercions également l'INSA de Rouen Normandie de nous avoir offert la possibilité d'effectuer un tel projet et le matériel adéquat afin que celui-ci se déroule dans les meilleurs conditions.

Table des matières

Notations	4
Introduction	5
1 Méthodologie, organisation du travail	6
2 Travail réalisé et résultats	7
2.1 Définitions	7
2.2 Résolution numérique	8
2.2.1 2D Stationnaire	8
Description du problème	8
Discrétisation du problème	8
Application numérique	9
2.2.2 1D Instationnaire	10
Cas explicite : Discrétisation du problème	10
Cas implicite : Discrétisation du problème	11
2.3 Résolution analytique	14
2.3.1 2D stationnaire	14
Premier cas : U_0 sur le bord droit	14
Deuxième cas : U_0 sur les bords droit et gauche	16
2.3.2 1D instationnaire	17
Cas homogène	17
Cas non homogène	18
2.4 Comparaison résultats analytique et numérique	19
Conclusion et perspectives	20
Bibliographie	21
A Résultats des codes Python	25
B Code Maple	27

Notations

Conduction : La conduction thermique est un mode de transfert d'énergie dans un milieu qui n'implique pas de déplacement de matière. Elle s'effectue seulement par l'agitation thermique des molécules qui se transmet de proche en proche.

Stationnaire : Un état est dit stationnaire lorsque les grandeurs décrivant notre système ne varient pas en fonction du temps. Dans notre cas, le système est stationnaire lorsque la température n'évolue plus.

Instationnaire : Un état est dit instationnaire lorsque ses grandeurs évoluent au cours du temps.

Condition aux limites de Dirichlet : Ces conditions aux limites se définissent sur un ensemble de point γ tel que $U(\gamma) = \alpha$.

Condition aux limites de Neumann : Ces conditions aux limites se définissent sur un ensemble de point γ tel que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(\gamma) = \beta_i$.

Explicite : Dans un schéma explicite, nous pouvons calculer la température à l'instant n en réalisant l'image de la température à cet instant. Nous avons une fonction $U(n+1) = f[U(n)]$.

Implicite : Dans un schéma implicite, nous pouvons calculer la température à l'instant $n+1$ en résolvant un système linéaire de la température à l'instant n . Nous avons une fonction $U(n) = f[U(n+1)]$.

Introduction

La conduction thermique est un phénomène physique qui explique la diffusion de l'énergie thermique dans un milieu. Nous commencerons par comprendre les équations physiques décrivant ce phénomène. Notre projet reposera sur la résolution de deux problèmes. Pour cela, nous utiliserons des outils informatiques et comprendrons comment les phénomènes physiques continus peuvent être traités par des machines discrètes. Nous tenterons également de résoudre ces problèmes de manière purement mathématique.

Le but principal est de nous introduire aux différentes méthodes de résolution pour une équation donnée. Ainsi, ce projet nous permet d'une part, d'appréhender la discrétisation d'une équation différentielle physique afin de la résoudre à l'ordinateur. Ces méthodes de discrétisation sont très générales et permettent d'étudier un grand nombre d'équations différentielles continues. D'autre part, le projet a également pour objectif de nous familiariser avec les méthodes de résolution analytique et leur modélisation par des logiciels informatiques (type Maple). Dans notre cas précis, ces connaissances nous serviront à résoudre le problème de la conduction thermique au sein d'une barre de métal. Néanmoins, elles peuvent être appliquées à d'autres situations telles que l'étude de la météo ou encore la trajectoire d'un objet. En effet, les applications de ce projet sont très générales.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

Description de l'organisation adoptée pour le déroulement du travail :

Le groupe de quatre étudiants a été divisé en deux groupes de deux. Le premier groupe composé de Léo et Mathieu s'est occupé de la partie de la résolution numérique comprenant la discrétisation de l'équation de la chaleur et de la résolution via des codes de résolution matricielle. Le deuxième groupe composé de Lorraine et Zacharie s'est occupé de résoudre analytiquement l'équation, dans les cas 2D stationnaire et 1D instationnaire. Une modélisation numérique de ce dernier cas a également été effectuée.

Organigramme des tâches réalisées et des étudiants concernés :

Etudiants	Léo Landemaine Mathieu Boeda Lorraine Jazeron Zacharie Guilbaud														
		Noms des étudiants													
Tâches	Noms des étudiants	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14
Initialisation du projet	LL/MB/LJ/ZG	■													
Partie résolution numérique	LL/MB														
Forme matricielle équation de la chaleur 2D Stationnaire	LL/MB/LJ/ZG			■											
Application numérique 2D stationnaire	MB			■											
Forme matricielle equation de la chaleur 1D Explicite	LL			■	■	■	■	■							
Forme matricielle equation de la chaleur 1D Implicite	LL/MB			■	■	■	■	■							
Simulation numérique 2D Stationnaire	LL			■											
Simulation numérique 1D Instationnaire	MB								■	■	■				
Application numérique 1D Instationnaire	LL/MB								■	■	■	■			
Redaction du rapport	LL/MB													■	■
Partie résolution mathématique	LJ/ZG														
Résolution mathématique 1 ^{er} cas 2D stationnaire	LJ/ZG				■	■	■								
Résolution mathématique 2 ^e cas 2D stationnaire	LJ/ZG				■	■	■	■	■						
1D homogène et 1D non-homogène	LJ										■	■	■	■	
Simulation numérique 2 ^e cas 2D stationnaire	ZG										■	■	■	■	
Simulation numérique 1D Instationnaire	LJ/ZG										■	■	■	■	
Redaction du rapport	LJ/ZG													■	■

Chapitre 2

Travail réalisé et résultats

2.1 Définitions

Dans un premier temps il est important de déterminer l'équation régissant nos problèmes. Nous allons utiliser l'équation de la chaleur introduite par Joseph Fourier en 1807. Elle provient de l'expression de la conservation de l'énergie suivante.

$$\Phi_{production} = \Phi_{stockage} + \Phi_{echanges}$$

Dans les deux problèmes que nous traiterons nous avons l'égalité suivante car il n'y a pas de source de chaleur dans nos systèmes :

$$\Phi_{production} = 0$$

Considérant que le système étudié est un solide, les échanges sont uniquement de la conduction. Nous admettons que le solide est homogène et uniforme, ce qui nous permet de dire que :

$$\Phi_{echanges} = \int \int_S \vec{\phi} * \vec{n} = \int \int \int_V div(\vec{\phi}) dV = -k_{tr} div(grad(U)) = \alpha \Delta U$$

avec $\alpha = k_{tr}/\rho C$ le coefficient de diffusivité en $m^2 s^{-1}$ et ΔU le Laplacien de U.
On sait aussi que :

$$\Phi_{stockage} = \rho C \frac{\partial U}{\partial t}$$

On en déduit donc l'équation suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \Delta U$$

En cartésien (en 2D) on retrouve :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$

2.2 Résolution numérique

2.2.1 2D Stationnaire

Description du problème

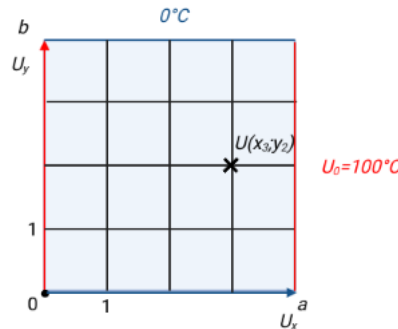


FIGURE 2.1 – Schéma 2D

L'objectif est de résoudre un problème de conduction 2D dans un cas stationnaire. Le système est constitué d'une plaque avec une température U_0 sur les bords droit et gauche. En haut et en bas la température est de 0° . On cherche à déterminer la température sur les maillages intérieurs du système.

Pour cela nous allons approximer le Laplacien de U :

$$\Delta U = f \text{ dans le maillage}$$

Discrétisation du problème

En tout point du maillage (x_i, y_j) , $U(x_i, y_j)$ représente la température avec i variant de 1 à N et j variant de 1 à M .

On introduit le pas de la variable x : h et de y : k on a alors $x_i = ih$ et $y_j = jk$ avec $i \in \{1, \dots, N + 1\}$ et $j \in \{1, \dots, M + 1\}$. $h = \frac{a}{N+1}$ et $k = \frac{b}{M+1}$ avec a et b les longueurs des segments du système.

$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$ on a d'après Taylor Young pour la première variable x :

$$\begin{aligned} (1) \quad U(x_{i+1}, y_j) &= U(x_i, y_j) + h \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \text{erreur}(h^2) \\ (2) \quad U(x_{i-1}, y_j) &= U(x_i, y_j) - h \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \text{erreur}(h^2) \end{aligned}$$

Or on sait que : (3)

$$\Delta U(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, y_j)$$

Donc en sommant (1) et (2) on obtient :

$$(4) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) = [U(x_{i+1}, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_{i-1}, y_j)] \frac{1}{h^2} + \text{erreur}(h^2)$$

De la même façon, on a par rapport à la seconde variable y :

$$(5) \frac{\partial U}{\partial y}(x_i, y_j) = [U(x_i, y_{j+1}) + U(x_i, y_{j-1}) - 2U(x_i, y_j)] \frac{1}{k^2} + \text{erreur}(k^2)$$

En insérant (4) et (5) dans (3) on obtient :

$$(6) f(x_i, y_j) = [U(x_{i+1}, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_{i-1}, y_j)] \frac{1}{h^2} + [U(x_i, y_{j+1}) + U(x_i, y_{j-1}) - 2U(x_i, y_j)] \frac{1}{k^2} + \text{erreur}(h^2) + \text{erreur}(k^2)$$

On suppose maintenant que l'on choisit h et k suffisamment petits pour que $\text{erreur}(h^2)$ et $\text{erreur}(k^2)$ soient négligeables devant $f(x_i, y_j)$. On a $U(x_i, y_j) \approx U_{x,j}$. L'équation de la chaleur discrétisée devient :

$$(7) f_{i,j} = [U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}] \frac{1}{h^2} + [U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}] \frac{1}{k^2}$$

Application numérique

On pose $M = N = 3$ ainsi que $h = k$ donc $a = b = 4$.

Les conditions aux limites sous la forme de condition aux limites de Dirichlet :

$$U(x = 0, [0, b]) = U_0 \neq 0$$

$$U(x = a, [0, b]) = U_0 \neq 0$$

$$U([0, a], y = 0) = 0$$

$$U([0, a], y = b) = 0$$

Si on prend $h = k$ l'équation (7) devient alors :

$$(8) f(i, j) = [U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}] \frac{1}{h^2}$$

On souhaite à présent déterminer une forme matricielle de cette relation.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{pmatrix} + U_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le document fourni, on pose $U_0 = 100^\circ$ ainsi que $f = 0$ car nous sommes dans un état stationnaire et qu'il n'y a aucune production de chaleur.

Grâce à un programme de résolution on obtient les résultats suivants :

$$U_{1,1} = 50^\circ C$$

$$U_{2,1} = 37.5^\circ C$$

$$U_{3,1} = 50^\circ C$$

$$U_{1,2} = 62.5^\circ C$$

$$U_{2,2} = 50^\circ C$$

$$U_{3,2} = 62.5^\circ C$$

$$U_{1,3} = 50^\circ C$$

$$U_{2,3} = 37.5^\circ C$$

$$U_{3,3} = 50^\circ C$$

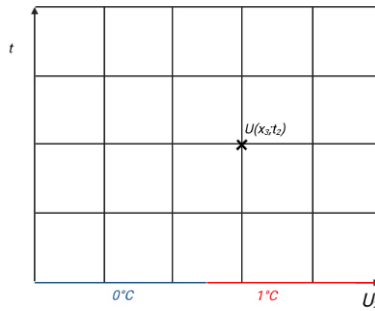


FIGURE 2.2 – Schéma 1D

2.2.2 1D Instationnaire

L'objectif est de résoudre un problème de conduction 1D dans un cas instationnaire. Le système est constitué de 2 barres, isolées latéralement de métal à 2 températures différentes T_0 et T_1 . Les deux cylindres sont mis en contact à $t=0$ et échangent par conduction seulement. La température radiale est supposée uniforme ce qui justifie l'étude en 1 dimension spatiale du système.

Le problème peut se traduire par l'équation suivante, avec α le coefficient de diffusivité :

$$\alpha \Delta U = \frac{\partial U}{\partial t}$$

On peut également se placer dans le repère (O,x) on a alors :

$$(1) \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

Cas explicite : Discrétisation du problème

On se place en un point de coordonnées (x_j, t_n) .

On introduit le pas spatial h et temporel k , on a alors $x_j = jh$ et $t_n = nk$ avec $j \in \{0, 1, \dots, J + 1\}$ et $n \in \{0, 1, \dots, N + 1\}$.

$\forall (j, n) \in \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, N\}$ on a d'après Taylor Young par rapport à x :

$$(2) U(x_{j+1}, t_n) = U(x_j, t_n) + h \frac{\partial U}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \text{erreur}(h^2)$$

$$(3) U(x_{j-1}, t_n) = U(x_j, t_n) - h \frac{\partial U}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_n) + \text{erreur}(h^2)$$

En sommant (2) et (3) on obtient :

$$(4) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_n) = [U(x_{j+1}, t_n) - 2U(x_j, t_n) + U(x_{j-1}, t_n)] \frac{1}{h^2} + \text{erreur}(h^2)$$

De la même façon, on a par rapport à la seconde variable t :

$$(5) \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) = [U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)] \frac{1}{k} + \text{erreur}(k)$$

En insérant (4) et (5) dans (1) on obtient :

$$[U(x_{j+1}, t_n) - 2U(x_j, t_n) + U(x_{j-1}, t_n)] \frac{\alpha}{h^2} = [U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)] \frac{1}{k} + \text{erreur}(h^2) + \text{erreur}(k)$$

On suppose maintenant que l'on choisit h et k suffisamment petits pour que $\text{erreur}(h^2)$ et $\text{erreur}(k)$ soient négligeables devant les autres variables. On a $U(x_j, t_n) \approx U_{j,n}$. L'équation de la chaleur discrétisée devient :

$$[U_{j+1,n} - 2U_{j,n} + U_{j-1,n}] \frac{1}{h^2} = \alpha [U_{j,n+1} - U_{j,n}] \frac{1}{k}$$

Alors :

$$U_{j,n+1} = \frac{\alpha k}{h^2} \left[U_{j+1,n} + U_{j,n} \left(-2 + \frac{h^2}{\alpha k} \right) + U_{j-1,n} \right]$$

On souhaite à présent déterminer une forme matricielle de cette relation.

$$\begin{pmatrix} U_{1,n+1} \\ U_{2,n+1} \\ U_{3,n+1} \\ U_{\dots,n+1} \\ U_{j-2,n+1} \\ U_{j-1,n+1} \\ U_{j,n+1} \end{pmatrix} = -\frac{\alpha k}{h^2} \begin{pmatrix} 2 - \frac{h^2}{\alpha k} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{h^2}{\alpha k} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{h^2}{\alpha k} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{h^2}{\alpha k} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 - \frac{h^2}{\alpha k} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 - \frac{h^2}{\alpha k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,n} \\ U_{2,n} \\ U_{3,n} \\ U_{\dots,n} \\ U_{j-2,n} \\ U_{j-1,n} \\ U_{j,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

Conclusion du cas explicite :

La discrétisation de l'équation de la chaleur dans le cas explicite pourrait permettre grâce à un algorithme de déterminer la température dans un matériau en fonction du temps. Dans la section suivante nous allons rédiger ce code. En modélisant le cas explicite, il est important de vérifier les conditions de stabilité numérique.

Cas implicite : Discrétisation du problème

On se place en un point de coordonnées (x_j, t_{n+1}) .

On introduit le pas spatial h et temporel k on a alors $x_j = jh$ et $t_n = nk$ avec $j \in \{0, 1, \dots, J + 1\}$ et $n \in \{0; 1; \dots N + 1\}$.

$\forall (j, n + 1) \in \{1; \dots; J\} \times \{1, \dots, N\}$ on a d'après Taylor Young par rapport à la première variable x :

$$(2) U(x_{j+1}, t_{n+1}) = U(x_j, t_{n+1}) + h \frac{\partial U}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + erreur(h^2)$$

$$(3) U(x_{j-1}, t_{n+1}) = U(x_j, t_{n+1}) - h \frac{\partial U}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + erreur(h^2)$$

En sommant (2) et (3) on obtient :

$$(4) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) = [U(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2U(x_j, t_{n+1}) + U(x_{j-1}, t_{n+1})] \frac{1}{h^2} + erreur(h^2)$$

De la même façon, on a par rapport à la seconde variable t :

$$(5) \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) = [U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)] \frac{1}{k} + erreur(k)$$

En insérant (4) et (5) dans (1) on obtient :

$$\frac{[U(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2U(x_j, t_{n+1}) + U(x_{j-1}, t_{n+1})] \frac{\alpha}{h^2} = [U(x_j, t_{n+1}) - U(x_j, t_n)] \frac{1}{k} + erreur(h^2) + erreur(k)}$$

On suppose maintenant que l'on choisit h et k suffisamment petit pour que $erreur(h^2)$ et $erreur(k)$ soient négligeables on a $U(x_j, t_n) \approx U_{j,n}$. L'équation de la chaleur discrétisée devient :

$$[U_{j+1,n+1} - 2U_{j,n+1} + U_{j-1,n+1}] \frac{\alpha}{h^2} = [U_{j,n+1} - U_{j,n}] \frac{1}{k}$$

alors

$$U_{j,n} = -\frac{\alpha k}{h^2} \left[U_{j+1,n+1} + U_{j,n+1} \left(-2 - \frac{h^2}{\alpha k}\right) + U_{j-1,n+1} \right]$$

On souhaite à présent déterminer une forme matricielle de cette relation

$$\frac{k\alpha}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 + \frac{h^2}{k\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,n+1} \\ U_{2,n+1} \\ U_{3,n+1} \\ U_{\dots,n+1} \\ U_{j-2,n+1} \\ U_{j-1,n+1} \\ U_{j,n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{1,n} \\ U_{2,n} \\ U_{3,n} \\ U_{\dots,n} \\ U_{j-2,n} \\ U_{j-1,n} \\ U_{j,n} \end{pmatrix} + \frac{k\alpha}{h^2} \begin{pmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

Conclusion du cas implicite :

La discrétisation de l'équation de la chaleur dans le cas implicite pourrait permettre grâce à un algorithme de déterminer la température dans un matériau en fonction du temps. Il faut cependant résoudre un système d'équation. Le cas implicite n'a pas besoin de condition de stabilité pour apporter des résultats. C'est pour cela que nous allons effectuer l'application numérique avec ce cas-ci.

Résolution dans un cas précis :

La barre étant coupé en 5, nous prenons les 4 points à l'intérieur. En utilisant un programme qui résout les systèmes linéaires, on cherche à obtenir un maximum de valeurs à partir de

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi :

$$U_{10} = \begin{pmatrix} 1.2729e - 5 \\ 0.0047 \\ 0.9950 \\ 0.9970 \end{pmatrix} U_{20} = \begin{pmatrix} 4.9391e - 5 \\ 0.0095876 \\ 0.99009 \\ 0.99681 \end{pmatrix} U_{30} = \begin{pmatrix} 1.0979e - 4 \\ 0.014402 \\ 0.98527 \\ 0.99681 \end{pmatrix}$$

Les résultats sont cohérents car nous nous approchons d'un cas stationnaire qui sera atteint au bout d'un certain temps. Les valeurs correspondent avec les programmes python que nous avons utilisé pour vérifier nos valeurs (voir annexe pour les courbes obtenues).

2.3 Résolution analytique

2.3.1 2D stationnaire

Premier cas : U_0 sur le bord droit

L'objectif est de résoudre un problème de conduction 2D dans un cas stationnaire. Le système est constitué d'une plaque avec une température U_0 sur le bord droit. En haut, en bas et à gauche la température est de 0°C . On cherche à déterminer la température exacte à l'intérieur du système.

Pour cela, nous allons calculer le Laplacien de U :
Dans le cas stationnaire, nous avons donc

$$\Delta U = 0$$

ainsi que $(x, y) \in]0; a[\times]0; b[$.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$U(a; y) = U_0; U(x; 0) = 0$$

$$U(0; y) = 0; U(x; b) = 0$$

Pour aider à la résolution du problème, on pose par la méthode des séparations des variables :

$$U(x; y) = g(x)h(y)$$

Ainsi en dérivant, on obtient :

$$g''(x)h(y) + g(x)h''(y) = 0$$

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} = \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h''(x) + \lambda h(x) = 0 \\ g''(x) - \lambda g(x) = 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda > 0$:

• Trouvons $h(y)$:

D'après les conditions initiales :

$$h(0) = h(b) = 0$$

et

$$h(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}y)$$

On a ainsi

$$\alpha = 0$$

et

$$h(y) = \beta \sin(\sqrt{\lambda}y)$$

Or

$$h(b) = \beta \sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$$

$$\Rightarrow n\pi = \sqrt{\lambda}b$$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

On obtient ainsi la fonction propre

$$h(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

• Trouvons maintenant $g(x)$:

On a :

$$g''(x) - \lambda g(x) = 0$$

La forme générale de $g(x)$ est :

$$g(x) = ce^{\sqrt{\lambda}x} + de^{-\sqrt{\lambda}x}$$

D'après les conditions initiales,

$$g(0) = c + d = 0$$

On a ainsi en factorisant

$$g(x) = c(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$$

Finalement on a

$$g(x) = 2c \sinh(\sqrt{\lambda}x) = 2c \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

En regroupant les formules, on trouve :

$$U(x, y) = g(x)h(y) = \sum_{n=1}^k C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

avec C_n le coefficient de Fourier. Plus particulièrement, nous avons :

$$\begin{aligned} U(a, y) &= \sum_{n=1}^k C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &= \sum_{n=1}^k A_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

Or la fonction \sin est impaire et U_0 est constante donc elle peut être prolongé par

$$U(x, y) = U_0 \text{ lorsque } y \in]0; b[\text{ et } x = a$$

$$U(x, y) = -U_0 \text{ lorsque } y \in]-b; 0[\text{ et } x = a$$

On peut donc calculer par résultat de série de Fourier A_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b} \int_0^b U_0 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \\ &= \frac{2U_0}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4U_0 \sinh((2n+1)\frac{\pi}{b}x) \sin((2n+1)\frac{\pi}{b}y)}{(2n+1)\pi \sinh((2n+1)\pi\frac{a}{b})}$$

Deuxième cas : U_0 sur les bords droit et gauche

Ce cas représente les mêmes conditions initiales et aux limites que le cas résolu numériquement précédemment, c'est à dire :

$$\begin{aligned} u(-a; y) &= u(a; y) = u_0 \\ u(x; b) &= u(x; -b) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables on pose : $u(x; y) = g(x)h(y)$

Forme de la solution de $h(y)$:

$$h(y) = \alpha \cos(y\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(y\sqrt{\lambda})$$

Comme $h(b) = h(-b) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad h(b) &= \alpha \cos(b\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(b\sqrt{\lambda}) = 0 \\ (2) \quad h(-b) &= \alpha \cos(-b\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(-b\sqrt{\lambda}) = \alpha \cos(b\sqrt{\lambda}) - \beta \sin(b\sqrt{\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

Par opération on obtient :

$$\begin{aligned} (1)+(2) : 2\alpha \cos(b\sqrt{\lambda}) &= 0 \\ (1)-(2) : 2\beta \sin(b\sqrt{\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\alpha \neq 0$. Donc $\cos(b\sqrt{\lambda}) = 0$. Ainsi $b\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \pi(k + \frac{1}{2})$. On a alors $\lambda = (\frac{\pi}{b}(k + \frac{1}{2}))^2$. Cela implique aussi $\sin(b\sqrt{\lambda}) \neq 0$ et donc $\beta = 0$.

On obtient alors :

$$h(y) = \alpha \cos(y\sqrt{\lambda}) = \alpha \cos(\frac{\pi}{b}(k + \frac{1}{2})y)$$

En prenant la fonction de base telle que $\alpha = 1$, on a :

$$h(y) = \cos(\frac{\pi}{b}(k + \frac{1}{2})y)$$

Forme de la solution de $g(x)$:

$$g(x) = ce^{x\sqrt{\lambda}} + de^{-x\sqrt{\lambda}}$$

On a les 2 équations suivantes :

$$\begin{aligned} g(-a) &= ce^{-a\sqrt{\lambda}} + de^{a\sqrt{\lambda}} = u_0 \\ g(a) &= ce^{a\sqrt{\lambda}} + de^{-a\sqrt{\lambda}} = u_0 \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode que pour le premier cas, on obtient :

$$g(x) = C_n \cosh(x\sqrt{\lambda})$$

On peut exprimer notre fonction initiale :

$$u(x; y) = \sum C_n \cosh(x\sqrt{\lambda}) \cos(\frac{\pi}{b}(k + \frac{1}{2})y)$$

En posant : $A_n = C_n \cosh(x\sqrt{\lambda})$, on a :

$$u(x; y) = \sum A_n \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(k + \frac{1}{2}\right)y\right)$$

On utilise ensuite la condition aux limites $u(a; y) = u_0$, pour trouver A_n :

$$u(a; y) = \sum A_n \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(k + \frac{1}{2}\right)y\right) = u_0, \text{ avec } A_n = C_n \cosh(a\sqrt{\lambda})$$

Or u_0 est une fonction définie sur $[-b; b]$ et constante, on peut donc la prolonger par périodicité en une fonction paire sur \mathbb{R} .

Par l'intermédiaire des séries de Fourier, on a l'expression suivante :

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b u_0 \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(k + \frac{1}{2}\right)y\right) dy$$

$$\text{Après intégration on trouve : } A_n = \frac{2u_0 \sin\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2u_0 \cos(k\pi)}{\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{Donc } C_n = \frac{A_n}{\cosh(a\sqrt{\lambda})} = \frac{2u_0 \cos(k\pi)}{\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \cosh(a\sqrt{\lambda})}$$

On obtient finalement :

$$u(x; y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cosh(x\sqrt{\lambda}) \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2u_0(-1)^n}{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right)} \cosh\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}\left(n + \frac{1}{2}\right)y\right)$$

2.3.2 1D instationnaire

Cas homogène

L'objectif est de résoudre un problème de conduction 1D instationnaire avec des conditions homogènes.

Conditions aux limites :

$$u(0; t) = u(L; t) = 0$$

Condition initiale : $u(x; 0) = f(x) = \chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x)$

Le problème se traduit par l'équation suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on pose : $u(x; y) = g(x)h(y)$

$$\text{On obtient alors : } \frac{g'(t)}{\alpha g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} = \beta$$

Posons $\beta = -k^2$, pour avoir des solutions bornées en x .

$$\text{On a alors : } g'(t) + k^2 \alpha g(t) = 0$$

La solution de $g(t)$ est sous la forme : $g(t) = de^{-k^2 \alpha t}$, où d est une constante arbitraire.

$$\text{On en déduit que } g_n(t) = d_n e^{-k_n^2 \alpha t}.$$

$$\text{On a aussi : } h''(x) + k^2 h(x) = 0$$

La solution de $h(x)$ est sous la forme : $h(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

En utilisant les conditions initiales on a :

$$h(0) = A = 0 \text{ et } h(L) = B \sin(kL) = 0, \text{ d'où } k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

$$\text{Donc } h(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

En prenant la fonction de base telle que $B = 1$, on a $h(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

$$\text{On a alors : } h_n(x) = \sin(k_n x)$$

Alors : $u_n(x; y) = g_n(x)h_n(y) = de^{-k_n^2 \alpha t} \sin(k_n x)$

Par le principe de superposition des solutions on trouve : $u_n(x; y) = \sum C_n e^{-k_n^2 \alpha t} \sin(k_n x)$

On utilise cette fois-ci la condition initiale pour trouver C_n , le coefficient de Fourier :

$$u(x; 0) = f(x) = \sum C_n \sin(k_n x)$$

On prolonge $f(x)$ de $-L$ à 0 en une fonction impaire, puis on la prolonge par périodicité sur $[-L; L]$.

Par l'intermédiaire des séries de Fourier on a : $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx$

Comme $\chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x) = 0$ sauf pour $x \in [\frac{L}{2}; L]$ où $\chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x) = 1$, on peut simplifier l'intégrale :

$$C_n = \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L \sin(k_n x) dx = \frac{2(\cos(n\pi) + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{n\pi}$$

On a finalement :

$$u_n(x; y) = \sum \frac{2(\cos(n\pi) + \cos(\frac{n\pi}{2}))}{n\pi} e^{-k_n^2 \alpha t} \sin(k_n x)$$

Cas non homogène

L'objectif est de résoudre un problème de conduction 1D instationnaire avec cette fois-ci, des conditions non homogènes. Ce cas reprend les mêmes conditions que celles utilisées pour la résolution numérique. Nous pourrions ainsi comparer les 2 solutions.

Conditions aux limites :

$$u(0; t) = u_1$$

$$u(L; t) = u_2$$

Condition initiale : $u(x; 0) = g(x) = \chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x)$

On a l'équation de la chaleur suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

On ne peut pas calculer directement la solution de l'équation, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable pour exprimer $u(x; t)$ en fonction de variable que l'on sait calculer. On pose donc : $u(x; t) = s(x) + v(x; t)$

Avec $s(x)$, la solution pour le cas stationnaire et $v(x; t)$, la solution instationnaire homogène.

Trouvons l'expression de $s(x)$. Nous sommes dans le cas 1D stationnaire donc l'équation est la suivante : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

On a une équation différentielle d'ordre 2 dont la solution est de la forme : $s(x) = ax + b$

On utilise les conditions initiales pour trouver a et b : $s(0) = b = u_1$ et $s(L) = aL + b = u_2$

Ce qui donne : $b = u_1$ et $a = \frac{u_2 - u_1}{L}$

Ainsi, $s(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$

Trouvons maintenant $v(x; t)$. On a posé précédemment : $v(x; t) = u(x; t) - s(x)$.

On obtient alors directement :

$$v(0; t) = 0, v(L; t) = 0 \text{ et } v(x; 0) = u(x; 0) - s(x) = \chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x) - x = g_1(t)$$

Or, on remarque qu'il s'agit d'un système correspondant au cas 1D instationnaire homogène.

D'après le résultat trouvé précédemment, en prenant, $f(x) = g_1(x)$ et comme, $\chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x) = 0$

sauf pour $x \in [\frac{L}{2}; L]$ où $\chi_{[\frac{L}{2}; L]}(x) = 1$, on a :

$$C_n = \frac{2}{L} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} -x \sin(k_n x) dx + \int_{\frac{L}{2}}^L (1-x) \sin(k_n x) dx \right)$$

Après calcul, on trouve $C_n = \frac{2}{n\pi} (\cos(n\pi)(L-1) + \cos(\frac{n\pi}{2}))$

Finalement : $u(x; t) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1 + \sum \frac{2}{n\pi} (\cos(n\pi)(L-1) + \cos(\frac{n\pi}{2})) e^{-k_n^2 \alpha t} \sin(k_n x)$

Nous avons ensuite effectué la résolution de ce cas sur le logiciel Maple (voir annexe), pour $L = 1, \alpha = 0,0001, u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

2.4 Comparaison résultats analytique et numérique

Le cas 1D instationnaire a pu être modélisé pour les deux types de résolutions étudiées. La solution exacte du problème, détaillée précédemment, a été retranscrite sur le logiciel Maple. La solution numérique a elle été modélisée par programme Python. Dans les deux cas, nous avons choisi 4 temps à tracer : 125s, 250s, 375s, 500s. Nous obtenons les 2 courbes suivantes, avec la modélisation analytique à gauche et la modélisation numérique à droite.

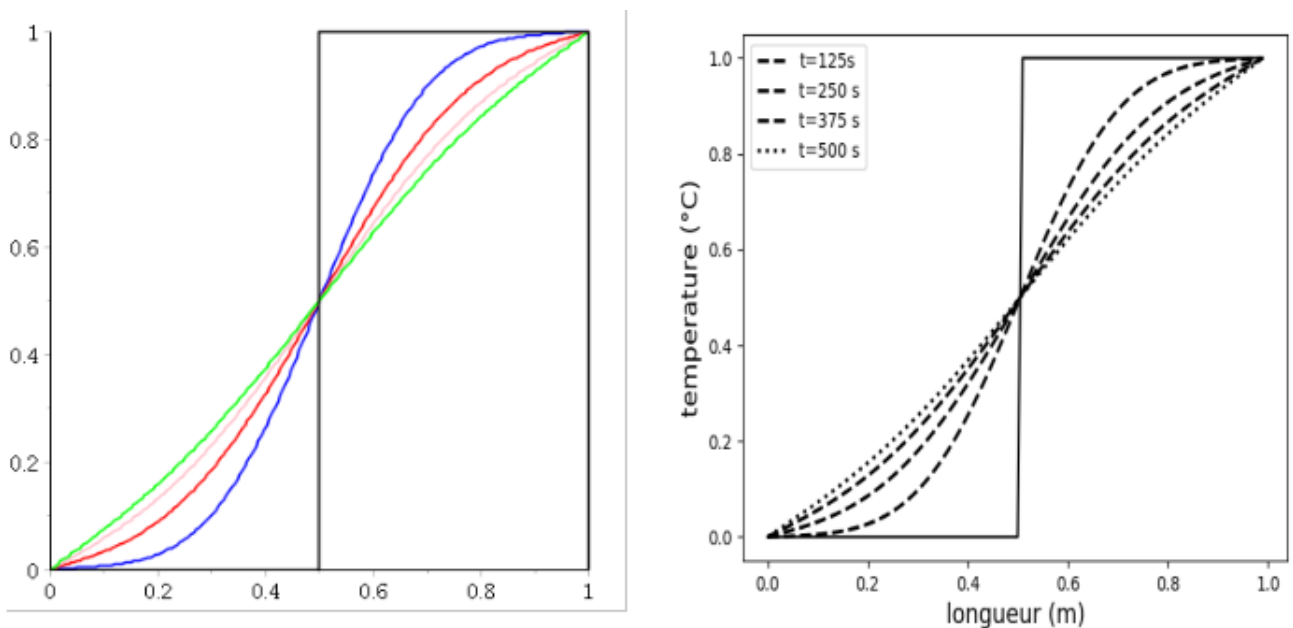


FIGURE 2.3 – Modélisation analytique (gauche) et numérique (droite)

On observe une très forte similitude entre les 2 courbes. Effectivement, la différence de température entre les 2 courbes est indiscernable à l'oeil nu. Cependant, nous pouvons imaginer que des différences de résultats existent, causées par l'approximation dans la méthode de discrétisation. En effet, lors de l'utilisation du développement de Taylor-Young, nous avons admis une marge d'erreur en h et k , et sur les coefficients de la matrice. Même si ces derniers sont négligeables, il en résulte tout de même une différence de précision dans les résultats. Un autre facteur pouvant influencer la précision des résultats est le logiciel utilisé. En effet, en plus de l'approximation faite lors du développement de Taylor-Young, le programme fait des approxiamtions de valeurs lors que les calculs sont faits. Les différences entre les deux résultats peuvent donc être expliquées par ces raisons.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce semestre, nous avons eu l'occasion d'étudier le phénomène de la conduction thermique sous différents aspects. Nous avons ainsi appréhendé la résolution de l'équation de la chaleur par le biais d'une méthode numérique et d'une méthode analytique. Grâce à la modélisation de ces résolutions, nous avons pu les comparer et identifier des axes d'améliorations pour rendre ces résultats plus précis. Cependant, les résultats trouvés avec les deux méthodes semblent cohérents.

D'un point de vue personnel, nous avons développé notre gestion du travail de groupe et de répartition du travail demandé. En fonction des domaines de prédilection de chacun, nous avons attribué les tâches à effectuer afin de les achever dans le temps imparti. De plus, ce projet nous a permis de suivre une démarche de recherche et d'analyse poussée, sur un sujet dont nous n'avions de prime abord, que peu de connaissances. De ce fait, nous avons acquis des compétences dans de nouveaux domaines tels que la modélisation ou les méthodes de résolution d'équations. Nous pourrions réutiliser ces nouvelles aptitudes et l'expérience acquise dans nos projets futurs.

Nous avons identifié une perspective future principale pour ce projet. En effet, après avoir réalisé les calculs théoriques de l'évolution de la température dans une barre de métal, il semble tout naturel d'effectuer les expérimentations en conditions réelles. Cela permettra d'effectuer de nouveau des comparaisons entre la théorie et la pratique afin de confirmer ou d'infirmer les résultats trouvés.

Bibliographie

Phénomène physique

<https://www.techno-science.net/definition/3360.html>

Définition de la conduction thermique

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tat_stationnaire

Explication de ce qu'est un état stationnaire.

<https://www-techniques-ingenieur-fr.ezproxy.normandie-univ.fr/glossaire/conduction-thermique>

Définition de la conduction thermique.

<http://www.universalis-edu.com.ezproxy.normandie-univ.fr/encyclopedie/thermique/>

Bruno CHÉRON, « THERMIQUE », Encyclopædia Universalis [en ligne], consulté le 26 février 2023. URL Article sur la thermique, une discipline de la thermodynamique incluant un paragraphe sur la conduction thermique. Ce dernier comprend un rappel de la relation reliant le gradient thermique et le flux thermique, ainsi que l'équation de la chaleur en régime stationnaire et instationnaire.

<https://f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/thermo/conduction2/conduction2.html>

Document analysant les différents transferts thermiques et plus particulièrement la conduction thermique. Il définit le flux thermique, avec son expression dans la loi de Fourier, ainsi que le coefficient de conductivité. L'équation de la chaleur est développée pas-à-pas avec les conditions limites et initiales. Le phénomène de conduction est appliqué à une et deux plaques en régime stationnaire.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Diffusivit%C3%A9_thermiqueDiff%27rentscoefficientsdediffusivit%27thermique.

Mathématiques

<https://ichi.pro/fr/la-solution-de-l-equation-de-la-chaueur-125090985633>

Résolution de l'équation de la chaleur à 1 dimension. Utilisation de deux méthodes : séparation des variables et transformation de Fourier. La méthode de séparation des variables détaillée pas-à-pas ici, est aussi applicable à notre cas en 2 dimensions comme effectué pendant le cours. Le document mentionne aussi les séries de Fourier.

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR/cours4_eqchal_loc.pdf

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR/cours6_eqchal_resol.pdf

<https://theses.hal.science/tel-00530322/document>

Analyse numérique

<https://team.inria.fr/opale/files/2011/11/Anum.pdf>

Présentations et explications de méthodes de résolutions numériques de systèmes linéaires $AX=b$. Détail des méthodes directes et itératives avec la méthode de Gauss-Seidel. Cette dernière peut être utile dans le cadre de la conduction thermique.

https://physique.colin-andre.fr/thermodynamique/diffusion_thermiqueresolution_numerique_equation_diffusion.pdf

Le travail présenté permet de comprendre qu'il est nécessaire d'utiliser l'équation de la chaleur pour réaliser notre étude de conduction thermique dans un problème bidimensionnel stationnaire. Nous pourrions utiliser l'équation de la chaleur présentée dans le document et dans nos cours de mécanique des fluides si nous étudions un solide. Celle-ci pourra être résolue de façon numérique dans le cas stationnaire en considérant $dT/dt = 0$. Nous aurons $\Delta T = -p/(ro*c*D)$, la fonction f dépendra seulement de x, y et des propriétés du matériau. Nous pourrions donc résoudre analytiquement et numériquement le problème. Nous comprenons que la résolution numérique devient nécessaire dans le cas transitoire. En effet dT/dt est différent de 0. Le travail montre que dans ce cas nous devons discrétiser à la fois l'espace et le temps.

<https://fr.khanacademy.org/science/physique-a-l-ecole/x6e8a541a302cdab5:physique-a-l-ecole-4e-annee-secondaire-1h/x6e8a541a302cdab5:physique-a-l-ecole-4e-1h-chaleur-et-energie-thermique/a/what-is-thermal-conductivity>

Cet article présente le phénomène physique de la conduction thermique. On y retrouve la formule du flux thermique : flux thermique=transfert thermique/durée. Ces valeurs dépendent de la longueur d'onde, de l'épaisseur, de la surface et de la différence de température.

https://femto-physique.fr/physique_statistique/transfert-thermique.php

Dans cet article, les 3 modes de transfert thermique sont présentés : -la conduction qui s'effectue sans déplacement de matière de la partie chaude vers la partie froide -la convection qui est un déplacement collectif de fluide. La matière chaude cède de l'énergie à la matière froide -le rayonnement qui consiste à un déplacement d'onde électromagnétique via des photons.

<https://www.wattco.com/fr/2022/08/conditions-aux-limites-de-la-conductio>

Présentation des conditions aux limites de la conduction thermique permettant de résoudre l'équation différentielle de la conduction thermique en fonction des parois, de la température, du flux, la convection...

https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Analogie_%C3%A9lectrique

Présentation de l'analogie faite entre la conduction thermique et l'électricité. Un système qui résiste à la diffusion de la chaleur peut être assimilé à un circuit électrique. Des notions sont donc équivalentes entre les deux. Une résistance électrique correspond à un matériau qui possède une résistance thermique.

https://www.persee.fr/doc/pharm_0035-2349_1934_num_22_86_10053_t1_0306_0000_1

Document présentant les origines de la conduction thermique. L'erreur faite jusqu'en 1750 était de confondre chaleur et température. Fourier et Rumford ont étudié le pouvoir conducteur de plusieurs corps solides et plus tard en 1860 ont appris à le faire pour des liquides et des gaz.

<https://www.flammarion.eu/uploads/tipesup.pdf>

Exemple de schéma implicite et explicite de la discrétisation de l'équation de la chaleur.

Annexe A

Résultats des codes Python

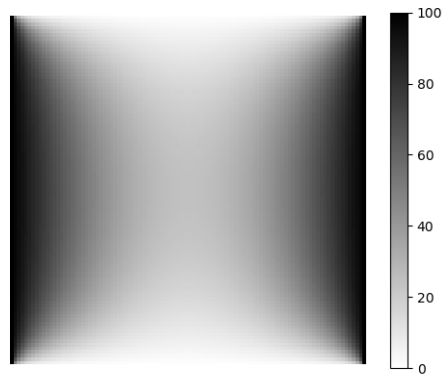


FIGURE A.1 – Répartition de la chaleur dans le cas 2D en niveau de gris

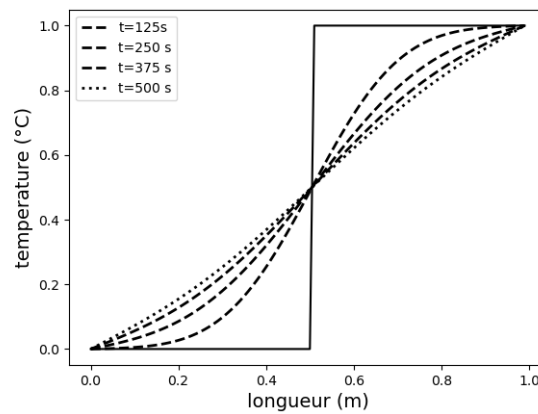


FIGURE A.2 – Superposition de courbes de température cas 1D

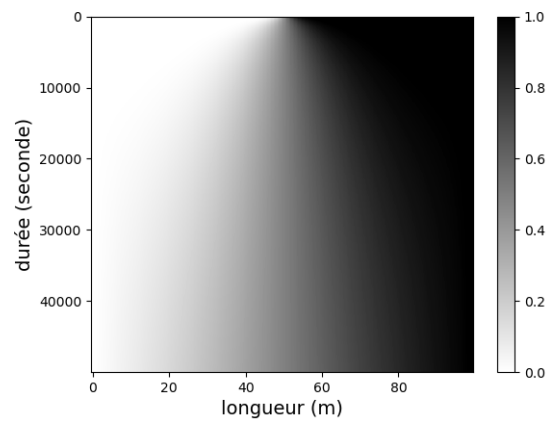


FIGURE A.3 – Répartition de la chaleur dans le cas 1D en niveau de gris

Annexe B

Code Maple

Equation de chaleur 1D

```

L'equation de chaleur pour un dimention est  $U_t = c^2 U_{xx}$ , d'où  $U(x,t)$  est la température dans un bar en point  $x$  et temp  $t$ .
Donc on a  $U(0,t) = 0$  et  $U(\pi,t) = 0$  (condition initiale)
 $U(x,t) = F(x) \cdot G(t) = B_n \sin(nx) \exp(-cn^2 t)$ 
 $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ 
Ceci  $B_n$  est le coefficient de Fourier avec période  $2\pi$ , soit  $c=1$ , on a :
> a := 0.0001; L := 1; assume(n, integer); Bn := (2/L) * (int(-x sin(n*Pi/L * x), x = 0..L/2) + int((1-x) * sin(n*Pi/L * x), x = L/2..L));
                                     a := 0.0001
                                     L := 1
                                     Bn := -cos(1/2 n~ pi) n~ pi + 2 sin(1/2 n~ pi) / n~2 pi^2 + cos(1/2 n~ pi) n~ pi + 2 sin(1/2 n~ pi) / n~2 pi^2
> #Bn := simplify(2/Pi * (int(x sin(n * x), x = 0..Pi/2) + int((Pi - x) sin(n * x), x = Pi/2..Pi)));
> with(plots):
> S := sum(Bn * sin(n*Pi/L * x) * exp(-(n*Pi/L)^2 * a * t), n = 1..5) + x;
                                     S := -0.3183098861 sin(6.283185308 x) e^-0.003947841762 t + 0.1591549430 sin(12.56637062 x) e^-0.01579136705 t + x
> S125 := eval(subs(t = 125, S));
                                     S125 := -0.1943275569 sin(6.283185308 x) + 0.02210839345 sin(12.56637062 x) + x
> S250 := eval(subs(t = 250, S));
                                     S250 := -0.1186365897 sin(6.283185308 x) + 0.003071101985 sin(12.56637062 x) + x
> S375 := eval(subs(t = 375, S));
                                     S375 := -0.07242740369 sin(6.283185308 x) + 0.0004266102560 sin(12.56637062 x) + x
> S500 := eval(subs(t = 500, S));
                                     S500 := -0.04421678692 sin(6.283185308 x) + 0.00005926091402 sin(12.56637062 x) + x
>
> f := piecewise(x < 0, 0, x < L/2, 0, x < L, 1, 0);
                                     f :=
                                     | 0   x < 0
                                     | 0   x < 1/2
                                     | 1   x < 1
                                     | 0   otherwise
> plot({S125, S250, S375, S500, f}, x = 0..L, color = [blue, red, pink, green, black]);

```

FIGURE B.1 – Code Maple : cas 1D instationnaire