

Correction de l'IS de P1-1 du 12 avril 2023

Exercice 1 : gaz parfait ?

1a) L'énergie interne U est une fonction de deux variables T et V , on a donc :

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV$$

1b) La première loi de Joule s'énonce ainsi : l'énergie interne d'un gaz qui suit la première loi de Joule ne dépend que de la température. On a ainsi : $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = 0$

2) On a $dU_{GP} = \frac{5}{2}nRdT$. On a bien $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = 0$. **Un gaz parfait diatomique suit la première loi de Joule.**

3a) On a $\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = nC_{V,m}$ et $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = \frac{n^2a}{V^2}$. On a donc $dU = nC_{V,m} dT + \frac{n^2a}{V^2} dV$

3b) L'énergie interne de ce gaz dépend également du volume, on a $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T \neq 0$, ce gaz ne suit donc pas la première loi de Joule, **il ne se comporte donc pas comme un gaz parfait.**

4) La détente de Joule-Gay Lussac est isoénergétique, c'est à dire $\Delta U = 0$, quelque soit la nature du gaz.

• Pour le gaz parfait (question 2), puisque U ne dépend que de la variable T , $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$, la **détente de Joule Gay Lussac est isotherme pour un gaz parfait.**

• Pour le gaz de la question 3, $\Delta U = 0 \Rightarrow U_f = U_i \Rightarrow nC_{V,m}T_f - \frac{n^2a}{V_f} = nC_{V,m}T_i - \frac{n^2a}{V_i}$ ainsi

$$nC_{V,m}(T_f - T_i) = n^2a \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right) \text{ ce qui donne } \Delta T = \frac{na}{C_{V,m} \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)}$$

$$\text{AN : } \Delta T = \frac{1 \times 0,140}{20,8 \left(\frac{1}{2 \times 10^{-3}} - \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \right)} \text{ et finalement } \Delta T = -3,37 \text{ K}$$

Cette variation de température est mesurable. **Une détente de Joule Gay Lussac permet de vérifier expérimentalement si un gaz suit la première loi de Joule.**

On fait subir une telle détente à un gaz, si on ne mesure pas de variation de température, le gaz suit la première loi de Joule. Si on mesure une diminution de température comme avec le gaz de la question 3, le gaz ne suit pas la première loi de Joule, le gaz ne peut donc pas être un gaz parfait.

Exercice 2 : compression et détente d'un gaz parfait

1) L'équation des gaz parfaits donne $n = \frac{P_1 V_1}{RT_1}$ $n = \frac{1,0 \times 10^5 \times 12 \times 10^{-3}}{8,314 \times 300}$ $n = 0,481 \text{ mol}$

2) La transformation est isotherme, ce qui donne $T_1 = T_2$ et donc $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$.

On obtient alors $V_2 = \frac{P_1}{P_2} V_1$ ce qui donne $V_2 = \frac{V_1}{a}$ On trouve finalement $a = 10$ et $V_2 = 1,20 \text{ L}$

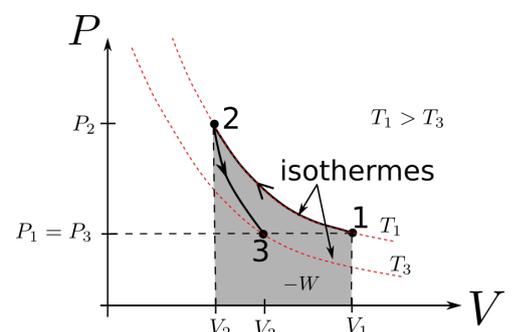
3) Il s'agit d'un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible, on peut donc utiliser la loi de Laplace. $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$, ce qui donne

$$P_2 \cdot V_2^\gamma = P_3 \cdot V_3^\gamma \quad \text{Ainsi } V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_3} \right)^{1/\gamma}$$

et puisque $P_1 = P_3$, on obtient $V_3 = V_2 a^{1/\gamma}$

En remplaçant V_2 avec l'expression trouvée à la question précédente,

on trouve $V_3 = V_1 a^{(1/\gamma)-1}$ $V_3 = 6,22 \text{ L}$



4) Les isothermes peuvent être représentées dans le diagramme de Clapeyron par des arcs d'hyperboles, la **courbe adiabatique réversible est plus inclinée que l'isotherme**, on a donc nécessairement $T_1 > T_3$.

5a) Exprimons le travail échangé au cours de la transformation:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int P_{ext} dV$$

Comme la transformation est lente, $P_{ext} = P$ et la loi des gaz parfait donne $P = \frac{nRT_1}{V}$.

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int \frac{nRT_1}{V} dV$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \text{ car la transformation est isotherme.}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \text{ avec la loi des gaz parfaits et en simplifiant car } T_1 = T_2.$$

Ainsi $W_{1 \rightarrow 2} = P_1 V_1 \ln a$ AN : $W_{1 \rightarrow 2} = 1,00 \cdot 10^5 \times 12,0 \cdot 10^{-3} \times \ln(10)$ et donc $W_{1 \rightarrow 2} = 2,76 \text{ kJ}$

5b) On a $a > 1$, donc on a $W_{1 \rightarrow 2} > 0$, ce qui est cohérent car le gaz est comprimé, il reçoit donc du travail. Sur le graphique, l'aire algébrique est négative, on a bien $W_{1 \rightarrow 2} > 0$.

5c) Pour avoir l'expression de Q , appliquons le premier principe de la thermodynamique au gaz :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

Un gaz parfait obéit à la première loi de Joule $U = U(T)$ ainsi $\Delta U = 0$ pour cette transformation isotherme.

Ainsi $Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2}$ et donc $Q_{1 \rightarrow 2} = -P_1 V_1 \ln a$. AN : $Q_{1 \rightarrow 2} = -2,76 \text{ kJ}$

6) La première identité thermodynamique s'écrit : $dU = TdS - PdV$, ce qui donne donc $dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV$

Or un gaz parfait suit la première loi de Joule, ainsi on a $dU = C_V dT$ et d'après l'équation d'état, on a $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$, ainsi $dS = \frac{C_V}{T} dT + \frac{nR}{V} dV$.

Par intégration, on obtient : $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{constante}$, ce qui est bien le résultat attendu.

7a) D'après la question précédente, on a $S = C_V \ln T + nR \ln V + cste$. Ainsi, $\Delta S = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$

Puisque la transformation est isotherme $T_1 = T_2$, on a $\Delta S = +nR \ln \frac{V_2}{V_1}$ ce qui donne $\Delta S = -nR \ln a$ et

finalement en utilisant l'équation d'état du gaz parfait $\Delta S = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln a$

AN : $\Delta S = \frac{1,00 \cdot 10^5 \times 12,0 \cdot 10^{-3}}{300} \times \ln(10)$ et finalement $\Delta S = -9,21 \text{ J.K}^{-1}$

7b) On a $S^{ech} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_{ext}}$, avec ici $T_{ext} = T_1$

D'après la question 5c, on a $Q_{1 \rightarrow 2} = -P_1 V_1 \ln a$ ce qui donne $S^{ech} = -\frac{P_1 V_1}{T_1} \ln a$ et donc $S^{ech} = -9,21 \text{ J.K}^{-1}$

7c) D'après le deuxième principe de la thermodynamique, on a $S^{cr} = \Delta S - S^{ech}$ ce qui donne $S^{cr} = 0$

La transformation est donc **réversible**.

Exercice 3 : Chauffage d'un gaz

1) Le chauffage a lieu jusqu'à ce que le piston décolle tout juste des cales A, on a donc un **échauffement lent et isochore**.

2) L'équilibre mécanique du piston s'écrit $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$

Puisque $nRT_1 = P_1 V_A$ (équation d'état du gaz parfait) et $nRT_0 = P_0 V_A$, on obtient $T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0}$ ce qui donne

$$\text{alors : } T_1 = \left(1 + \frac{mg}{SP_0} \right) T_0$$

3) Puisque la pression extérieure s'exerçant sur le piston est constante (pression atmosphérique + pression liée au poids de la masse m), il s'agit d'un **échauffement lent et isobare**.

4) Puisque $nRT_2 = P_2V_B$ (équation d'état du gaz parfait), $nRT_1 = P_1V_A$ et $P_1 = P_2$, on obtient $T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A}$

5a) La transformation 1 \rightarrow 2 est isobare, on a donc $\delta W_{1 \rightarrow 2} = -P_{ext}dV = -P_1dV$ ce qui donne après intégration: $W_{1 \rightarrow 2} = -P_1(V_B - V_A)$

5b) Pour une transformation isobare, on a $Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta H = C_P \Delta T = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \Delta T$ ce qui donne

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{P_1 V_A}{T_1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) \text{ ou encore } Q_{1 \rightarrow 2} = P_1 V_A \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right)$$

Autre méthode : Premier principe de la thermodynamique (énoncé général) : $Q_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 - W_{1 \rightarrow 2}$ et $U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$, ainsi :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) - (-P_1(V_B - V_A)) = nRT_1 \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + P_1(V_B - V_A) \text{ ou encore}$$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = P_1 V_A \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) + P_1 V_A \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) = P_1 V_A \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) \text{ qui est bien le même résultat qu'avec le premier principe des isobares - résultat précédent.}$$

Analyse dimensionnelle : On a $[\gamma] = [\gamma - 1] = 1$ (sans dimension) et le produit PV est homogène à une énergie. Ainsi $\left[P_1 V_A \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{V_B}{V_A} - 1 \right) \right] = [\text{énergie}] \cdot [1] = [\text{énergie}]$

Le résultat trouvé est bien homogène.