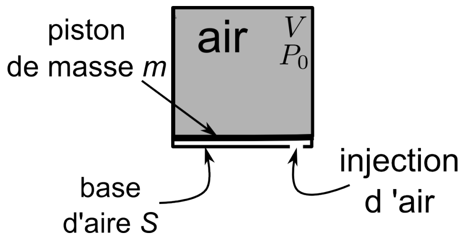
Injection d'air

On considère le système cylindre-piston représenté sur le schéma ci-dessous. Le réservoir cylindrique de volume constant V est séparé en deux parties par un piston de masse m d'épaisseur négligeable pouvant coulisser sans frottements. La surface de la base du cylindre est notée S.



Initialement, la partie supérieure du réservoir est remplie par une quantité de matière n_0 d'air à la pression P_0 tandis que la partie inférieure est vide.
A travers un petit orifice dans la partie inférieure du réservoir (voir schéma), une quantité de matière n d'air est lentement injectée de telle manière à ce que le piston sépare le réservoir en deux parties égales. On considère qu'au cours de cette transformation, la température reste égale à T_0 et que l'air se comporte comme un gaz parfait.
1) A l'aide de deux adjectifs que vous définirez de manière précise, décrire la transformation subie par l'air dans la partie supérieure du réservoir.
2) Déterminer la quantité d'air n injectée dans la partie inférieure du cylindre en fonction de n_0, m, S, P_0, et le champ gravitationnel terrestre g. Vérifier la dimension du résultat obtenu.

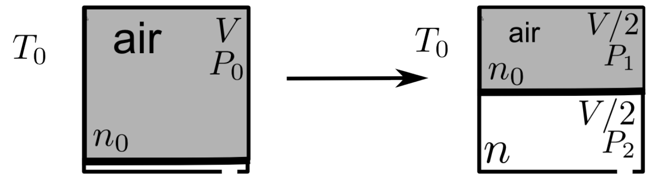
Correction :

1) La transformation pour le gaz piégé dans la partie supérieure du cylindre est **isotherme** et **lente**.

La transformation est lente car le système est toujours en équilibre interne (ses variables d'état sont toujours définies et uniformes) - « l'air est lentement injecté ».

La transformation est isotherme car le gaz est toujours à la température T_0.

2)



- Pour le gaz situé au dessus du piston

Equation d'état du gaz parfait (état initial) : $P_0 V = n_0 R T_0$ **(1)**

Equation d'état du gaz parfait (état final) : $P_1 \dfrac{V}{2} = n_0 R T_0$ **(2)**

- Pour le gaz situé sous le piston

Equation d'état du gaz parfait (état final) : $P_2 \dfrac{V}{2} = n R T_0$ **(3)**

- Equilibre mécanique du piston :

A l'équilibre thermodynamique final, nous devons prendre en compte trois forces sur le piston :

- la force pressante liée à la pression du gaz dans la partie supérieure,
- la force pressante liée à la pression du gaz situé sous le piston
- le poids du piston, ce qui conduit à $P_2 = P_1 + \dfrac{mg}{S}$ **(4)**

(3)/(2) donne : $\dfrac{n}{n_0} = \dfrac{P_2}{2P_0} = \dfrac{P_1 + \dfrac{mg}{S}}{2P_0}$ grâce à **(4)**

Or **(2)/(1)** donne $P_0 = \dfrac{P_1}{2}$

Ainsi $n = n_0 \left(2P_0 + \dfrac{mg}{S}\right) \times \dfrac{1}{2P_0}$ et finalement $n = n_0 \left(1 + \dfrac{mg}{2P_0 S}\right)$

Analyse dimensionnelle :

$$\left[n_0 \left(1 + \frac{mg}{2P_0 S}\right)\right] = [n] \times \frac{[F]}{[PS]} = [n] \times \frac{[F]}{[F]} = [n]$$

Le résultat est donc homogène.