

1. On effectue un tirage avec remise de n individus dans une population formée de 2 catégories A et B en proportions respectives p et $1 - p$. Soit F la statistique mesurant le pourcentage de la catégorie A dans l'échantillon.

Calculer l'espérance et la variance de F . Montrer que F converge vers une loi normale dont on précisera les paramètres lorsque la taille de l'échantillon devient grande. (On utilisera les propriétés de la moyenne empirique d'un échantillon).

2. On dispose de la réalisation x_1, \dots, x_n d'un échantillon X_1, \dots, X_n dont la variable parente suit une loi uniforme sur $]0, a]$. Déterminer la forme de la fonction de vraisemblance du paramètre a . La représenter graphiquement.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d, suivant une loi de Poisson de paramètre λ :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \forall x \in \mathbb{N}$$

- (a) En supposant $\lambda=2$, quelle est la probabilité d'observer l'évènement $(X = 1, Y = 3)$
 (b) Que devient la probabilité d'observer ce même évènement si l'on suppose $\lambda=10$?
 (c) Laquelle de ces deux valeurs de λ vous semble-t-elle la plus plausible (vraisemblance) ayant observé les réalisations $x = 1$ et $y = 3$?

4. Les cerises Momenrency du sud-ouest de la France ont un poids suivant une distribution normale centrée sur $\mu = 5.02$ g et d'écart type $\sigma = \sqrt{0.3}$ g. Trouvez la probabilité pour qu'un échantillon de 100 cerises prises au hasard ait un poids total :

- (a) compris entre 496 et 500 grammes ?
 (b) strictement supérieur à 510 grammes ?

Si on tire au hasard deux lots de 1000 cerises chacun, quelle est la probabilité que leur poids diffère de plus de 5 grammes ?

5. Le jeu de « pile ou face »

- (a) Un joueur effectue 100 jets d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Trouvez la probabilité pour qu'il y ait 60 faces ou plus.
 (b) Le gérant du casino considère maintenant chacun des 500 joueurs présents dans son établissement. Chaque joueur, là encore, jette 100 fois une pièce de monnaie toujours parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité pour que 10 joueurs ou plus obtiennent 60 faces ou plus ?

6. On cherche à comparer les ampoules de type A et celles de type B dont la durée de vie suit une loi normale avec les paramètres suivants :

Marque	μ	σ
A	1400h	200h
B	1200h	100h

- On prélève 125 ampoules de chaque type. Calculez la probabilité des évènements suivants :
- (a) La durée de vie moyenne des ampoules de type A est supérieur de plus de 160 heures à celle des ampoules de type B ;
 - (b) La durée de vie moyenne des ampoules de type B est supérieur ou égale à celle des ampoules de type A ;
-