Statistiques pour l'Ingénieur

TD1 : Probabilités

1. Une urne contient 6 boules rouges, 4 blanches et 5 vertes.
(a) On tire une boule de l'urne. Calculer les probabilités suivantes: elle est rouge, elle est blanche, elle est verte, elle n'est pas rouge, elle est rouge ou blanche.
(b) On tire une seconde boule après remise de la première. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 1 boule blanche et 1 boule rouge? Deux boules rouges?

2. Une compagnie d'assurance repartit ses clients en trois catégories : les personnes à 'bas risque' (B, 20%), à 'moyen risque' (M, 50%) et à 'haut risque' (H, 30%). Les statistiques indiquent que les probabilités conditionnelles pour qu'un assuré soit impliqué dans un accident A au cours d'une année sont respectivement P(A|B) = 0.05, P(A|M) =0.15 et P(A|H) =0.3.
(a) Calculer la probabilité pour qu'un assuré pris au hasard ait un accident au cours de l'année.
(b) Sachant qu'un assuré a eu un accident, calculer les probabilités pour qu'il appartienne à chacune des classes B, M et H.

3. La durée de vie en heures d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & si\ x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.
(a) Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.
(b) Calculer l'espérance mathématique μ et la variance σ^2 de X. Que représentent ces grandeurs ?
(c) Calculer la probabilité p qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie supérieure ou égale à μ.
Rappel: $\int_0^\infty x^n\, e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

4. Trouver les constantes a en fonction des bornes sur X pour que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité. Donner ensuite les expressions de l'espérance mathématique et de la variance (si elles existent) des v.a. correspondantes :
(a)

$$f(x) = \begin{cases} ax & si\ c < x < d \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & si\ x \geq b \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Tracer les fonctions de densité et les fonctions de répartition correspondantes.

5. Calculer l'espérance mathématique et la variance des v.a. discrètes suivant respectivement :
(a) Une loi uniforme discrète $U(n)$

(b) Une loi de Poisson $P(\lambda)$ (On calculera $E(X(X-1))$).
Rappels: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. Soit une variable aléatoire réelle de densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left(-\frac{x^2-10x+25}{18}\right)$.
(a) Cette densité correspond-elle à une distribution normale ? Si oui, déterminer son espérance et sa variance.
(b) Pour quelle valeur de x cette densité de probabilité atteint-elle son maximum ?

7. Soit X une v.a. suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 et $Y = \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in R$.
(a) Monter que Y suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
(b) En déduire les valeurs de α et β telle que Y suive une loi normale centrée réduite.

8. Soit X une variable aléatoire normale de paramètres μ et σ^2.
(a) Déterminer, en fonction de Φ, fonction de répartition de la loi normale centrée - réduite, la probabilité pour que X se trouve dans l'intervalle $]\mu - k\sigma, \mu + k\sigma[$.
(b) Calculer les valeurs numériques correspondant à $k = 1,2,3 \; et \; 4$.

9. Une usine fabrique des crayons dont la longueur en millimètres suit une loi de Gauss $N(200, 3^2)$.
Quel est le pourcentage moyen des crayons dont la longueur est comprise entre 201 et 203 mm ?
Donner un intervalle centré sur 200 dans lequel se trouve avec une probabilité 0.9 la longueur d'un crayon pris au hasard.

10. On suppose que 10 ouvriers ont besoin de manière intermittente de machines électriques et on est intéressé par l'évaluation de la puissance totale nécessaire pour le bon fonctionnement de l'atelier. Pour une approximation grossière, on peut considérer que chaque ouvrier a la même probabilité d'utiliser une machine électrique, qu'ils travaillent de manière indépendante et que la puissance consommée par chaque machine est K kilowatts. On supposera qu'un ouvrier utilise en moyenne une machine 12 minutes par heure.
En calculant la probabilité pour que k ouvriers ou plus utilisent en même temps une machine, proposer une puissance (en fonction de K) totale raisonnable pour le bon fonctionnement de cet atelier.
