DS de M3

Questions de cours :

1. Démontrer que si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ avec a et b deux nombres tels que $a<b$ alors $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

   - $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$
     $E(X)=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$
   - $E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$
     $E(X^2)=\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$ donc
     $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même univers Ω.

   (a) Donner la définition de X et Y indépendantes.
   $\forall(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ P(X=x\cap Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$

   (b) Montrer que si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$
   $E(XY)=\displaystyle\sum_{(i;j)\in I\times J} x_iy_jP(X=x_i\cap Y=y_j)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)$ car les variables aléatoires sont indépendantes.
   Donc $E(XY)=\displaystyle\sum_{i\in I}x_iP(X=x_i)\sum_{j\in J}y_jP(Y=y_j)=E(X)E(Y)$

   (c) Donner la définition de la covariance de X et Y
   $cov(X,Y)=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$

   (d) Quelle est la valeur de $cov(X,Y)$ si X et Y sont indépendantes ? Démontrer cette propriété.
   $cov(X,Y)=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$
   $cov(X,Y)=E\left(XY-E(X)Y-E(Y)X+E(X)E(Y)\right)$
   $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$
   $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ si les variables aléatoires sont indépendantes d'après une question précédente.

Exercice 1 :

On donne X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois respectives $\mathcal{B}(1;0,4)$ et $\mathcal{U}_{[\![-1;1]\!]}$.
On définit les variables aléatoires U et V par $U=3X+2Y$ et $V=X-Y$

1. Donner $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$

$X\setminus Y$	-1	0	1
0	$U=-2$ et $V=1$	$U=0$ et $V=0$	$U=2$ et $V=-1$
1	$U=1$ et $V=2$	$U=3$ et $V=1$	$U=5$ et $V=0$

Donc $U(\Omega)=\{-2;0;1;2;3;5\}$ et $V(\Omega)=\{-1;0;1;2\}$

2. Donner la loi conjointe du couple (U,V) sous la forme d'un tableau.
Dans cette question on ne demande pas de justifier les valeurs

$U \setminus V$	-1	0	1	2	Loi de U
-2	0	0	$0,2$	0	$0,2$
2	$0,2$	0	0	0	$0,2$
0	0	$0,2$	0	0	$0,2$
1	0	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
3	0	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{15}$
5	0	$\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{2}{15}$
Loi de V	$0,2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	1

3. En déduire les lois marginales de U et V.
   Voir tableau de la question précédente

4. Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ?
   Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes car $P(U = 0 \cap V = 1) = 0 \neq 0,4 = 0,2 \times 0,2 = P(U = 0)P(V = -1)$

5. Calculer la covariance de U et V. Cette covariance confirme-t-elle la réponse à la question précédente ?
   - $E(U) = -2 \times 0,2 + 2 \times 0,2 + 0 \times 0,2 + 1 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{2}{15} = \frac{6}{5} = 1,2$
   - $E(V) = -1 \times 0,2 + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$
   - $E(UV) = -1 \times 2 \times 0,2 - 2 \times 1 \times 0,2 + 1 \times 2 \times \frac{2}{15} + 1 \times 3 \times \frac{2}{15} = -\frac{2}{15}$
   - $cov(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = -\frac{46}{75} \neq 0$ ce qui confirme que U et V ne sont pas indépendantes

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ae^x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ avec a un nombre réel

1. Calculer a pour que f soit une densité de probabilité.
   $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} ae^x\,\mathrm{d}x = [ae^x]_{-\infty}^{0} = a$

2. Soit X une variable aléatoire de densité f
   (a) Calculer $P(-1 \leqslant X < 0)$ et $P(X > 7)$
   - $P(-1 \leqslant X < 0) = \displaystyle\int_{-1}^{0} e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_{-1}\,0 = 1 - e^{-1}$
   - $P(X > 7) = \displaystyle\int_{7}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{7}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$

   (b) Déterminer α tel que la probabilité que X soit inférieure à α soit égale à la probabilité que X soit supérieure à α.
   - Par définition de f, on a $\alpha < 0$
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\alpha} e^x\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{0} e^x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow [e^x]_{-\infty}^{\alpha} = [e^x]_{\alpha}^{0} \Leftrightarrow e^\alpha = 1 - e^\alpha \Leftrightarrow$ $2e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln(2)$

   (c) Déterminer la fonction de répartition de X.
   - Si $x < 0$ alors $F_X(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t\,\mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-\infty}^{x} = e^x$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $F_X(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t = 1$

(d) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
$E(X) = \lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^0 xe^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to-\infty}\left([xe^x]_u^0 - \int_u^0 1e^x\,\mathrm{d}x\right) = \lim\limits_{u\to-\infty}\left(ue^u - [e^x]_u^0\right) = \lim\limits_{u\to-\infty}(ue^u - 1 + e^u) = -1$ par intégration par parties et croissances comparées

(e) Montrer que X admet une variance et la calculer.

- $E(X^2) = \lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^0 x^2e^x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to-\infty}\left(\left[x^2e^x\right]_u^0 - 2\int_u^0 xe^x\,\mathrm{d}x\right) = 0 - 2E(X) = 2$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1 = 1$

3. On pose $Y = 2X + 1$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

- $X(\Omega) =]-\infty;0]$ donc $Y(\Omega) =]-\infty;1]$
- Si $x \leqslant 1$ alors $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(2X+1 \leqslant x) = P\left(x \leqslant \frac{x-1}{2}\right) = F_X(\frac{x-1}{2}) = e^{\frac{x-1}{2}}$
- Si $x > 1$ alors $F_Y(x) = 1$

(b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y.
F_Y est une fonction dérivable donc Y est une variable de densité : $f_Y : x \to \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} \text{ si } x \leqslant 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

(c) Calculer l'espérance et la variance de Y

- $E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + 1 = -1$
- $V(Y) = V(2X+1) = 2^2V(X) = 4$

4. On pose $Z = X^2$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de Z.

- $Z(\Omega) = [0;+\infty[$
- Si $x \leqslant 0$ alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = 0$
- Si $x > 0$ alors $F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant 0) = P(X \leqslant 0) - P(X \leqslant -\sqrt{x}) = 1 - F_X(-\sqrt{x}) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$

(b) Démontrer que Z est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Z.
F_Z est dérivable donc Z est une variable aléatoire de densité $f_Z : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 3 :

On a observé que la longueur d'un pied adulte, en cm, suivait une loi normale $\mathcal{N}(26,36)$. Une entreprise décide de fabriquer des chaussettes, en proposant trois tailles.

1. Déterminer un intervalle centré en 26 qui concentre au moins 95% des tailles, c'est à dire un nombre α tel que $P(26-\alpha \leqslant X \leqslant 26+\alpha) \simeq 0,95$. On arrondira les bornes de l'intervalle à l'unité.
$P(26-\alpha \leqslant X \leqslant 26+\alpha) = 0,95 \Leftrightarrow P(X \leqslant 26-\alpha) - P(X \leqslant 26-\alpha) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-\alpha}{6}\right) = 0,95 \Leftrightarrow -1 + \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\alpha}{6}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} = 1,96 \Leftrightarrow \alpha = 6 \times 1,96 = 11,76$
On obtient donc l'intervalle $[14;38]$

2. Diviser l'intervalle obtenu en trois intervalles égaux, qui détermineront les trois tailles.
On obtient les intervalles $[14;22]$, $[22;30]$ et $[30;38]$

3. Déterminer quelle part de production on doit réserver à chacune des tailles.

- $P(14 \leqslant X \leqslant 22) = P(X \leqslant 22) - P(X \leqslant 14) = \Phi\left(\frac{22-26}{6}\right) - \Phi\left(\frac{14-26}{6}\right) = \Phi(-0,67) - \Phi(-2) = 1 - \Phi(0,67) - 1 + \Phi(2) = 0,23$
- $P(22 \leqslant X \leqslant 30) = P(X \leqslant 30) - P(X \leqslant 22) = \Phi\left(\frac{30-26}{6}\right) - \Phi\left(\frac{22-26}{6}\right) = \Phi(0,67) - \Phi(-0,67) = \Phi(0,67) - 1 + \Phi(0,67) = 0,495$
- $P(30 \leqslant X \leqslant 38) = P(X \leqslant 38) - P(X \leqslant 30) = \Phi\left(\frac{38-26}{6}\right) - \Phi\left(\frac{30-26}{6}\right) = \Phi(2) - \Phi(0,67) = 0,23$

- $P(14 \leqslant X \leqslant 38) = P(X \leqslant 38) - P(X \leqslant 14) = \Phi\left(\frac{38-26}{6}\right) - \Phi\left(\frac{14-26}{6}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) = 0,954$
- La part de production pour la taille 14-22 est la même que pour 30-38, c'est à dire $\frac{0,23}{0,954} = 0,241$ soit $24,1\%$. La part de production pour la taille 22-30 est $\frac{0,495}{0,954} = 0,519$ soit $51,9\%$