Corrigé de l'IS de M3

Questions de cours :

1. Soient A et B deux événements d'un univers infini dénombrable Ω tel que $P(A) \neq 0$.

   (a) Donner la définition de la probabilité de B sachant A.
   Soient A et B deux événements d'un univers Ω et$P$ une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est $P_B(A) = P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

   (b) Montrer que P_A est une probabilité.

   - $P_A(\Omega)) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
   - Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements disjoints deux à deux,
   $$P_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \bigcap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(A_n \bigcap A\right)\right)}{P(A)}$$
   $$P_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_A(A_n)$$ car les événements $A_n \cap A$ sont incompatibles deux à deux

2. Énoncer le théorème de Bayes et le démontrer.
   Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}$.

   Démonstration : Par définition $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)}$ d'après les probabilités totales

3. Démontrer que si X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

   - $E(X) = 1P(X=1) + 0P(X=0) = P(X=1) = p$
   - $V(X) = (1-p)^2 P(X=1) + (0-p)^2 P(X=0) = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = (1-p)((1-p)p + p^2) = (1-p)(p - p^2 + p^2) = (1-p)p$

Exercice 1 :

Ω est l'ensemble des nombres entiers naturels formés de quatre chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4 et 5.

- A est le sous-ensemble de Ω des nombres de quatre chiffres différents
- B est le sous-ensemble de Ω des nombres contenant exactement un chiffre doublé (une paire).
- C est le sous-ensemble de Ω contenant exactement deux chiffres doublés (deux paires).
- D est le sous-ensemble de Ω des nombres contenant un chiffre triplé (un brelan).
- E est le sous-ensemble de Ω des nombres formés de quatre fois le même chiffre.

1. Calculer le cardinal de Ω
   Ω est un ensemble de 4-listes donc $card(\Omega) = 5^4 = 625$

2. Calculer le cardinal des ensembles A, B, C, D et E.

   - A est l'ensemble des arrangements de 4 chiffres parmi 5 donc $card(A) = A_4^5 = \frac{5!}{(4-5)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
   - Pour B, il faut choisir le chiffre qui sera doublé puis ses deux places parmi les 4 et enfin un arrangement pour les deux places restantes. On a donc $card(B) = 5 \times \binom{4}{2}\mathbb{A}_2^4 = 360$
   - Pour C, il faut choisir les deux chiffres doublés parmi les 5 proposés, puis choisir deux places parmi les 4 possibles pour l'un des chiffres. L'autre chiffre prends les places restantes. On a donc $card(C) = \binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = 60$
   - Pour D, il faut choisir le nombre qui sera triplé puis ses trois places et enfin le chiffres restant. O a donc $card(D) = 5 \times \binom{4}{3} \times 4 = 80$
   - Pour E, il faut juste choisir le chiffre qui sera répété 4 fois. On a $card(E) = 5$

3. Si on ajoute les cardinaux des ensembles A, B, C, D et E, qu'obtient-on ? Justifier.
   $\Omega = A \cup B \cup C \cup D \cup D$ et cette union étant disjointe, on a $card(\Omega) = card(A) + card(B) + card(C) + card(D) + card(E)$

Exercice 2 :

On estime qu'un étudiant ayant correctement révisé ses cours pour un examen a une probabilité de 20% d'échouer à l'examen. En revanche, on estime qu'un étudiant n'ayant pas révisé ses cours a une probabilité de 60% d'échouer à cet examen. On sait aussi que 50% des étudiant ont correctement révisé leurs cours.

1. On choisit un étudiant au hasard. Qu'elle est la probabilité qu'il échoue à l'examen ?
   On définit les événements suivants :

   - R : "L'étudiant a correctement révisé"
   - E : "L'étudiant échoue à son examen"

   R et $\overline{R}$ forment un système complet d'événements donc d'après les probabilités totales $P(E) = P(R)P_R(E) + P(\overline{R})P_{\overline{R}}(E) = 0,5 \times 0,2 + 0,5 \times 0,6 = 0,4$.
   L'étudiant a donc 20%de chance d'échouer à son examen.

2. Un étudiant a échouer à l'examen, qu'elle est la probabilité qu'il ait révisé correctement ?
   D'après Bayes $P_E(R) = \frac{P(E \cap R)}{P(E)} = \frac{P(R)P_R(E)}{P(E)} = \frac{0,5 \times 0,2}{0,4} = 0,25$.

3. Un élève passe deux fois de suite cet examen et échoue deux fois mais affirme pourtant avoir correctement révisé. Est-ce plausible ? (Indication : Soit E_i l'événement : « l'élève a échoué la i-ème fois à l'examen » pour $i = 1$ ou $i = 2$ et R l'événement : « l'élève a révisé correctement », on admettra que l'énoncé entraine que $P_R(E_1 \cap E_2) = P_R(E_1) \times P_R(E_2)$, cela s'appelle l'indépendance conditionnelle de E_1 et E_2 sachant R . On admettra de même l'indépendance conditionnelle de E_1 et E_2 sachant $\overline{R}$)
   D'après Bayes $P_{E_1 \cap E_2}(R) = \frac{P(R)P_R(E_1 \cap E_2)}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{P(R)P_R(E_1)P_R(E_2)}{P(R)P_R(E_1 \cap E_2) + P(\overline{R})P_{\overline{R}}(E_1 \cap E_2)} = \frac{0,5 \times 0,2 \times 0,2}{0,5 \times 0,2 \times 0,2 + 0,5 \times 0,6 \times 0,6} = 0,1$
   Il n'y a que 10% de chance qu'il ait raison.

Exercice 3 :

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies.

   (a) Quelle est la loi de X_n ?
   X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p car :
   - On a une expérience de Bernoulli de paramètre p et de succès "sauter d'une case"
   - On répète n fois cette expérience Ces répétitions sont indépendantes
   - X_n compte le nombre de succès.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de X_n
   $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$

2. (a) Exprimer Y_n en fonction de X_n. $Y_n = 1 \times X_n + 2(n - X_n) = X_n + 2n - 2X_n = 2n - X_n$

   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y_n. $E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = n(2-p)$ et $V(Y_n) = (-1)^2 V(X_n) = np(1-p)$

3. Pour $k \geqslant 1$, on note :
   - M_k l'événement "La grenouille passe par la marche k"
   - D_k l'événement "La grenouille saute de deux cases à partir de la case k"
   - $p_k = P(M_k)$

   (a) Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ?
   $p_1 = P(M_1) = P(\overline{D_0}) = p$ et $p_2 = P(M_2) = P\left(D_0 \cup \left(\overline{D_0} \cap \overline{D_1}\right)\right) = P(D_0) + P\left(\overline{D_0} \cap \overline{D_1}\right) = 1 - p + P\left(\overline{D_0}\right) P\left(\overline{D_1}\right) = 1 - p + p^2$ car les événements sont disjoints et les sauts indépendants.

   (b) Exprimer $\overline{M_{k+1}}$ en fonction de M_k et D_k.
   $\overline{M_{k+1}} = M_k \cap D_k$

   (c) En déduire que $p_{k+1} = 1 - (1-p)p_k$.
   $1 - p_{k+1} = P(\overline{M_{k+1}}) = P(M_k \cap D_k) = P(M_k)P(D_k) = p_k \times (1-p)$.
   Donc $p_{k+1} = 1 - (1-p)p_k$.

   (d) Exprimer p_k en fonction de k pour $k \geqslant 1$.
   (P_k) est suite arithmético-géométrique.
   - Résolvons $x = 1 - (1-p)x$
     $x(1 + 1 - p) = 1$ donc $x = \frac{1}{2-p}$
   - On définie la suite (u_k) par $u_k = p_k - \frac{1}{2-p}$
     $u_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2-p} = 1 - (1-p)p_k - \frac{1}{2-p} = 1 - (1-p)\left(u_k + \frac{1}{2-p}\right) - \frac{1}{2-p}$
     $u_{k+1} = 1 - u_k - \frac{1}{2-p} + pu_k + p\frac{1}{2-p} - \frac{1}{2-p} = (p-1)u_k + \frac{2-p-1+p-1}{2-p} = (p-1)u_k$
     (u_k) est donc une suite géométrique de raison $p-1$ et
     $u_k = (p-1)^{k-1}u_1 = (p-1)^{k-1}\left(p_1 - \frac{1}{2-p}\right) = (p-1)^{k-1}\left(p - \frac{1}{2-p}\right) = (p-1)^{k-1}\frac{p(2-p)-1}{2-p} = (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p}$
     On a donc $p_k = u_k + \frac{1}{2-p} = (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p} + \frac{1}{2-p}$