Les nombres complexes

Notations utilisées en mathématiques

- Un nombre complexe z possède une représentation dite « algébrique » : $z = x + i\,y$ avec x et y **réels** et $i^2 = -1$.
  $x = Re(z)$ est la **partie réelle** du nombre complexe z.
  $y = Im(z)$ est la **partie imaginaire** du nombre complexe z.
- Si z est un complexe non nul, alors z possède une représentation dite « exponentielle » $z = r\,e^{i\,\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel avec la <u>convention</u> que $e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (point de coordonnées polaires $[1;\theta]$). Donc $|e^{i\,\theta}| = 1$
  θ est un angle défini à $2\,\pi$ près (on dit que c'est <u>un</u> argument de z). L'unique argument de z appartenant à $]-\pi;\pi]$ est noté $Arg(z)$.

Le **conjugué** de $z = x + i\,y$ (x, y, réels) est le complexe $\bar{z} = x - i\,y$.
On a $\bar{z} = |z|e^{-i\,Arg(z)}$.

Notations utilisées en physique

En électricité, les nombres complexes sont soulignés et l'unité imaginaire est notée j ($j^2 = -1$).

- $\underline{z} = x + j\,y$ avec x et y des nombres **réels** et $j^2 = -1$.
  $x = Re(\underline{z})$ est la **partie réelle** du nombre complexe $\underline{z}$
  $y = Im(\underline{z})$ est la **partie imaginaire** du nombre complexe $\underline{z}$.
- $\underline{z} = |\underline{z}|\,e^{j\,\theta}$
  $|\underline{z}|$, le **module** du nombre complexe $\underline{z}$, est un nombre réel positif.
  $\theta = Arg(\underline{z})$, l'**argument** du nombre complexe $\underline{z}$, est un angle compris entre $-\pi$ et π.

On note $\underline{z}^* = x - j\,y = |\underline{z}|e^{-j\,\theta}$, le **conjugué** de $\underline{z}$.

Quelques propriétés des nombres complexes

(avec les notations utilisées en physique)

Les égalités d'angle sont vraies à $2\,\pi$ près.

Propriétés du conjugué

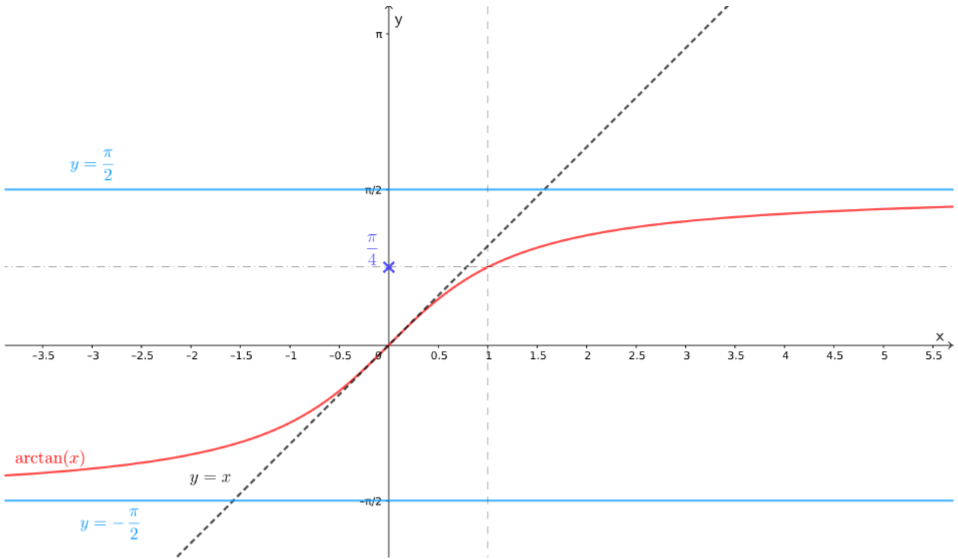
$|\underline{z}^*| = |\underline{z}|$ et $Arg(\underline{z}^*) = -Arg(\underline{z})$

Soient $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ deux nombres complexes ($\underline{z}_2 \neq 0$) :

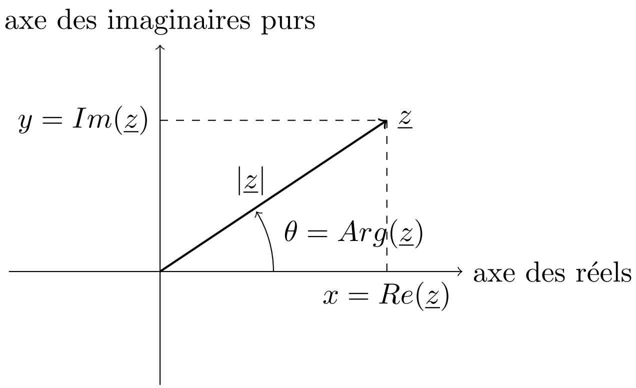
$$|\underline{z}_1\,\underline{z}_2| = |\underline{z}_1|\,|\underline{z}_2| \qquad Arg(\underline{z}_1\,\underline{z}_2) = Arg(\underline{z}_1) + Arg(\underline{z}_2) \qquad (\underline{z}_1\,\underline{z}_2)^* = \underline{z}_1^*\underline{z}_2^*$$

$$\left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \qquad Arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = Arg(\underline{z}_1) - Arg(\underline{z}_2) \qquad \left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right)^* = \frac{\underline{z}_1^*}{\underline{z}_2^*}$$

Courbe représentative de la fonction y=arctan(x)



Représentation dans le plan complexe



- $x = |\underline{z}|\cos\theta$
- $y = |\underline{z}|\sin\theta$
- $|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Si $x > 0$, $\theta = Arg(\underline{z}) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$