Espaces probabilisés

Jourd'huy

14 juin 2022

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombreme

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

I/ Dénombrement

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombreme

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

I/ Dénombrement

Rappel : Si on a équiprobabilité sur un ensemble fini alors la probabilité d'un événement est

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ au\ total}$$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombreme

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

I/ Dénombrement

Rappel : Si on a équiprobabilité sur un ensemble fini alors la probabilité d'un événement est

$$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ au\ total}$$

Exemple : Si on lance un dé bien équilibré alors la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = 0,5$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombreme

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

I/ Dénombrement

Rappel : Si on a équiprobabilité sur un ensemble fini alors la probabilité d'un événement est
$P(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ au\ total}$

Exemple : Si on lance un dé bien équilibré alors la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = 0,5$

Remarque : Il faut donc réussir à dénombrer les cas qui nous intéressent.

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1; \cdots ; n\}$.

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1; \cdots ; n\}$.

- Si E est vide, alors son cardinal est 0 et on note $card(E) = card(\emptyset) = 0$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1; \cdots; n\}$.

- Si E est vide, alors son cardinal est 0 et on note $card(E) = card(\emptyset) = 0$
- Sinon on peut écrire $E = \{x_1; \cdots; x_n\}$ où les x_i sont distincts 2 à 2. Le nombre n est appelé le cardinal de E et on note $n = card(E)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1; \cdots; n\}$.

- Si E est vide, alors son cardinal est 0 et on note $card(E) = card(\emptyset) = 0$
- Sinon on peut écrire $E = \{x_1; \cdots; x_n\}$ où les x_i sont distincts 2 à 2. Le nombre n est appelé le cardinal de E et on note $n = card(E)$

Exemple : $card\{56; 12; -6\} = 3$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

1/ Ensembles finis

Définition : Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $\{1; \cdots; n\}$.

- Si E est vide, alors son cardinal est 0 et on note $card(E) = card(\emptyset) = 0$
- Sinon on peut écrire $E = \{x_1; \cdots; x_n\}$ où les x_i sont distincts 2 à 2. Le nombre n est appelé le cardinal de E et on note $n = card(E)$

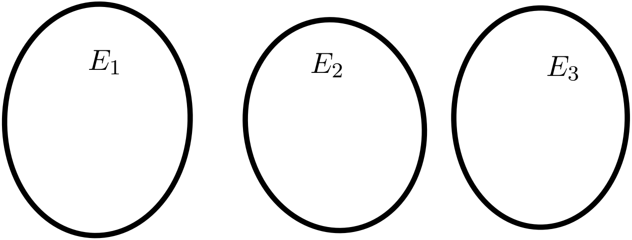
Exemple : $card\{56; 12; -6\} = 3$

Remarque : Pour la suite du chapitre on pose $E = \{x_1; \cdots; x_n\}$ et $F = \{y_1; \cdots; y_m\}$ deux ensembles finis de cardinaux $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

Unions d'événements

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots E_p$ sont des ensembles finis, disjoints deux à deux on a $card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i)$

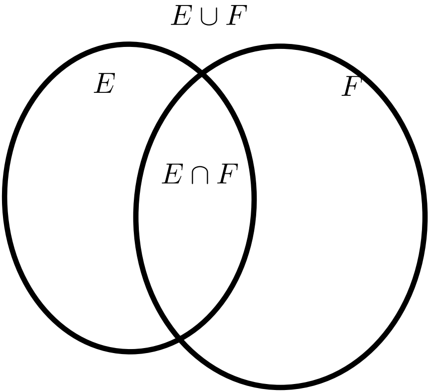


Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Unions d'événements

Propriété :

$$card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$$



Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) =$$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i) -$$

Formule de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i) - \sum_{i \neq j} card(E_i \cap E_j) +$$

Formule de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots ; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i) - \sum_{i \neq j} card(E_i \cap E_j) + \sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k} card(E_i \cap E_j \cap E_k) -$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i) - \sum_{i \neq j} card(E_i \cap E_j) +$$

$$\sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k} card(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots +$$

Formule de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis quelconques alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} card(E_i) - \sum_{i \neq j} card(E_i \cap E_j) + \sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k} card(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots + (-1)^{p+1} card\left(\bigcap_{i=1}^{p} E_i\right)$$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

2/ Tirages successifs avec remise

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

2/ Tirages successifs avec remise

Définition : $E \times F = \{(x; y) \text{ avec } x \in E \text{ et } y \in F\}$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

2/ Tirages successifs avec remise

Définition : $E \times F = \{(x; y) \text{ avec } x \in E \text{ et } y \in F\}$

Exemple : $\{0; 1\} \times \{2; 3\} = \{(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3)\}$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

2/ Tirages successifs avec remise

Définition : $E \times F = \{(x; y) \text{ avec } x \in E \text{ et } y \in F\}$

Exemple : $\{0; 1\} \times \{2; 3\} = \{(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3)\}$

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis alors
$card(E_1 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times \cdots \times card(E_p)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

2/ Tirages successifs avec remise

Définition : $E \times F = \{(x; y) \text{ avec } x \in E \text{ et } y \in F\}$

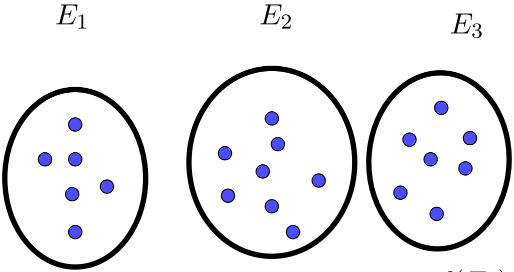
Exemple : $\{0; 1\} \times \{2; 3\} = \{(0; 2), (0; 3), (1; 2), (1; 3)\}$

Propriété : Si $E_1; \cdots; E_p$ sont des ensembles finis alors $card(E_1 \times \cdots \times E_p) = card(E_1) \times \cdots \times card(E_p)$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a bien $2 \times 2 = 4$ couples

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Démonstration :



$card(E_1) \times card(E_2) \times card(E_3)$

p-listes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

p-listes

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

ATTENTION : les éléments de E peuvent se répéter.

p-listes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

ATTENTION : les éléments de E peuvent se répéter.

Propriété : Le nombre de p-listes de E est donc $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^p$.

p-listes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

ATTENTION : les éléments de E peuvent se répéter.

Propriété : Le nombre de p-listes de E est donc $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^p$.

Exemple : $\{0; 1; 2\}^2 =$

p-listes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

ATTENTION : les éléments de E peuvent se répéter.

Propriété : Le nombre de p-listes de E est donc $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^p$.

Exemple : $\{0; 1; 2\}^2 =$ $\{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2)\}$, on a donc bien $3^2 = 9$ 2-listes

p-listes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit $p \in \mathbb{N}*$, un élément de $E^p = E \times \cdots E$ s'appelle une p-liste de E (ou un p-uplet)

ATTENTION : les éléments de E peuvent se répéter.

Propriété : Le nombre de p-listes de E est donc $n \times n \times n \times \cdots \times n = n^p$.

Exemple : $\{0;1;2\}^2 = \{(0;0),(0;1),(0;2),(1;0),(1;1),(1;2),(2;0),(2;1),(2;2)\}$, on a donc bien $3^2 = 9$ 2-listes

Remarque : On a donc tiré deux fois successivement et avec remise un nombre dans $\{0;1;2\}$

Définition : $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F

$card\,(\mathcal{F}(E,F))$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F

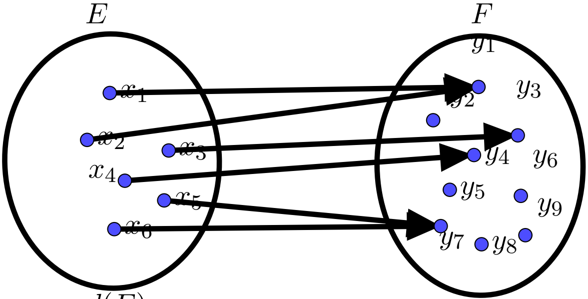
Propriété : $card(\mathcal{F}(E,F)) = m^n$

$card\left(\mathcal{F}(E,F)\right)$

Définition : $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F

Propriété : $card(\mathcal{F}(E,F)) = m^n$

Démonstration :



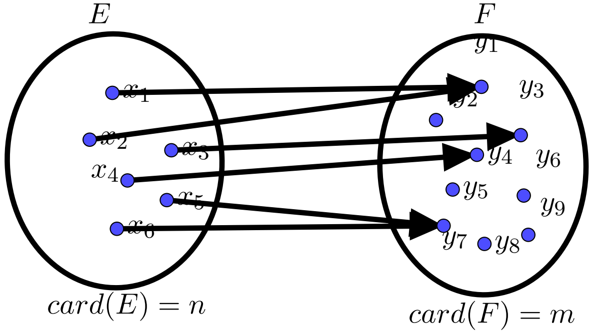
$card(E) = n$ $\qquad$ $card(F) = m$

$card\,(\mathcal{F}(E,F))$

Définition : $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F

Propriété : $card(\mathcal{F}(E,F)) = m^n$

Démonstration :



Exemple : $card(\mathcal{F}(E,\{0;1\})) = 2^n$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition :

- Soit A une partie de E, on note $\chi_A \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$ définie par $\begin{array}{l} \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \\ \chi_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A \end{array}$
  Cette fonction est appelée fonction caractéristique de A

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition :

- Soit A une partie de E, on note $\chi_A \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$ définie par $\begin{array}{l} \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \\ \chi_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A \end{array}$
  Cette fonction est appelée fonction caractéristique de A
- $\chi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A \to \chi_A \end{array}$

$card(\mathcal{P}(E))$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition :

- Soit A une partie de E, on note $\chi_A \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$ définie par $\begin{array}{l} \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \\ \chi_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A \end{array}$
  Cette fonction est appelée fonction caractéristique de A
- $\chi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A \to \chi_A \end{array}$

Propriété : χ est bijective et donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition :

- Soit A une partie de E, on note $\chi_A \in \mathcal{F}(E, \{0; 1\})$ définie par $\begin{array}{l} \chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \\ \chi_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A \end{array}$
  Cette fonction est appelée fonction caractéristique de A
- $\chi : \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E, \{0; 1\}) \\ A \to \chi_A \end{array}$

Propriété : χ est bijective et donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Démonstration :

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E
- Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E c'est à dire un arrangement de n éléments de E

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E
- Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E c'est à dire un arrangement de n éléments de E

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E
- Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E c'est à dire un arrangement de n éléments de E

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

- $(2; 1)$ et $(1; 2)$ sont 2 arrangements différents de E

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E
- Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E c'est à dire un arrangement de n éléments de E

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

- $(2; 1)$ et $(1; 2)$ sont 2 arrangements différents de E
- $(1; 1)$ n'est pas un arrangement de E

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

3/ Tirages successifs sans remise

Définition :

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$
- $0! = 1$
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$, une p-liste d'éléments distincts de E est appelée un arrangement de p éléments de E
- Une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E c'est à dire un arrangement de n éléments de E

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

- $(2; 1)$ et $(1; 2)$ sont 2 arrangements différents de E
- $(1; 1)$ n'est pas un arrangement de E
- $(2; 1; 0)$ est une permutation de E

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $p \in \mathbb{N}*$ avec $p \leqslant n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $p \in \mathbb{N}*$ avec $p \leqslant n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

Nombre d'arrangements et de permutations

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $p \in \mathbb{N}*$ avec $p \leqslant n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

Propriété : Le nombre de permutations de E est $n!$

Démonstration : Voir la propriété précédente avec $p = n$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $p \in \mathbb{N}*$ avec $p \leqslant n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

Propriété : Le nombre de permutations de E est $n!$

Démonstration : Voir la propriété précédente avec $p = n$

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

Nombre d'arrangements et de permutations

Propriété : Si $p \in \mathbb{N}*$ avec $p \leqslant n$ alors le nombre d'arrangements de p éléments de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

Démonstration :

Propriété : Le nombre de permutations de E est $n!$

Démonstration : Voir la propriété précédente avec $p = n$

Exemple : On pose $E = \{0; 1; 2\}$

Remarque : On a donc tiré deux ou trois fois successivement et sans remise un nombre dans $E = \{0; 1; 2\}$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

- On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

- On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.
- On appelle coefficient binomial le nombre de combinaisons de p éléments de E. Il est noté $\binom{n}{p}$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

- On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.
- On appelle coefficient binomial le nombre de combinaisons de p éléments de E. Il est noté $\binom{n}{p}$

Exemple : Les combinaisons de 2 éléments de $E = \{0; 1; 2\}$ sont $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

- On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.
- On appelle coefficient binomial le nombre de combinaisons de p éléments de E. Il est noté $\binom{n}{p}$

Exemple : Les combinaisons de 2 éléments de $E = \{0; 1; 2\}$ sont $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$ et $\binom{3}{2} = 3$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

4/ Tirages simultanées

Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

- On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E à p éléments.
- On appelle coefficient binomial le nombre de combinaisons de p éléments de E. Il est noté $\binom{n}{p}$

Exemple : Les combinaisons de 2 éléments de $E = \{0; 1; 2\}$ sont $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$ et $\binom{3}{2} = 3$

Remarque :

- Dans une combinaison, tous les éléments sont distincts et l'ordre ne compte pas
- On a tiré deux nombres dans E de façon simultanée

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Nombre de Combinaisons

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Nombre de Combinaisons

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

<u>Démonstration :</u> Pour une combinaison de p éléments, on a $p!$ ordres possibles c'est à dire $p!$ arrangements possibles donc $\binom{n}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Nombre de Combinaisons

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- - Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$
  - Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Si $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Démonstration : Pour une combinaison de p éléments, on a $p!$ ordres possibles c'est à dire $p!$ arrangements possibles donc $\binom{n}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2\times 1} = 3$ combinaisons de 2 éléments de E

Triangle de Pascal

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				

Triangle de Pascal

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

Triangle de Pascal

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition :

$n \setminus p$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

II/ Expériences aléatoires

Définition :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui dépend du hasard

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

II/ Expériences aléatoires

Définition :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui dépend du hasard
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de cette expérience et est noté Ω

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

II/ Expériences aléatoires

Définition :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui dépend du hasard
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de cette expérience et est noté Ω

Exemple :

- Si on lance un dé à 6 faces, on a une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

II/ Expériences aléatoires

Définition :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui dépend du hasard
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de cette expérience et est noté Ω

Exemple :

- Si on lance un dé à 6 faces, on a une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- On peut considérer la durée de vie d'une ampoule comme une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \mathbb{R}^+$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

II/ Expériences aléatoires

Définition :

- Une expérience aléatoire est une expérience qui dépend du hasard
- L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'univers de cette expérience et est noté Ω

Exemple :

- Si on lance un dé à 6 faces, on a une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- On peut considérer la durée de vie d'une ampoule comme une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \mathbb{R}^+$

Définition : Un événement A d'une expérience aléatoire est une partie de l'univers Ω de cette expérience

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2;4;6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- Un singleton est appelé un événement élémentaire

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- Un singleton est appelé un événement élémentaire
- $A \cap B$ est l'intersection de A et B c'est à dire que $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ <u>et</u> $x \in B$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- Un singleton est appelé un événement élémentaire
- $A \cap B$ est l'intersection de A et B c'est à dire que $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$
- A et B sont disjoints ou incompatible si $A \cap B = \emptyset$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- Un singleton est appelé un événement élémentaire
- $A \cap B$ est l'intersection de A et B c'est à dire que $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ <u>et</u> $x \in B$
- A et B sont disjoints ou incompatible si $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B$ est l'union de A et B c'est à dire que $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ <u>ou</u> $x \in B$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ est l'ensemble A privé de B

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces et qu'on appelle A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a $A = \{2; 4; 6\}$

Définition : Soient A et B deux événements de Ω

- $\emptyset$ est l'événement impossible
- Ω est l'univers certains
- $\overline{A} = A^c$ est l'événement contraire de A c'est à dire $x \in \overline{A} = A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- Un singleton est appelé un événement élémentaire
- $A \cap B$ est l'intersection de A et B c'est à dire que $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ <u>et</u> $x \in B$
- A et B sont disjoints ou incompatible si $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B$ est l'union de A et B c'est à dire que $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ <u>ou</u> $x \in B$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ est l'ensemble A privé de B
- $A \subset B$ si et seulement si $x \in A \Rightarrow x \in B$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

III/ Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

III/ Espaces probabilisés finis

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

III/ Espaces probabilisés finis

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

III/ Espaces probabilisés finis

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ **disjoints**, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

III/ Espaces probabilisés finis

Définition : Soit Ω un ensemble fini alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ **disjoints**, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On dit dans ce cas que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini

Équiprobabilité

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : On dit qu'on a équiprobabilité dans un espace probabilisé si tous les résultats ont la même probabilité

Équiprobabilité

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : On dit qu'on a équiprobabilité dans un espace probabilisé si tous les résultats ont la même probabilité

Propriété : Si A est un événement d'un univers Ω fini et qu'on a équiprobabilité alors $P(A) =$

Équiprobabilité

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : On dit qu'on a équiprobabilité dans un espace probabilisé si tous les résultats ont la même probabilité

Propriété : Si A est un événement d'un univers Ω fini et qu'on a équiprobabilité alors $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Équiprobabilité

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : On dit qu'on a équiprobabilité dans un espace probabilisé si tous les résultats ont la même probabilité

Propriété : Si A est un événement d'un univers Ω fini et qu'on a équiprobabilité alors $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces bien équilibré, on a alors une situation d'équiprobabilité car
$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$

Équiprobabilité

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : On dit qu'on a équiprobabilité dans un espace probabilisé si tous les résultats ont la même probabilité

Propriété : Si A est un événement d'un univers Ω fini et qu'on a équiprobabilité alors $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Exemple : Si on lance un dé à 6 faces bien équilibré, on a alors une situation d'équiprobabilité car
$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \dfrac{1}{6}$
Soit A l'événement "Obtenir un nombre pair", on a alors $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

Démonstration :

Formule du crible ou de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Formule du crible ou de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leqslant n} P(A_i \cap A_j)$$

Formule du crible ou de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Formule du crible ou de Poincaré

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Formule du crible ou de Poincaré

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Formule du crible ou de Poincaré

Propriété : Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements d'un espace probabilisé alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j; i \neq k; j \neq k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Démonstration :

Probabilité d'une union disjointe

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements disjoints d'un espace probabilisé alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Probabilité d'une union disjointe

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements disjoints d'un espace probabilisé alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $A = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\})$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements disjoints d'un espace probabilisé alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $A = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\})$

Remarque : La probabilité d'un événement et donc de l'univers est entièrement déterminée par les probabilités élémentaires $P(\{\omega_i\})$

Probabilité d'une union disjointe

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements disjoints d'un espace probabilisé alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $A = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\})$

Remarque : La probabilité d'un événement et donc de l'univers est entièrement déterminée par les probabilités élémentaires $P(\{\omega_i\})$

Propriété : Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini et $p_1; \cdots; p_n$ une famille de nombres positifs alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \leqslant n, P(\{\omega_i\}) = p_i$ si

et seulement si

Probabilité d'une union disjointe

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété :

- Si $A_1, \cdots, A_n$ est une famille d'événements disjoints d'un espace probabilisé alors $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Si $A = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\})$

Remarque : La probabilité d'un événement et donc de l'univers est entièrement déterminée par les probabilités élémentaires $P(\{\omega_i\})$

Propriété : Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un univers fini et $p_1; \cdots; p_n$ une famille de nombres positifs alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \leqslant n, P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

IV/ Espaces probabilisés infinis dénombrables

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

IV/ Espaces probabilisés infinis dénombrables

Définition : Un univers Ω est dit infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans ce cas on écrit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

IV / Espaces probabilisés infinis dénombrables

Définition : Un univers Ω est dit infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans ce cas on écrit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$

Exemple : :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

IV / Espaces probabilisés infinis dénombrables

Définition : Un univers Ω est dit infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans ce cas on écrit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$

Exemple : :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il est "trop gros"

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

IV/ Espaces probabilisés infinis dénombrables

Définition : Un univers Ω est dit infini dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans ce cas on écrit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$

Exemple : :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables
- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il est "trop gros"

Remarque : Pour construire une probabilité sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$, il faudra utiliser une autre méthode

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ est appelé une probabilité si :

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Propriété :

- Si $A = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ alors $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\})$

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Propriété :

- Si $A = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ alors $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\})$
- Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ un univers infini dénombrable et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs alors il existe une probabilité P sur Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{\omega_n\}) = p_n$ si et seulement si

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un ensemble fini ou infini dénombrable alors $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est appelé une probabilité si :

- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

Propriété :

- Si $A = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ alors $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\})$
- Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ un univers infini dénombrable et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs alors il existe une probabilité P sur Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{\omega_n\}) = p_n$ si et seulement si $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Principe de monotonie

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Propriété :
Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou infini dénombrable, on a :

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Propriété :
Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou infini dénombrable, on a :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est à dire $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$

Principe de monotonie

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Propriété :

Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou infini dénombrable, on a :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est à dire $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$

Principe de monotonie

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Propriété :

Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou infini dénombrable, on a :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est à dire $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, c'est à dire $B_{n+1} \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) =$

Principe de monotonie

Remarque : La formule des situations équiprobables est ici inutilisable car le cardinal d'un événement est souvent infini

Propriété :

Soit P une probabilité sur un univers Ω fini ou infini dénombrable, on a :

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est à dire $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim P(A_n)$
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, c'est à dire $B_{n+1} \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim P(B_n)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Exemple : On considère l'expérience de lancer un dé indéfiniment. L'univers Ω est l'ensemble des suites (x_n) telle que $x_n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \forall n \in \mathbb{N}$. On remarque que ce n'est pas un ensemble fini.

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : On considère l'expérience de lancer un dé indéfiniment. L'univers Ω est l'ensemble des suites (x_n) telle que $x_n \in \{1;2;3;4;5;6\}, \forall n \in \mathbb{N}$. On remarque que ce n'est pas un ensemble fini.

1. On considère l'événement $A =$ "N'obtenir que des 1".

Principe de monotonie

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : On considère l'expérience de lancer un dé indéfiniment. L'univers Ω est l'ensemble des suites (x_n) telle que $x_n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \forall n \in \mathbb{N}$. On remarque que ce n'est pas un ensemble fini.

1. On considère l'événement $A =$ "N'obtenir que des 1".
2. On considère l'événement $B =$ "Obtenir au moins un 1".

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

V/ Probabilités conditionnelles

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

V/ Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et$P$ une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est

$$P_A(B) = P(B/A) =$$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

V/ Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et$P$ une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

V/ Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors

$$P_A : \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1] \\ B \to P_A(B) \end{array} \quad \text{est une probabilité sur } \Omega$$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

V/ Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et$P$ une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété : Soient A et B deux événements d'un univers Ω et$P$ une probabilité sur Ω tels que $P(A) \neq 0$ alors

$$P_A : \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1] \\ B \to P_A(B) \end{array} \quad \text{est une probabilité sur } \Omega$$

Démonstration :

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

Calculs de probabilités

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$

Calculs de probabilités

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$

Calculs de probabilités

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exemple : Une société a 40% de cadres et 20% d'entre eux parlent anglais. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit un cadre parlant anglais ?

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exemple : Une société a 40% de cadres et 20% d'entre eux parlent anglais. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit un cadre parlant anglais ?

On pose les événements suivants :

- A : "L'employé est un cadre"
- B : "L'employé parle anglais"

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exemple : Une société a 40% de cadres et 20% d'entre eux parlent anglais. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit un cadre parlant anglais ?

On pose les événements suivants :

- A : "L'employé est un cadre"
- B : "L'employé parle anglais"

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exemple : Une société a 40% de cadres et 20% d'entre eux parlent anglais. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit un cadre parlant anglais ?

On pose les événements suivants :

- A : "L'employé est un cadre"
- B : "L'employé parle anglais"

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$,

Calculs de probabilités

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(\emptyset) = 0$ et $P_A(A) = 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$
- Si $B \subset C$ alors $P_A(B) \leqslant P_A(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

Exemple : Une société a 40% de cadres et 20% d'entre eux parlent anglais. Quelle est la probabilité qu'un employé choisi au hasard soit un cadre parlant anglais ?

On pose les événements suivants :

- A : "L'employé est un cadre"
- B : "L'employé parle anglais"

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$, on a donc 8% de chance que l'employé soit un cadre parlant anglais.

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient P une probabilité sur un univers Ω et $A_1, \cdots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.

Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient P une probabilité sur un univers Ω et $A_1, \cdots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.
On a alors :
$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) =$
$P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots A_{n-1}}(A_n)$

Probabilités composées

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Soient P une probabilité sur un univers Ω et $A_1, \cdots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$.
On a alors :
$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) =$
$P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots A_{n-1}}(A_n)$

Exemple : Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire 3 boules sans remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage de 2 couleurs ?

Système complet d'événements

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un univers, une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements de Ω est appelé un système complet d'événements de Ω si

Système complet d'événements

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Soit Ω un univers, une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements de Ω est appelé un système complet d'événements de Ω si

- $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

Système complet d'événements

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

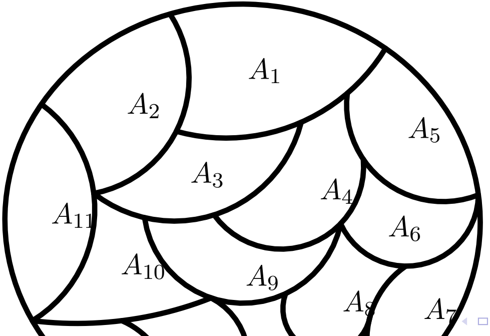
Définition : Soit Ω un univers, une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements de Ω est appelé un système complet d'événements de Ω si

- $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Système complet d'événements

Définition : Soit Ω un univers, une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements de Ω est appelé un système complet d'événements de Ω si

- $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$



Espaces probabilisés

Jourd'huy

Dénombrement

Ensembles finis

Tirages successifs avec remise

Tirages successifs sans remises

Tirages simultanées

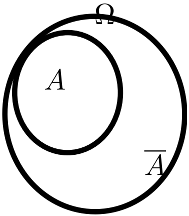
Expériences aléatoires

Espaces probabilisés finis

Espaces probabilisés infinis dénombrables

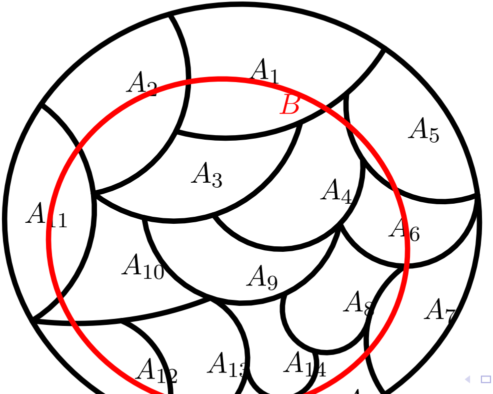
Probabilités conditionnelles

Exemple Soit A un événement d'un univers Ω alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements de Ω



Probabilités totales

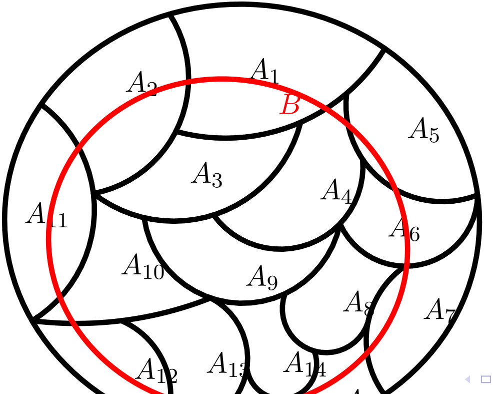
Propriété : Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement



Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)$$



Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : On considère 3 urnes U_1 ; U_2 ; U_3 avec des boules blanches et noires réparties de la façon suivante :

- U_1 : 1 boule blanche et 5 boules noires
- U_2 : 2 boules blanches et 4 boules noires
- U_3 : 3 boules blanches et 3 boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule. On veut savoir quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire.

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : On considère 3 urnes U_1 ; U_2 ; U_3 avec des boules blanches et noires réparties de la façon suivante :

- U_1 : 1 boule blanche et 5 boules noires
- U_2 : 2 boules blanches et 4 boules noires
- U_3 : 3 boules blanches et 3 boules noires.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule. On veut savoir quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire. Pour cela on définit les événements suivants :

- U_i = "On choisi l'urne i"
- N = "La boule tirée est noire"

Formule de Bayes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$

Formule de Bayes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$

Démonstration : Par définition

$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)}$$

Formule de Bayes

Propriété : Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$

Démonstration : Par définition
$P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$ d'après la propriété précédente

Formule de Bayes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Propriété : Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements de l'univers Ω tel que $\forall i \leqslant n, P(A_i) \neq 0$ et B un événement alors $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$

Démonstration : Par définition

$P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}$ d'après la propriété précédente

Remarque : La formule de Bayes permet d'inverser les causes et les conséquences

Formule de Bayes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Une population possède une proportion $p \in]0;1[$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 32 à une personne et on admet que si cette personne est un tricheur alors il est sûr que la carte tirée est un as.
On veut calculer quelle est la probabilité qu'un individu choisi soit un tricheur, sachant qu'il a tiré un as.

Formule de Bayes

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Exemple : Une population possède une proportion $p \in]0;1[$ de tricheurs. On fait tirer une carte d'un jeu de 32 à une personne et on admet que si cette personne est un tricheur alors il est sûr que la carte tirée est un as.
On veut calculer quelle est la probabilité qu'un individu choisi soit un tricheur, sachant qu'il a tiré un as.
On définit les événements suivants :

- T = "L'individu est un tricheur"
- A = "L'individu a tiré un as"

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$

Indépendance

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Indépendance

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Indépendance

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Démonstration :

Indépendance

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Démonstration :

Remarque : Il ne faut pas confondre indépendance $(P(A \cap B) = P(A)P(B))$ et incompatibilité $(A \cap B = \emptyset)$

Indépendance

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Démonstration :

Remarque : Il ne faut pas confondre indépendance $(P(A \cap B) = P(A)P(B))$ et incompatibilité $(A \cap B = \emptyset)$

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω alors $\overline{A}$ et B sont indépendants ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Indépendance

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ sont dits indépendants si l'une des trois propriétés équivalentes qui suivent est vérifiée :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Démonstration :

Remarque : Il ne faut pas confondre indépendance $(P(A \cap B) = P(A)P(B))$ et incompatibilité $(A \cap B = \emptyset)$

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants d'un univers Ω alors $\overline{A}$ et B sont indépendants ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration :

Indépendance mutuelle

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P sont dit mutuellement indépendants si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$

Indépendance mutuelle

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P sont dit mutuellement indépendants si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$

Remarque : Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse.

Indépendance mutuelle

Espaces probabilisés
Jourd'huy
Dénombrement
Ensembles finis
Tirages successifs avec remise
Tirages successifs sans remises
Tirages simultanées
Expériences aléatoires
Espaces probabilisés finis
Espaces probabilisés infinis dénombrables
Probabilités conditionnelles

Définition : Une famille $\{A_1, \cdots, A_n\}$ d'événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P sont dit mutuellement indépendants si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$

Remarque : Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse.

Exemple : On considère l'expérience de lancer deux dés, un rouge et un vert, et on s'intéresse à l'indépendance des événements suivants :

- A = "Le dé rouge donne un chiffre pair"
- B = "Le dé vert donne un chiffre pair"
- C = "La somme des valeurs est paire"