

Projet de Physique P6
STPI/P6/2022 – 18



Oscillation d'un pendule



Etudiants :

Ghassan CHAACHAY

Lou-anne MAUROVIC

Eleanor VAICHERE

Wei WANG

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

[Cette page est laissée intentionnellement vierge.]

Date de remise du rapport : **11/06/2022**

Référence du projet : **STPI/P6/2022 – 18**

Intitulé du projet : **Oscillation d'un pendule**

Type de projet : **Bibliographie, modélisation**

Objectifs du projet (10 lignes maxi) :

- Étude des différents types de mouvements d'un oscillateur en fonctions des conditions initiales
- Etude des mouvements avec les frottements linéaires et quadratiques
- Modéliser le comportement du pendule

Mots-clefs du projet (4 maxi) :

- Pendule
- Oscillations
- Frottements
- Equation différentielle

TABLE DES MATIERES

1. Introduction	5
2. Méthodologie / Organisation du travail	6
3. Travail réalisé et résultats	7
3.1. Etude des mouvements	7
3.2. Vitesse et accélération d'un mouvement sans frottements	8
3.3. Cas d'un mouvement avec frottements	9
3.3.1. Frottements linéiques	9
3.3.2. Frottements quadratiques	10
3.4. Résolution de l'équations différentielle pour 3 cas	11
3.4.1. Mouvement périodique	11
3.4.2. Mouvement critique	13
3.4.3. Mouvement circulaire	14
3.5. Modélisation informatique	17
3.5.1. Simulation Maple	17
3.5.1.1. Cas périodique	17
3.5.1.2. Cas circulaire	18
3.5.1.3. Cas critique	20
3.5.1. Simulation PASCAL	22
3.5.1.1. Simulation sans frottements	22
3.5.1.2. Simulation avec frottements quadratiques	22
3.5.2 Explication de la méthode RK4	24
1. Conclusions et perspectives	25
2. Bibliographie	26
5. Annexes	27
5.1. Résolution de l'équation avec la méthode RK4	27

1. INTRODUCTION

Qu'est ce qu'un pendule ?

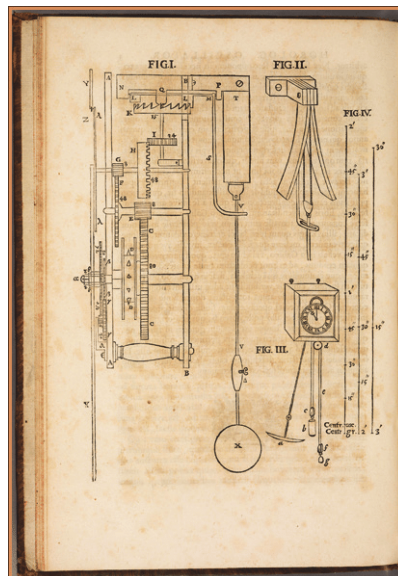
Est considéré comme un pendule tout objet oscillant librement autour d'un axe horizontal sous la seule action de la pesanteur, qualifié de pendule pesant.

Dans notre étude, nous nous sommes penchés sur le cas d'un pendule simple, un pendule théorique dont la masse du fil reliant l'objet au bâti est négligeable et dont la longueur est inextensible.

Au XVIIème siècle, le temps n'était pas défini de manière précise. C'est alors que le pendule apparut.

Les scientifiques comme Galilée, Kepler, Descartes ou Newton sont à l'origine de ces découvertes.

Galilée réalisa une première horloge avec un pendule comme régulateur, et fut suivi par Christiann Huygens :



C'est de cette découverte que vient l'expression « pendule » pour parler d'une horloge.

2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Répartition des tâches :

- **Lou-Anne :**
 - Étude des mouvements généraux, des cas avec frottements (linéiques et quadratiques)
 - Résolution des équations différentielles du mouvement périodique
 - Modélisation mouvement critique sur Maple
 - Rédaction des formules sur TexMacs
 - Poster

- **Eleanor :**
 - Modélisation des mouvements avec le programme Pascal
 - Modélisation des mouvements sans frottements
 - Modélisation des mouvements avec frottements
 - Rédaction du rapport final

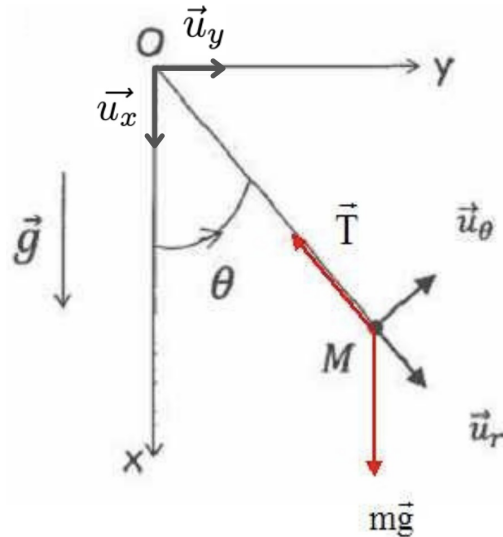
- **Ghassan :**
 - Rédaction de la méthode RK4
 - Etude du mouvement circulaire
 - Etude du mouvement avec frottements

- **Wang :**
 - Etude du mouvement critique
 - Modélisation mouvement circulaire sur Maple

3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

3.1. ETUDE DES MOUVEMENTS

Nous avons étudié le mouvement d'un objet de masse m relié a un fil inextensible de longueur l .



Nous en avons déduit les formules suivantes :

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_x = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Et leurs dérivées :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta \vec{u}_x - \sin\theta \vec{u}_y = -\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

3.2. VITESSE ET ACCELERATION D'UN MOUVEMENT SANS FROTTEMENTS

On pose le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$

On en déduit la vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dl}{dt}\vec{u}_r + l\frac{d\vec{u}_r}{dt} = 0 + l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

avec l une constante.

On en déduit l'accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(l\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{dl}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \frac{d\dot{\theta}}{dt}l\vec{u}_\theta + \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}l\dot{\theta} = 0 + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

$$\vec{a} = \ddot{\theta}l\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Application de la deuxième loi de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$mg\vec{u}_x - T\vec{u}_r = m(\ddot{\theta}l\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r)$$

$$mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) - T\vec{u}_r = m(\ddot{\theta}l\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r)$$

On projette :

projection sur \vec{u}_r :

$$g \cos\theta - \frac{T}{m} = -l\dot{\theta}^2 \rightarrow \text{tension du fil}$$

projection sur \vec{u}_θ :

$$-g \sin\theta = \ddot{\theta}l$$

On obtient donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \rightarrow \text{équation différentielle du mouvement sans frottements}$$

3.3. CAS D'UN MOUVEMENT AVEC FROTTEMENTS

Jusque là, nous avons étudié un cas théorique sans frottements. Dans le cas réel, la masse subit des frottements avec l'air ou un fluide.

Nous allons étudier 2 types de frottements : les frottements linéiques et les frottements quadratiques.

On va donc introduire un coefficient de frottement k.

3.3.1. FROTTEMENTS LINÉIQUES

On applique le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

- * Soit T la tension résultante du fil,
- * P son poids,
- * f la force de frottement :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

$$g\cos\theta\vec{u}_r - g\sin\theta\vec{u}_\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m}\vec{u}_r - \frac{k}{m}v\vec{u}_\theta = \ddot{\theta}l\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

On projette :

projection sur \vec{u}_r :

$$g\cos\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m} = -l\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow l\dot{\theta}^2 + g\cos\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m} = 0$$

projection sur \vec{u}_θ :

$$-g\sin\theta - \frac{k}{m}l\dot{\theta} = \ddot{\theta}l$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{k}{m}\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta + \frac{k}{m}\dot{\theta} = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Pour un mouvement avec des frottements linéiques, on a donc comme équation différentielle:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta + \frac{k}{m}\dot{\theta} = 0}$$

3.3.2. FROTTEMENTS QUADRATIQUES

On étudie maintenant le mouvement en introduisant les frottements quadratiques.

On applique une nouvelle fois le principe fondamentale de la dynamique et on obtient :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{f} = -k' \|\vec{v}\| \vec{v}$$

$$\|\vec{v}\| = \|l\dot{\theta}\vec{u}_\theta\| = l|\dot{\theta}| \times 1 = l|\dot{\theta}|$$

car $l > 0$ et $\|\vec{u}_\theta\| = 1$

$$g \cos\theta \vec{u}_r - g \sin\theta \vec{u}_\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m} \vec{u}_r - \frac{k'}{m} l^2 |\dot{\theta}| \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \ddot{\theta} l \vec{u}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

On projette une nouvelle fois :

projection sur \vec{u}_r :

$$g \cos\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m} = -l \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow l \dot{\theta}^2 + g \cos\theta - \frac{\|\vec{T}\|}{m} = 0$$

projection sur \vec{u}_θ :

$$-g \sin\theta - \frac{k'}{m} l^2 |\dot{\theta}| \dot{\theta} = \ddot{\theta} l$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta + \frac{k'}{m} l |\dot{\theta}| \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta + \frac{k'}{m} l |\dot{\theta}| \dot{\theta} = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Pour un mouvement avec des frottements quadratiques.. on a donc comme équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta + \frac{k'}{m} l |\dot{\theta}| \dot{\theta} = 0}$$

3.4. RÉOLUTION DE L'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE POUR 3 CAS

On utilise le théorème de l'énergie mécanique : Pour un mouvement sans frottements, l'énergie mécanique E_m se conserve.

On a donc :

$$E_m = E_p + E_c$$

$$E_p(t) + E_c(t) = E_p(0) + E_c(0)$$

$$-mgl \cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} = -mgl + \frac{ml^2\dot{\theta}_0^2}{2}$$

$$-\frac{g}{l} \cos\theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{l} + \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}$$

$$-2\omega^2 \cos\theta + \dot{\theta}^2 = -2\omega^2 + \dot{\theta}_0^2$$

$$\dot{\theta}^2 = -2\omega^2 + \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 \cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos\theta)}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos\theta)}} = \frac{d\theta}{\sqrt{2}\omega \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos\theta}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos\theta}} d\theta$$

Les valeurs des conditions initiales et $\dot{\theta}$ varient selon le type de mouvement.

3.4.1. MOUVEMENT PÉRIODIQUE

$$\dot{\theta}_0 < 2\omega$$

On pose $l - l^2 \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2g} = l \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 - l \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2g} \Leftrightarrow -\cos\alpha = -1 + \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2\omega^2}$

avec $0 < \alpha < \pi$ et $\alpha = \theta_{\max}$ l'amplitude maximale

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos\psi}} d\psi$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}} d\psi$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos\psi}} d\psi$$

On effectue un changement de variable, on pose :

$$kx = \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$k^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$u = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{et} \quad x = \frac{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{d \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{dx} = \frac{d \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{d\psi} \times \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \times \frac{d\psi}{dx} = \frac{dkx}{dx} = k$$

$$\text{d'où} \quad d\psi = \frac{dkx}{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

$$\text{pour } \psi = 0 \rightarrow x = \frac{\sin(0)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 0$$

On obtient donc finalement :
$$t = \frac{1}{2\omega} \int_0^u \frac{\frac{dkx}{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)}}{\sqrt{k^2 - (kx)^2}}$$

On a
$$\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \sqrt{1 - x^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{1 - x^2 k^2}$$

Finalement,

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^u \frac{k dx}{\sqrt{-x^2 k^2 + k^2 \sqrt{1 - x^2 k^2}}}$$

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - x^2 k^2}}$$

$$u = \text{sn}(\omega t)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sn}(\omega t) \text{sn}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Nous passons maintenant au calcul de k :
$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2k^2$$

$$k^2 = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1 - l \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2g}}{2} = +l \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{4g}$$

$$k = \sqrt{\frac{l (\dot{\theta}_0)^2}{g \cdot 4}} = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donc
$$\boxed{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \text{sn}(\omega t) \quad \text{avec} \quad -\pi < \theta < \pi}$$

3.4.2. MOUVEMENT CRITIQUE $\dot{\theta}_0 = 2\omega$

Nous considérons maintenant le problème de Cauchy suivant : $\ddot{\theta} + \omega \sin\theta = 0$ avec $\omega^2 = \frac{g}{l}$

Conditions initiales : $t = 0, \theta(0) = \theta_0 > 0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

Bilan énergétique : $E_p + E_c = E_m$

On a donc $\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{ml^2\dot{\theta}_0^2}{2} = mgl \cos\theta - mgl \cos\theta_0$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Posons maintenant δ_0 la valeur minimale de $\dot{\theta}^2$, qui représentent l'énergie minimale nécessaire pour mettre en mouvement la masse. Cette valeur est minimale pour

On obtient : $\delta_0 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 + \cos\theta_0)$

Dans le cas critique, δ_0 est égale à 0

On a donc : $\dot{\theta}_0^2 = 2\omega^2(1 + \cos\theta_0)$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(1 + \cos\theta)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(1 + \cos\theta)$$

$$d\theta = \sqrt{2}\omega\sqrt{1 + \cos\theta} dt$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos\theta}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int \frac{d\psi}{\sqrt{2 - 2\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}} \text{ avec } 1 - \cos(\psi) = 2\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$t = \frac{1}{2\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}}$$

Car on sait que: $\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = u, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{du}{d\psi}, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u$

On a donc : $t = \frac{1}{\omega} \int_{\sin\frac{\theta_0}{2}}^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$

$$\omega t = \int_{\sin\frac{\theta_0}{2}}^0 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} + \int_0^u \frac{du}{1 - u^2}$$

$$\omega t = -\int_0^{\sin\frac{\theta_0}{2}} \frac{du}{1 - u^2} + \int_0^u \frac{du}{1 - u^2}$$

$$\text{Donc, } \int_0^u \frac{du}{1 - u^2} = \int_0^{\sin\frac{\theta_0}{2}} \frac{du}{1 - u^2} + \omega t$$

$$u = \text{th}\left(\int_0^{\sin\frac{\theta_0}{2}} \frac{du}{1 - u^2} + \omega t\right)$$

Finalement on a

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{th}\left(\int_0^{\sin\frac{\theta_0}{2}} \frac{du}{1 - u^2} + \omega t\right)$$

3.4.3. MOUVEMENT CIRCULAIRE $\dot{\theta}_0 > 2\omega$

On considère le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 & \text{avec } \omega^2 = \frac{g}{l} \\ t = 0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0 \end{cases}$

Bilan énergétique : $E_m = E_c + E_p$

Le bilan énergétique dans le cas d'un système sans frottement, où l'énergie mécanique se conserve, est le suivant :

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = E_c(0) + E_p(0) = E_m(0)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

Posons maintenant δ_0 la valeur minimale de $\dot{\theta}^2$, qui représentent l'énergie minimale nécessaire pour mettre en mouvement la masse.

Déterminons la valeur de θ_m pour laquelle $\dot{\theta}^2$ est minimale:

$$\left(\frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_m} = 0 \Leftrightarrow -2\omega^2 \sin(\theta_m) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta_m) = 0 \Leftrightarrow \theta_m = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

donc :

$$\delta_0 = (\dot{\theta}^2)_{\theta=\theta_m} = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos(\theta_m) - \cos(\theta_0))$$

$$\delta_0 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0))$$

Pour le mouvement circulaire : $\delta_0 > 0$

$\dot{\theta}^2 \geq \delta_0 > 0$ donc $\dot{\theta}$ ne s'annule pas.

On suppose que $\dot{\theta}_0 \geq 0$ et $\theta_0 \in]-\pi; \pi[$

$$\delta_0 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0)) > 0$$

$$\text{donc } \dot{\theta}_0^2 > 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0))$$

$\Rightarrow \dot{\theta}_0 > 0$ donc $\dot{\theta} > 0$ alors θ est croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} (signe de $\dot{\theta}_0 =$ signe de $\dot{\theta}$)

On sait que : $\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0)) + 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0)) + 2\omega^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$\dot{\theta}^2 = \delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))$$

$$\text{donc : } \dot{\theta} = \sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))} = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

$$\Rightarrow d\theta = \sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))} dt$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}}$$

$$\Rightarrow t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}}$$

$$t(\theta + 2\pi) = \int_{\theta_0}^{\theta+2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}} + \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}}$$

Or $\frac{1}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}}$ est une fonction périodique donc pour un intervalle de longueur 2π l'intégrale ne change pas.

$$\text{donc } \int_{\theta_0}^{\theta+2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}} = t(\theta) = T$$

$$\text{donc } t(\theta + \varepsilon\pi) = t(\theta) + t(2\pi) = t(\theta) + T$$

$$* \theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi \text{ (mouvement circulaire)}$$

Déterminons $t(\theta)$:

$$t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\theta))}} \text{ par changement de variable}$$

$$\begin{cases} x = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{d\psi}{2} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ d\psi = \frac{2dx}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{2dx}{\sqrt{1 - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}} \end{cases}$$

$$t(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{\delta_0 + 2\omega^2(1 + \cos(\psi))}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}}$$

$$t(\theta) = \int_{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^u \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2(1-2x^2)}}$$

$$\text{Or } \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2(1-2x^2) = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2 - 4\omega^2 x^2$$

$$\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2(1-2x^2) = (\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2) \left(1 - \frac{4\omega^2 x^2}{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2}\right)$$

On pose:

$$k^2 = \frac{4\omega^2 x^2}{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2} = \frac{4\omega^2}{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) + 2\omega^2 + 4\omega^2} = \frac{4\omega^2}{4\omega^2 + \dot{\theta}_0^2} \leq 1$$

$$\text{donc } t(\theta) = \int_{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^u \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2} \sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}}$$

$$\text{Enfin } t(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}} \int_{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}$$

$$\frac{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}}{2} t(\theta) = - \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} + \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

$$\text{donc } \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \frac{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}}{2} t(\theta) + \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u = \text{sn}\left(\frac{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}}{2} t(\theta) + \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}\right)$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$t(2\pi) = \int_{\theta_0}^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}} - \int_0^{\theta_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}}$$

La fonction est 2π périodique donc l'intégrale ne change pas tant que l'intervalle est de longueur 2π .

$$t(2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}} - \int_0^{\theta_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 + 2\omega(\cos(\psi) - \cos(\theta_0))}}$$

Par le changement de variable $x = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$.

On obtient:

$$t(2\pi) = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}} \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right)$$

on a une fonction paire donc: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

$$t(2\pi) = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}} \times \left(2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right)$$

$$T = t(2\pi) = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}} \times \left(2 \times K(k) - \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right) \quad \text{avec } k^2 = \frac{4\omega^2}{4\omega^2 + \delta_0} \leq 1$$

avec K la fonction elliptique complète de première espèce.

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}} \times \left(2 \times K(k) - \int_0^{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right)$$

*On calcule $\theta(t) = 2\arcsin\left(\operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{\delta_0 + 4\omega^2}}{2}t + \int_0^{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right)\right)$

pour $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$

On prolonge par imparité sur $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ pour $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

3.5. MODÉLISATION INFORMATIQUE

3.5.1. SIMULATION MAPLE

Voici la simulation Maple pour le mouvement périodique, sans frottements.

3.5.1.1. CAS PÉRIODIQUE

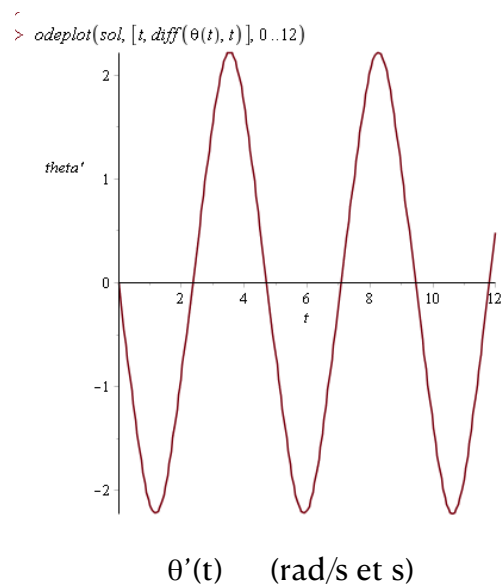
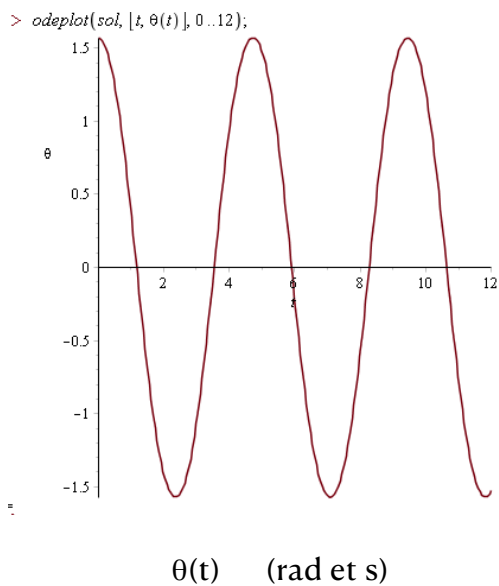
Résolution numérique

```

> eq := diff(θ(t), t, t) +  $\frac{\pi^2}{4}$  · sin(θ(t)) = 0;
                                 $eq := \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \frac{\pi^2 \sin(\theta(t))}{4} = 0$  (1)
=
> ini := θ(0) =  $\frac{\pi}{2}$ , D(θ)(0) = 0;
                                 $ini := \theta(0) = \frac{\pi}{2}, D(\theta)(0) = 0$  (2)
> sol := dsolve({eq, ini}, {θ(t)}, numeric);
                                 $sol := \text{proc}(x\_rkf45) \dots \text{end proc}$  (3)
> sol(1);
                                 $[t = 1., \theta(t) = 0.395321238912358, \frac{d}{dt} \theta(t) = -2.13405686150319]$  (4)
> sol(0);
                                 $[t = 0., \theta(t) = 1.57079632679490, \frac{d}{dt} \theta(t) = 0.]$  (5)
> eval(θ(t), sol(1));
                                0.395321238912358 (6)
> eval([t, θ(t)], sol(0));
                                [0., 1.57079632679490] (7)

```

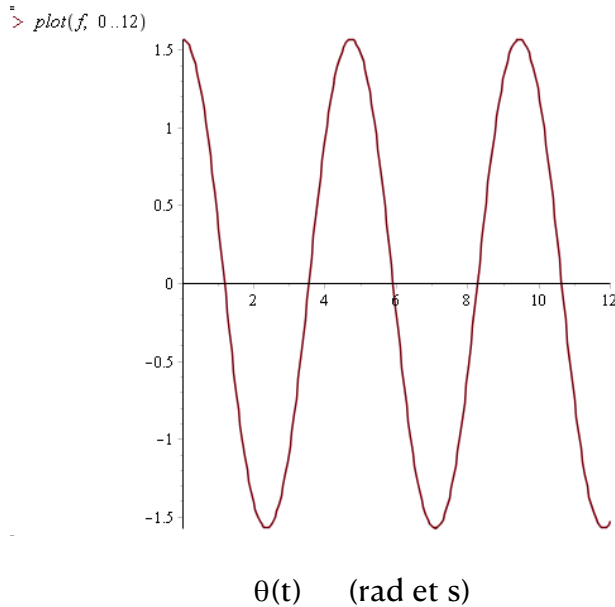
Equation du cas périodique sur Maple



Résolution mathématique

```
> f := t -> 2 * arcsin( sin( Pi/4 ) * JacobiSN( Pi/2 * t + EllipticK( sin( Pi/4 ) ), sin( Pi/4 ) ) );
      f := t -> 2 * arcsin( sin( Pi/4 ) * JacobiSN( t * Pi/2 + EllipticK( sin( Pi/4 ) ), sin( Pi/4 ) ) )
> f(0); evalf(%); D(f)(0); evalf(%);
```

Equation du mouvement périodique avec la méthode mathématique



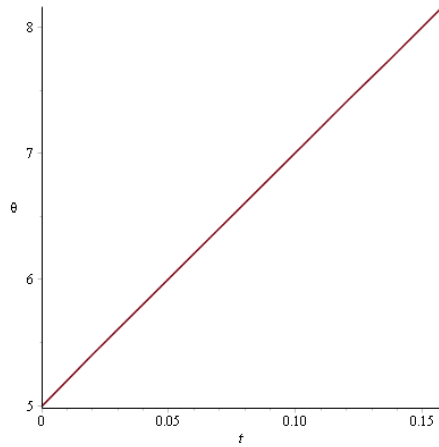
On a bien des oscillations sans frottements car on a des oscillations sans atténuations.

On a les mêmes oscillations de θ donc la résolution mathématique confirme la résolution numérique.

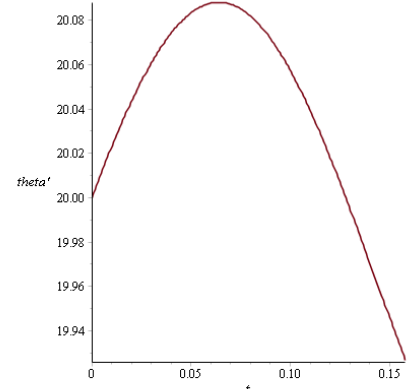
3.5.1.2. CAS CIRCULAIRE

```
> eq := diff(theta(t), t, t) + Pi/4 * sin(theta(t)) = 0;
      eq = d^2 theta(t) + 1/4 * Pi^2 * sin(theta(t)) = 0 (1)
> ini := theta(0) = 5, D(theta)(0) = 20;
      ini = theta(0) = 5, D(theta)(0) = 20 (2)
> sol := dsolve({eq, ini}, {theta(t)}, numeric);
      sol = proc(x_rkf45) ... end proc (3)
> sol(1); sol( (1/5) * EllipticK( Pi/20 ) )
      [ t = 1., theta(t) = 24.9693279691155, d/dt theta(t) = 20.0865476096223 ]
      [ t = 0.316124523656842, theta(t) = 11.3112891244872, d/dt theta(t) = 20.0033137981237 ] (4)
> sol(0);
      [ t = 0., theta(t) = 5., d/dt theta(t) = 20. ] (5)
> eval(theta(t), sol(1));
      24.9693279691155 (6)
> eval([t, theta(t)], sol(0));
      [ 0., 5. ] (7)
>
```

```
> odeplot(sol, [t, theta(t)], 0..0.1580622618);
```



```
> odeplot(sol, [t, diff(theta(t), t)], 0..0.1580622618)
```



$\theta'(t)$ (rad/s et s)

```
> f := t -> 2 * arcsin(JacobiSN(10 * t, Pi/20));
f := t -> 2 * arcsin(JacobiSN(10 * t, 1/20 * pi))
=
> f(0); evalf(%); D(f)(0); evalf(%); f(1/5) * EllipticK(Pi/20); evalf(%);
```

0
0.
20
20.

$2 \arcsin\left(\text{JacobiSN}\left(2 \text{EllipticK}\left(\frac{1}{20} \pi\right), \frac{1}{20} \pi\right)\right)$

$1.147270740 \cdot 10^{-9}$

(9)

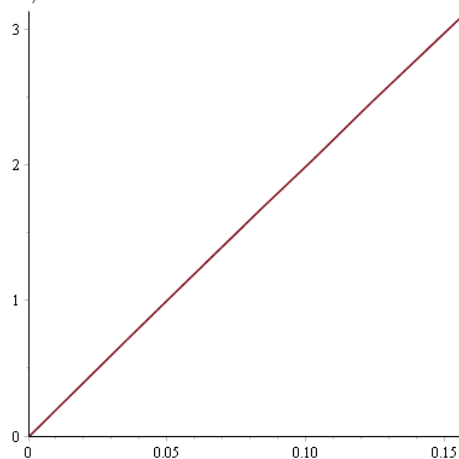
```
> T := (1/5) * EllipticK(Pi/20); evalf(%); evalf(T/2);
```

$T = \frac{1}{5} \text{EllipticK}\left(\frac{1}{20} \pi\right)$

0.3161245236
0.1580622618

(11)

```
> plot(f, 0..0.1580622618)
```



Equations mathématiques du cas circulaire et courbe de
 $\theta(t)$ (rad et s)

Dans le cas circulaire, le pendule dessine des tours autour de son centre. De ce fait, on a bien une évolution linéaire de θ .

La courbe θ' désigne une seule oscillation. θ' augmente puis diminue car le pendule ralentit en arrivant en haut puis ré-accélère.

3.5.1.3. CAS CRITIQUE

```

> eq := diff(θ(t), t, t) + π2/4 * sin(θ(t)) = 0;
                                     eq := d2/dt2 θ(t) + 1/4 π2 sin(θ(t)) = 0 (1)
=
> ini := θ(0) = Pi/2, D(θ)(0) = Pi/sqrt(2);
                                     ini := θ(0) = 1/2 π, D(θ)(0) = 1/2 π √2 (2)
=
> sol := dsolve({eq, ini}, {θ(t)}, numeric);
                                     sol := proc(x_rkf45) ... end proc (3)
=
> sol(1);
                                     [t = 1., θ(t) = 2.79801482776689, d/dt θ(t) = 0.537042549395949] (4)
=
> sol(0);
                                     [t = 0., θ(t) = 1.57079632679490, d/dt θ(t) = 2.22144146907919] (5)
=
> eval(θ(t), sol(1));
                                     2.79801482776689 (6)
=
> eval([t, θ(t)], sol(0));
                                     [0., 1.57079632679490] (7)
=
< unblock solve;

```

Equations du cas critique

Pour l'équation on a choisi $\omega^2 = \frac{\pi^2}{2}$

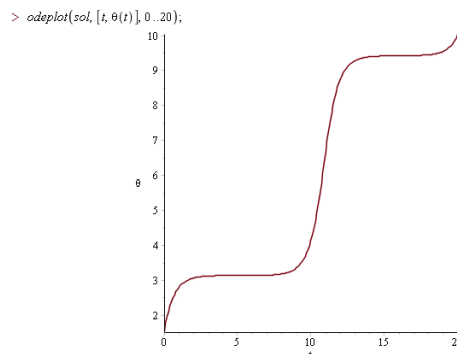
Pour les conditions initiales on a $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta'(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

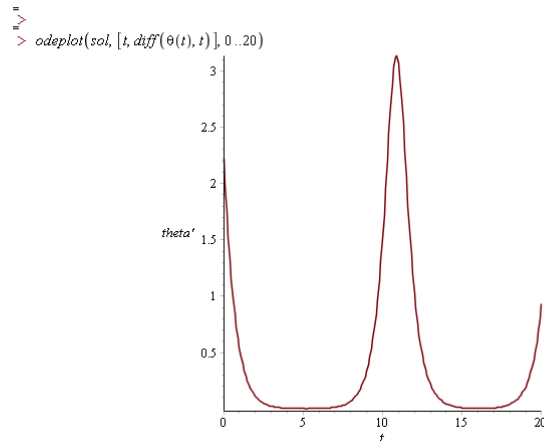
On demande une solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales énoncées par une méthode numérique (rk4) (voir annexe : méthode RK4)

On exécute pour t=1 puis pour t=0 afin de vérifier les conditions initiales.

Ensuite on fait une évaluation de la valeur obtenue pour t= 1 et t=0.

Après avoir importé la bibliothèque qui permet de tracer les courbes, on demande l'affichage de la courbe de θ en fonction de t puis la courbe de θ' en fonction de t pour t compris entre 0 et 20.





$\theta'(t)$ (rad/s) et (s)

On entre ensuite la fonction que l'on a résolue mathématiquement avec les mêmes paramètres.

On demande de calculer la fonction f et sa dérivé pour $t=0$, on voit que le résultat donné est une valeur exacte que l'on évalue pour comparer avec les courbes précédentes.

Enfin on affiche la courbe de θ en fonction de t entre 0 et 20 et on remarque que l'on obtient une allure différente.

En effet, le maximum de cette courbe correspond à celui du premier palier sur la courbe obtenue par méthode numérique, correspondant à $\pi/2$. Pour la première courbe, on peut en déduire qu'après avoir parcouru un demi tour (π) en partant de 0, le pendule s'arrête à sa position d'équilibre $\pi/2$ puis repart après un certain temps comme dans un mouvement circulaire. On remarque que la différence entre le premier et le deuxième palier vaut 2π (environ 6.28) ce qui correspond à 1 tour.

Avec la méthode mathématique, le pendule reste infiniment à sa position d'équilibre $\frac{\pi}{2}$.

```

>
> f := t -> 2 * arcsin( tanh( int( 1 / (1 - x^2), x = 0 .. sqrt(2) / 2 ) + Pi / 2 * t ) );

```

$$f = t \rightarrow 2 \arcsin \left(\tanh \left(\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{-x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \pi t \right) \right)$$

```

> f(0), evalf(%); D(f)(0), evalf(%);

```

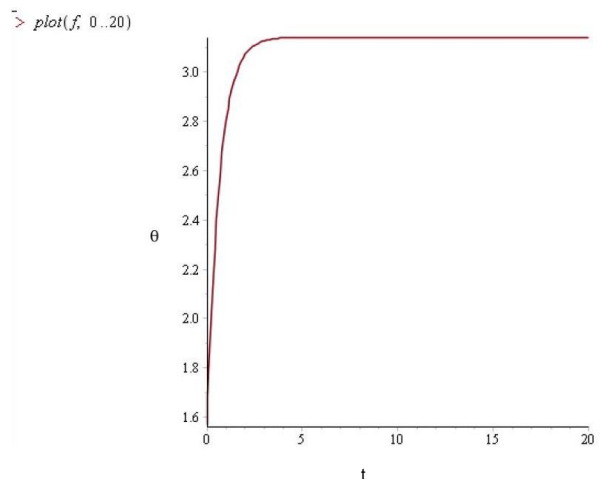
$$\frac{1}{2} \pi$$

1.570796327

$$\frac{1}{2} \pi \sqrt{2}$$

2.221441469

Equation mathématique du cas critique



$\theta(t)$ (rad et s) => Pendule qui reste à sa position d'équilibre infiniment.

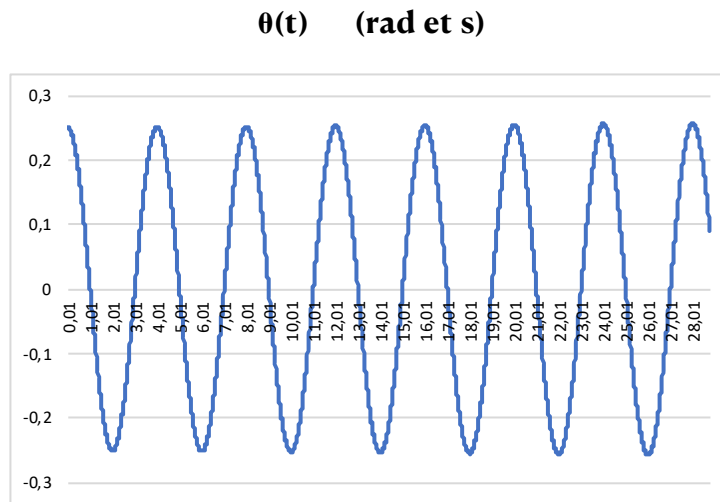
A quoi est dû cette différence?

La méthode numérique a ses limites telle l'approximation des valeurs comme $\frac{\pi}{2}$.

3.5.1. SIMULATION PASCAL

3.5.1.1. SIMULATION SANS FROTTEMENTS

Pour une simulation sans frottement, on a bien un mouvement périodique sans atténuations.



3.5.1.2. SIMULATION AVEC FROTTEMENTS QUADRATIQUES

Voici l'allure de la courbe représentant $\ddot{\theta}$ par rapport au temps pour différentes valeurs de k (coefficient de frottements). On a bien des oscillations qui s'atténuent au cours du temps et de plus en plus vite quand k croît.

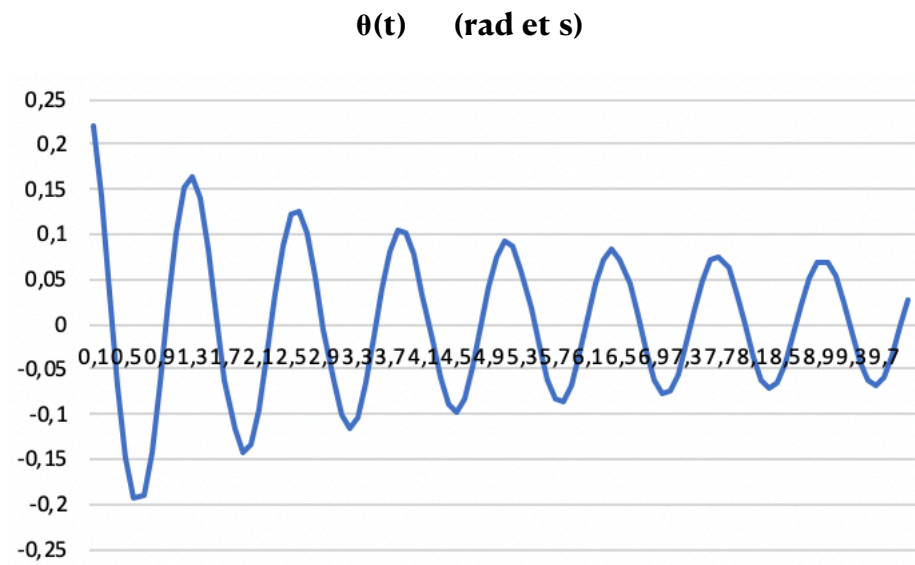


Figure 1 : coefficient de frottement $k=1$

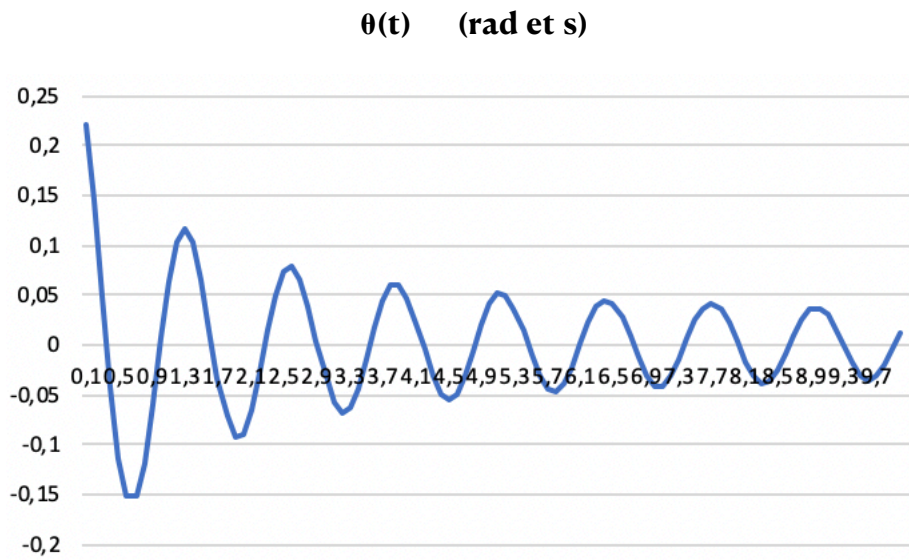


Figure 1 : coefficient de frottement $k=2$

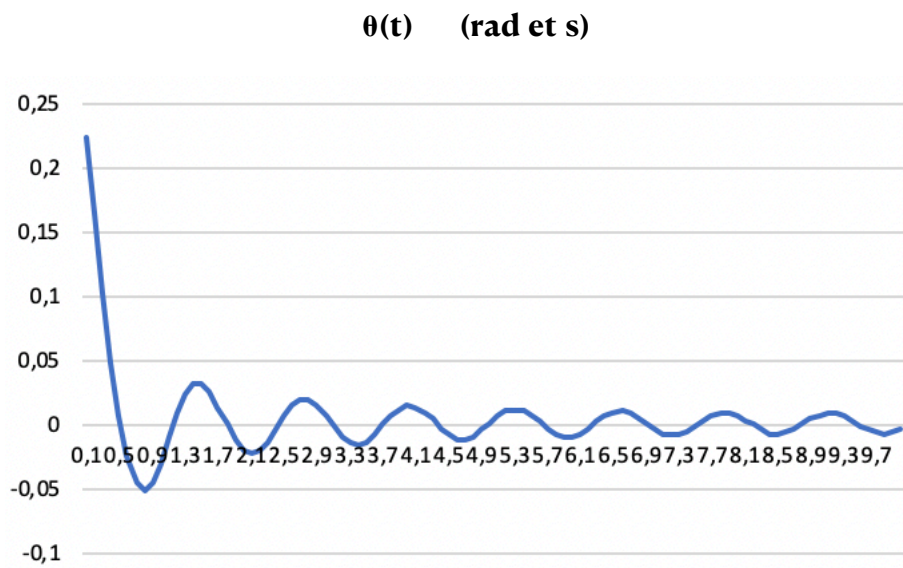


Figure 1 : coefficient de frottement $k=10$

3.5.2 EXPLICATION DE LA MÉTHODE RK4

La méthode Runge-Kutta d'ordre 4 et noté RK4 est une méthode d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles, elle est la plus précise parmi d'autres (dont la méthode d'Euler, Les méthodes Runge-Kutta d'ordre 1 et 2) et est donc la plus utilisée. Celle-ci permet d'obtenir la fonction solution sous forme vectorielle. Il s'agit ensuite de retrouver les composantes linéaires en revenant sur la vectorisation du problème de Cauchy.

En effet, La méthode de Runge-Kutta se base sur les méthodes de résolution numériques d'Euler, qui consiste à calculer une valeur approchée de $Y(t_n)$. Il faut alors subdiviser notre intervalle de résolution en n intervalles égaux, permettant d'atteindre cette valeur approchée pour tout instant $t_n = n \cdot h$.

Le but de la méthode RK4 est d'améliorer la précision qu'offre la résolution par la méthode d'Euler, cette dernière permet d'exprimer l'intégrale de t_n à t_{n+1} sous la forme suivante :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt$$

Afin d'affiner ce résultat, qui laisse une erreur d'approximation importante, On se base sur la méthode Simpson, qui est le fondement de la méthode Runge-Kutta 4.

On considère le problème de cauchy suivant :

$$Y' = F(t, Y) \text{ et } Y(t_0) = Y_0 \text{ avec } t \in \{t_0, \dots, T\}$$

$Y_n = Y(t_n)$; une approximation de solution Y en t_n du problème de Cauchy.

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

D'où:

$$K_1 = f(t_n ; Y_n)$$

$$K_2 = f(t_n + \frac{h}{2} ; Y_n + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = f(t_n + \frac{h}{2} ; Y_n + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = f(t_n + h ; Y_n + h K_3)$$

La méthode est RK4 est la suivante:

Choisissons une subdivision de l'intervalle de temps $[t_0, \dots, T]$

On a $t_n = t_0 + nh$ pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ avec $h = \frac{T - T_0}{N+1}$.

On pose aussi :

où k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des évaluations des pentes :

* K_1 : pente en Y_n

* K_2 pente évaluée en $t_n + h/2$ en utilisant K_1 pour estimer $y(t_n + h/2)$

* K_3 pente évaluée en $t_n + h/2$ en utilisant K_2 pour estimer $y(t_n + h/2)$

* K_4 pente évaluée en $t_n + h$ en utilisant K_3 pour estimer $y(t_n + h)$.

L'idée est que la valeur suivante (Y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (Y_n) et du produit de la taille de l'intervalle h par la pente estimée.

1. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons mené une étude sur les différents mouvements d'oscillations d'un pendule et nous avons pu modéliser ceux-là grâce à des méthodes et des logiciels informatiques que nous avons appris à maîtriser tout au long de ce projet.

Ce projet fut enrichissant sur le plan technique et humain.

Il nous a permis d'élargir nos connaissances sur les mathématiques et l'informatique.

De plus, il nous a permis de nous rencontrer et de travailler ensemble. En effet, nous ne nous connaissions pas avant de commencer cet étude du pendule. Cela nous a appris à travailler en équipe avec des personnes inconnues et apprendre à se connaître pour créer une cohésion d'équipe et produire ainsi un travail de qualité.

C'est une compétence nécessaire dans le métier d'ingénieurs d'aujourd'hui que nous souhaitons tous approfondir dans les années qui viennent.

Enfin, nous souhaitons remercier M. GLEYSE pour son aide et son écoute tout au long de ce projet, que nous n'aurions pu mener à bien sans sa présence.

2. BIBLIOGRAPHIE

[1] lien internet : http://perso.numericable.fr/michel.aubert2/meca/mecanique_chapitre8.pdf

[2] lien internet : https://uel.unisciel.fr/physique/meca/meca_ch09/co/chapitre9_02.html

[3] lien internet : https://uel.unisciel.fr/physique/vibrapropa/vibrapropa_ch01/co/simuler_ch1_04.html

[3] lien internet : <https://perso.crans.org/besson/infoMP/TPs/solutions/TP5.html>

[4] lien internet : http://www.ac-grenoble.fr/disciplines/spc/file/ressources/Continuite_peda/TS_Osc

[5] lien internet : https://physique.ensc-rennes.fr/tp_pendules_texteV2.php

[6] lien internet : <https://www.physagreg.fr/mecanique/m12/M12-chute-libre-frottements.pdf>

[7] lien internet : <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Formules-de-physique-page-2>

[8] Rapport P6 2021 et 2020

5. ANNEXES

5.1. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION AVEC LA MÉTHODE RK4

Maintenant, on résout l'équation suivante en utilisant la méthode RK4 :

$$\ddot{\theta} + \frac{kl}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

*Conditions initiales: $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ et $z(0) = z_0$ (avec $z = \dot{\theta}$)

On note : $y = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix}$ et $y' = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$

→ Nous avons un problème de cauchy :

$$\begin{cases} y' = F(t; y) = F(t; \theta; \dot{\theta}) = F(t; \theta; z) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^2 \text{ avec } t \in [t_0, T]$$

que nous pourrions écrire sous la forme scalaire:

$$F(t, \theta, z) = \begin{pmatrix} f_1(t; \theta; z) \\ f_2(t; \theta; z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\frac{kl}{m} |z| z - \frac{g}{l} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

*Choisissons une subdivision d'intervalle de $[t_0, T]$.

Par exemple si $t_0 = 0$, nous prenons un pas constant $h = t_{i+1} - t_i$ pour $i \in \{0; \dots; N\}$ et $t_i = ih$ pour

$i \in \{0, \dots, N+1\}$ avec $h = \frac{T}{N+1}$ et nous obtenons l'équation récurrente vectorielle dans \mathbb{R}^2 :

$$y_n = (\theta_n; z_n) \in \mathbb{R}^2$$

ce qui donne : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

Avec $K_i = (k_{i1}; k_{i2}), i = \{1; \dots; 4\}$ et y_0 donné.

Et donc: $K_1 = F(t_n; y_n)$

$$K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} K_2\right)$$

$$K_4 = F(t_n + h; y_n + h K_3)$$

En utilisant les fonctions scalaires f_i , on obtient :

$$* K_1 = F(t_n; y_n) = F(t_n; \theta_n; z_n)$$

$$\rightarrow k_{11} = f_1(t_n; y_n) = f_1(t_n; \theta_n; z_n) = z_n$$

$$\rightarrow k_{12} = f_2(t_n; y_n) = f_2(t_n; \theta_n; z_n) = \frac{-kl}{m} |z_n| z_n - \frac{g}{l} \sin(\theta_n)$$

$$* K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} K_1\right) = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \left(\theta_n\right) + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}\right)$$

$$K_2 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \begin{pmatrix} \theta_n + \frac{h}{2} k_{11} \\ z_n + \frac{h}{2} k_{12} \end{pmatrix}\right) = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \theta_n + \frac{h}{2} k_{11}; z_n + \frac{h}{2} k_{12}\right) = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \theta_n + \frac{h}{2} z_n; z_n + \frac{h}{2} k_{12}\right)$$

$$\rightarrow k_{21} = f_1\left(t_n + \frac{h}{2}; \theta_n + \frac{h}{2} z_n; z_n + \frac{h}{2} k_{12}\right) = z_n + \frac{h}{2} k_{12}$$

$$\rightarrow k_{22} = f_2\left(t_n + \frac{h}{2}; \theta_n + \frac{h}{2} z_n; z_n + \frac{h}{2} k_{12}\right) = \frac{-kl}{m} |z_n + \frac{h}{2} k_{12}| (z_n + \frac{h}{2} k_{12}) - \frac{g}{l} \sin\left(\theta_n + \frac{h}{2} z_n\right)$$

$$* K_3 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{h}{2} K_2\right) = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \left(\theta_n\right) + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix}\right)$$

$$K_3 = F\left(t_n + \frac{h}{2}; \theta_n + \frac{h}{2} k_{21}; z_n + \frac{h}{2} k_{22}\right)$$

$$\rightarrow k_{31} = z_n + \frac{h}{2} k_{22}$$

$$\rightarrow k_{32} = \frac{-kl}{m} |z_n + \frac{h}{2} k_{22}| (z_n + \frac{h}{2} k_{22}) - \frac{g}{l} \sin\left(\theta_n + \frac{h}{2} k_{21}\right)$$

$$* K_4 = F(t_n + h; y_n + h K_3) = F\left(t_n + h; \left(\theta_n\right) + h \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \end{pmatrix}\right)$$

$$K_4 = F(t_n + h; \theta_n + h k_{31}; z_n + h k_{32})$$

$$\rightarrow k_{41} = z_n + h k_{32}$$

$$\rightarrow k_{42} = \frac{-kl}{m} |z_n + h k_{32}| (z_n + h k_{32}) - \frac{g}{l} \sin(\theta_n + h k_{31})$$

Nous obtenons les 2 équations récurrentes scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{h}{6} (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \end{cases}$$