Exercice : Accélération d'un gaz dans une tuyère

De l'air comprimé se détend dans une tuyère. Les données et hypothèses sont les suivantes :

• La tuyère est parfaitement calorifugée.

• L'air est assimilé à un gaz parfait, de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1{,}00$ kJ.K^{-1}.kg^{-1} et de masse molaire $M = 28{,}8$ g.mol^{-1} ;

• A l'entrée de la tuyère, sa vitesse est négligeable, et l'air est dans un état A : $T_A = 600$ K et $P_A = 5{,}00$ bar.

• A la sortie de la tuyère, sa pression est $P_B = 1{,}00$ bar. La section de sortie de la tuyère est $\Sigma = 1{,}00$ cm^2.

1) La détente est isentropique. Déterminer :

1a) la température de sortie T_B de l'air ;

1b) la vitesse de sortie $||\vec{v_B}||$ de l'air ;

1c) le débit massique d'air.

On modélise l'irréversibilité de la détente par une transformation polytropique de coefficient $k = 1{,}36$.

Cela signifie que la pression et le volume massique du gaz sont reliés par la relation : $P.v^k$=constante

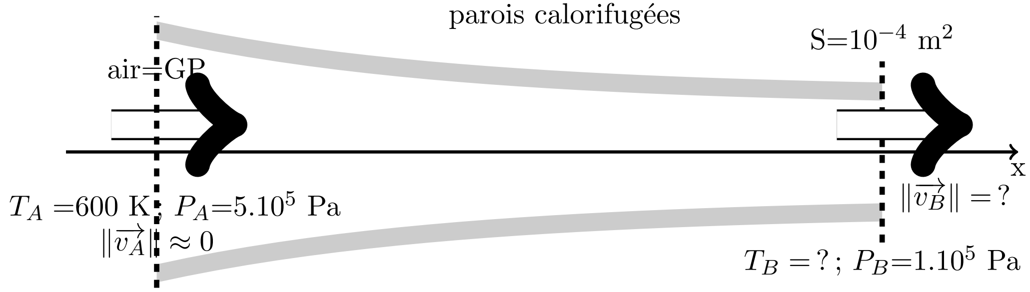
2.a Déterminer à nouveau la vitesse et le débit d'air.

2.b Représenter ces deux détentes dans un diagramme entropique (*on assimilera les transformations à des segments*).

2.c Déterminer l'énergie dissipée ε à la traversée de la tuyère.

Au cours d'une transformation de l'état initial (i) à l'état final (f), l'énergie dissipée ε vaut $\varepsilon = \int_i^f T\delta s^c$

Correction



Les parois de la tuyère sont calorifugées $\Rightarrow \dot{Q} = 0$ (transformation adiabatique).

La détente est **isentropique** $\Rightarrow s_A = s_B$.

1.a) Déterminer la température de sortie T_B.

On peut utiliser la loi de Laplace car la détente est isentropique : $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = constante$.

$P_A^{1-\gamma}T_A^{\gamma} = P_B^{1-\gamma}T_B^{\gamma}$ ce qui donne $T_B = T_A \left(\dfrac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Mais γ n'est pas une donnée de problème, il faut donc exprimer γ en fonction de r et c_P.

$$m\, c_p = \frac{\gamma\, n\, R}{\gamma - 1} \Rightarrow c_p(\gamma - 1) = \gamma \frac{R}{M} \Rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_p - \frac{R}{M}}.$$

On réinjecte dans la loi de Laplace $\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{-R}{M\, c_p} = \frac{-r}{c_p}$:

$$\boxed{T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{-r}{c_p}}}$$

Application numérique : $r = \dfrac{8,314}{0,0288} = 288,7$ J. K^{-1}. kg^{-1}

$T_B = 600\left(\dfrac{5,00}{1,00}\right)^{\frac{-8,314}{1,00.10^3\times 0,0288}}$

$T_B = 377$ K

1.b) Déterminer la vitesse de sortie $\|\overrightarrow{v_B}\|$ de l'air.

Il faut ici écrire le premier principe des fluides en écoulement en régime permanent.

Il n'y a pas de transfert thermique ni de travail utile (pas de pièces mobiles). L'énergie potentielle ne varie pas.
Premier principe des fluides en écoulement en régime permanent :

$$\dot{m}\left[(h_B + e_{cB}) - (h_A + e_{cA})\right] = \dot{Q} + \dot{W}_u = 0$$

Ecrire les variations d'enthalpie massique et d'énergie cinétique massique en fonction des températures et des vitesses. En déduire l'expression de $\|\overrightarrow{v_B}\|$.

Il n'y a pas de transfert thermique (parois calorifugées) ni de travail utile (pas de pièces mobiles). L'énergie potentielle ne varie pas.
Premier principe des fluides en écoulement en régime permanent :

$$\dot{m}\left[(h_B + e_{cB}) - (h_A + e_{cA})\right] = 0$$

L'air est un gaz parfait et la deuxième loi de Joule donne : $h_B - h_A = c_p(T_B - T_A)$.
La variation d'énergie cinétique massique s'écrit : $e_{cB} - e_{cA} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v_B}\|^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\|\overrightarrow{v_A}\|^2}_{=0} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v_B}\|^2$.

Finalement, $c_p(T_B - T_A) + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{v_B}\|^2 = 0$

$$\|\overrightarrow{v_B}\| = \sqrt{2\,c_p(T_A - T_B)}$$

Application numérique :

$\|\overrightarrow{v_B}\| = \sqrt{2 \times 1,00.10^3 \times (600 - 377)}$

$\|\overrightarrow{v_B}\| = 665$ m.s$^{-1} \approx$ mach 2

1.c) Déterminer le débit massique d'air.

On peut écrire le débit massique en B : $\dot{m} = \mu_B\, S\, \|\overrightarrow{v_B}\|$
Avec la loi des gaz parfaits $P\,V = \frac{m\,R\,T}{M}$, ou encore en grandeurs massiques $Pv = rT$, on obtient : $\mu_B = \dfrac{P_B\,M}{R\,T_B} = \dfrac{P_B}{r\,T_B}$.

$$\dot{m} = \frac{S\,\|\overrightarrow{v_B}\|\,P_B}{r\,T_B}$$

Application numérique :

$\dot{m} = \dfrac{10^{-4} \times 665 \times 1,00.10^5 \times 0,0288}{8,314 \times 377}$

$\dot{m} = 61,1$ g.s^{-1}

2) On modélise l'irréversibilité de la détente par une transformation polytropique de coefficient k= 1,36.

Une transformation polytropique de coefficient k vérifie la relation : $P\,V^k = constante.$

Par exemple, une transformation isotherme d'un gaz parfait est une transformation polytropique de coefficient k=1.

A la question précédente, la transformation était isentropique (adiabatique réversible). C'est une transformation polytropique de coefficient $k = \gamma$.
On verifie la loi de Laplace $P\,V^\gamma = constante$ avec $\gamma = \dfrac{c_p}{c_p - r} = 1,4$.

Pour tenir compte des irreversibilités présentes au cours de la transformation, on prend $k \neq \gamma$. Ici, on choisit k=1,36 et on s'attend à obtenir une vitesse plus petite en sortie de tuyère.

Reprendre les calculs avec cette nouvelle relation pour retrouver la nouvelle valeur T'_B.

On réécrit la relation $PV^k = constante$ en variables (T, P) à partir de la loi des gaz parfaits
$\Rightarrow P^{1-k}T^k = constante$.

$P_A^{1-k}T_A^k = P_B^{1-k}T_B'^k$

$$T'_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-k}{k}}$$

Application numérique :

$$T'_B = 600 \left(\frac{5,00}{1,00}\right)^{\frac{1-1,36}{1,36}}$$

$T'_B = 392 \text{ K} > T_B$

Recalculer $\|\overrightarrow{v_B}\|$ et $\dot{m}$.

2a) Déterminer à nouveau la vitesse et le débit d'air.

Les expressions littérales à utiliser sont les mêmes qu'à la question précédente.

$$\|\overrightarrow{v'_B}\| = \sqrt{2\, c_p(T_A - T'_B)}$$

Application numérique :

$$\|\overrightarrow{v'_B}\| = \sqrt{2 \times 1,00.10^3 \times (600 - 392)}$$

$\|\overrightarrow{v'_B}\| = 645 \text{ m.s}^{-1} < \|\overrightarrow{v_B}\|$

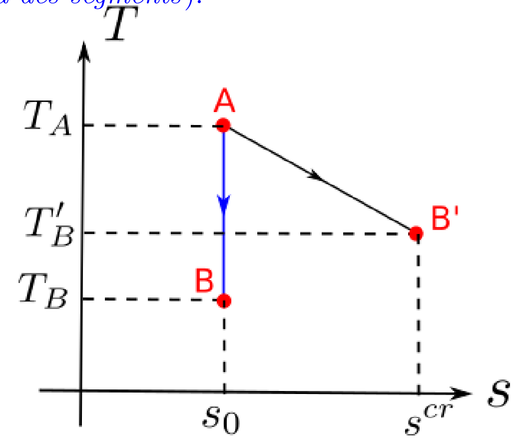
$$\dot{m}' = \frac{S\, \|\overrightarrow{v'_B}\|\, P_B\, M}{R\, T'_B}$$

Application numérique :

$$\dot{m}' = \frac{10^{-4} \times 645 \times 1,00.10^5 \times 0,0288}{8,314 \times 392}$$

$\dot{m}' = 57,4 \text{ g.s}^{-1} < \dot{m}$

2b) Représenter ces deux détentes dans un diagramme entropique (*on assimilera les transformations à des segments*).



La détente de la question 1 étant isentropique, elle est représentée par une droite verticale dans le diagramme $(T; s)$.

La détente polytropique n'est pas isentropique, mais, la tuyère étant calorifugée, on a nécessairement $\delta s^{cr} = ds > 0$, l'entropie au cours de cette détente augmente. Ce qui donne le diagramme ci-contre.

2c) Déterminer l'énergie dissipée ε à la traversée de la tuyère.

On a $\varepsilon = \displaystyle\int_i^f T\delta s^c$

D'après ce qui précède, on a $\delta s^{cr} = ds$ - la tuyère étant calorifugée.

Ainsi : $\varepsilon = \displaystyle\int_i^f T ds$

Cette énergie correspond en réalité à l'air sous la courbe dans le diagramme entropique $(T; s)$. Il nous faut donc l'équation de la droite $T = T(s)$.

Soit s^{cr} l'entropie créée au cours de la détente polytropique.

On a $T(s) = \dfrac{T'_B - T_A}{s^{cr}} s + T_A$ (voir digramme ci-dessus)

Pour simplifier les calculs, on suppose $s_0 = 0$ ce qui ne change rien au résultat final.

d'où $\varepsilon = \displaystyle\int_i^f T ds = \int_i^f \left(\frac{T'_B - T_A}{s^{cr}} s + T_A\right) ds$

$\varepsilon = \left[\dfrac{T'_B - T_A}{s^{cr}} \dfrac{s^2}{2} + T_A s\right]_i^f$

ce qui donne $\varepsilon = \dfrac{T'_B - T_A}{s^{cr}} \dfrac{(s^{cr})^2}{2} + T_A s^{cr}$ et en simplifiant

$\varepsilon = \dfrac{T'_B - T_A}{2} s^{cr} + T_A s^{cr}$

Pour effectuer l'application numérique, il nous faut trouver s^{cr}. Pour cela, utilisons l'expression de l'entropie massique du gaz parfait.

On a $\Delta s = s^{cr} = c_p \ln\left(\dfrac{T'_B}{T_A}\right) - r \ln\left(\dfrac{P_B}{P_A}\right)$

$s^{cr} = 1000 \times \ln\left(\dfrac{392}{600}\right) - 288,7 \times \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = 34{,}2\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$

AN : $\varepsilon = \dfrac{392 - 600}{2} \times 34,2 + 600 \times 34,2$

ε=17,2 kJ.kg^{-1}

Cette énergie massique correspond à de l'energie qui aurait pu être utilisée pour augmenter la vitesse du gaz mais qui a été convertie en énergie thermique.

Conclusion

Dans le cas irréversible, le gaz à la sortie de la tuyère est plus chaud, une partie de l'énergie thermique n'a pas été transformée en énergie cinétique, ce qui implique une vitesse à la sortie de la tuyère plus petite.

La vitesse et le débit massique à la sortie de la tuyère sont limités par les irréversibilités dans l'écoulement.