

Correction de l'IS de P1-1 du 7 avril 2022

Partie A - Questions indépendantes

I1) Par identification, les variables indépendantes choisies pour exprimer la fonction G sont P et T .

I2) Par identification avec l'expression de la différentielle d'une fonction de deux variables, on a

$$dG = \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P dT \text{ Ainsi } \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_T = V \text{ et } \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P = -S$$

I3) Pour un gaz parfait, on a $V = \frac{nRT}{P}$ et on a $\left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_T = V$. Ainsi, $\left. \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right|_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT}{P} \right)$ et donc

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right|_T = -\frac{nRT}{P^2}$$

II 1) On a la relation de Mayer : $C_p - C_V = nR$ et d'autre part la définition du rapport isentropique $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, ce qui donne $C_p = \gamma C_V$ en remplaçant dans la relation de Mayer $\gamma C_V - C_V = nR \Leftrightarrow C_V(\gamma - 1) = nR$ donc

$$\text{au final } C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ ainsi que } C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

2) La capacité thermique massique à volume constant est définie comme $c_p = C_p/m$ et puisque $m = n \cdot M$,

$$\text{on obtient } c_v = \frac{R}{M(\gamma - 1)} \text{ ainsi que } c_p = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}$$

III Le mélange se comporte comme un gaz parfait, on a donc $PV = n_{tot}RT$ pour le mélange.

On a $n_{tot} = n_{O_2} + n_{CO_2}$ En divisant par n_{tot} , on obtient la relation entre les fractions molaires $x_{O_2} + x_{CO_2} = 1$ Cherchons x_{CO_2} .

Exprimons la masse volumique du mélange.

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{m_{O_2} + m_{CO_2}}{V} = \frac{n_{O_2}M_{O_2} + m_{CO_2}M_{CO_2}}{V}$$

En divisant par la quantité de matière, on obtient : $\frac{\mu}{n_{tot}} = \frac{x_{O_2}M_{O_2} + x_{CO_2}M_{CO_2}}{V}$ ou encore

$$\frac{\mu V}{n_{tot}} = (1 - x_{CO_2})M_{O_2} + x_{CO_2}M_{CO_2}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits écrite plus haut, on obtient : $\frac{\mu RT}{P} = (1 - x_{CO_2})M_{O_2} + x_{CO_2}M_{CO_2}$

On isole l'inconnue x_{CO_2} , on trouve $x_{CO_2} = \frac{\frac{\mu RT}{P} - M_{O_2}}{M_{CO_2} - M_{O_2}}$

AN : $x_{CO_2} = 0,23$ et $x_{O_2} = 0,77$

IV 1) voir diagramme ci-contre

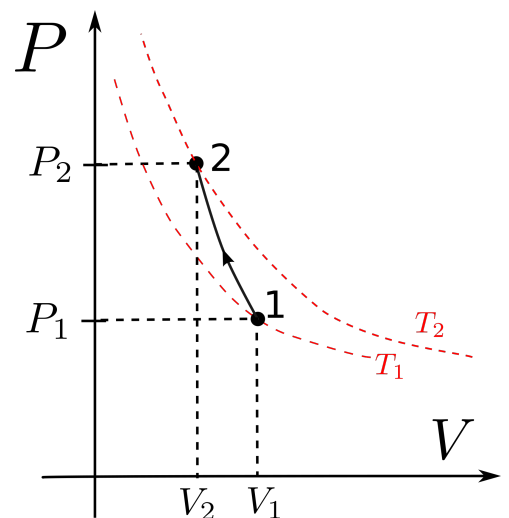
Note : Dans un diagramme $(P;V)$ l'adiabatique réversible est plus pentue que l'isotherme.

IV 2) La transformation ① \rightarrow ② est adiabatique réversible pour un gaz parfait, on peut donc utiliser la loi de Laplace :

$PV^\gamma = \text{constante}$ ou encore $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{constante}$ ce qui donne :

$$P_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma}T_2^\gamma, \text{ c'est à dire : } P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma/1-\gamma}$$

$$\text{AN : } P_2 = 300 \times \left(\frac{290}{300} \right)^{1,38/1-0,38} \quad P_2 = 1,13 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$



Partie B - Transformations d'un gaz parfait

Partie I 1) Il s'agit d'une **compression (ou contraction) adiabatique rapide**. On accepte également brutale, monobare ou irréversible.

2) L'équilibre mécanique du piston ($\Sigma \vec{F} = \vec{0}$) donne $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$

$$\text{AN : } P_1 = 10^5 + \frac{20 \times 9,81}{100 \times 10^{-4}} \quad P_1 = 1,20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3) La transformation étant adiabatique, on a $Q = 0$.

D'après le premier principe de la thermodynamique, on a $U_1 - U_i = W$. Ce gaz parfait suit la première loi de Joule, on a donc $U_1 - U_i = C_V(T_1 - T_0)$

$$\text{Ainsi } U_1 - U_i = W = C_V(T_1 - T_0) \text{ et } Q = 0$$

4) Exprimons le travail des forces de pression :

$$W = - \int P_{ext} dV \text{ or la pression extérieure est constante au cours de la transformation et égale à } P_1, \text{ on a donc } W = -P_1 \int_{V_0}^{V_1} dV = -P_1(V_1 - V_0)$$

d'après ce qui précède, on obtient donc la relation suivante :

$$-P_1(V_1 - V_0) = C_V(T_1 - T_0) \text{ avec les deux inconnues } T_1 \text{ et } V_1.$$

On peut relier ces deux inconnues grâce à l'équation d'état des gaz parfaits : $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$ et $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$

$$\text{Ainsi on obtient : } -P_1 \left(\frac{nRT_1}{P_1} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) = C_V(T_1 - T_0)$$

En développant, puis en factorisant par T_1 et T_0 , on obtient $T_1(C_V + nR) = T_0 \left(C_V + nR \frac{P_1}{P_0} \right)$ ce qui donne

$$T_1 = \frac{(C_V + \frac{P_1}{P_0} nR)}{C_V + nR} \quad \text{AN : } T_1 = 317 \text{ K}$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \text{ donne } V_1 = 2,2 \text{ L} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

5) Il s'agit d'une **contraction lente isobare**. On accepte également irréversible.

6) La contraction est isobare, donc $P_2 = P_1 = 1,20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Il y a des échanges thermiques entre le système et l'atmosphère (thermostat). Donc, à l'équilibre, la température du système est égale à celle de l'atmosphère, $T_2 = T_0 = 300 \text{ K}$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} \text{ donne } V_2 = 2,1 \text{ L} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

7) L'énergie interne du système ne dépend que de l'état initial et l'état final. Comme un gaz parfait suit la première loi de Joule, $U_2 - U_i = C_v(T_0 - T_0) = 0$

On a $W_{i \rightarrow 2} = W_{i \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2}$. On a vu à la question 3) que $W_{i \rightarrow 1} = C_V(T_1 - T_0)$ et comme la transformation $1 \rightarrow 2$ est isobare (P constante au cours de la transformation et $P = P_1$), $W_{1 \rightarrow 2} = -P_1(V_2 - V_1)$.

Finalement, $W_{i \rightarrow 2} = C_V(T_1 - T_0) - P_1(V_2 - V_1)$. L'application numérique donne $W_{i \rightarrow 2} = 49 \text{ J}$.

Le premier principe donne $U_2 - U_i = W_{i \rightarrow 2} + Q_{i \rightarrow 2} = 0$, ce qui implique $Q_{i \rightarrow 2} = -W_{i \rightarrow 2}$.

Finalement, $Q_{i \rightarrow 2} = -49 \text{ J}$.

On aurait pu aussi commencer par calculer le transfert thermique: $Q_{i \rightarrow 2} = Q_{i \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = 0 + C_p(T_2 - T_1)$ (car pour les transformation isobare, le premier principe s'écrit $\Delta H = Q$ et pour un gaz parfait $\Delta H = C_p \Delta T$ avec la deuxième loi de Joule).

Finalement $Q_{i \rightarrow 2} = \gamma C_v(T_0 - T_1)$, ce qui donne le même résultat que précédemment.

Partie II

8) Il s'agit d'une **compression (ou contraction) lente isotherme**. On accepte également réversible.

9) On ajoute la même masse sur le piston donc $P'_2 = P_2 = 1,20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

La transformation est isotherme, donc $T'_2 = T_0 = T_2 = 300 \text{ K}$.

La loi des gaz parfait donne donc aussi $V'_2 = V_2 = 2,1 \text{ L}$.

10) La transformation est isotherme. Comme un gaz parfait suit la première loi de Joule, $U'_2 - U_i = C_v(T_0 - T_0) = 0$.
 Exprimons le travail échangé au cours de la transformation:

$$W_{i \rightarrow 2'} = - \int P_{ext} dV$$

Comme la transformation est lente, $P_{ext} = P$ et la loi des gaz parfait donne $P = \frac{nRT_0}{V}$.

$$W_{i \rightarrow 2'} = - \int \frac{nRT_0}{V} dV$$

$$W_{i \rightarrow 2'} = -nRT_0 \int_{V_0}^{V'_2} \frac{dV}{V} \text{ car la transformation est isotherme.}$$

$$W_{i \rightarrow 2'} = -nRT_0 \ln \left(\frac{V'_2}{V_0} \right)$$

$$W_{i \rightarrow 2'} = -nRT_0 \ln \left(\frac{P_0}{P'_2} \right) \text{ avec la loi des gaz parfait et en simplifiant } T'_2 = T_0.$$

L'application numérique donne $W_{i \rightarrow 2'} = 45 \text{ J}$.

Le premier principe donne $U'_2 - U_i = W_{i \rightarrow 2'} + Q_{i \rightarrow 2'} = 0$, ce qui implique $Q_{i \rightarrow 2'} = -W_{i \rightarrow 2'}$.

Finalement, $Q_{i \rightarrow 2'} = -45 \text{ J}$.

Partie III

11) On fournit moins de travail avec la transformation lente tout en arrivant au même état final. **Le travail n'est pas une fonction d'état.**