Exercice : Transformations lentes d'un gaz parfait (1)

Considérons un système constitué de n moles de gaz parfait de rapport isentropique γ, qui passe d'un état (1) défini par : (P_1, V_1, T_1) à un état (2) défini par : (P_2, V_2, T_2).

Tous les résultats seront exprimés en fonction des seules données : $C_v, C_p, P_1, V_1, T_1, P_2, V_2, T_2$ et R.

1) Soit la compression isotherme LENTE, notée T1.

1.a Tracer la courbe de la fonction $P(V)$ qui représente la transformation T1 dans le plan de Clapeyron.

1.b Calculer le travail puis la chaleur reçus de l'extérieur par le gaz en cours de cette transformation.

1.c Représenter le travail reçu par le gaz dans le plan de Clapeyron.

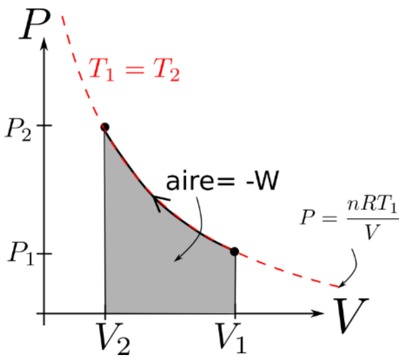
2) Mêmes questions a et b pour chacune des transformations LENTES suivantes :

T2 : dilatation isobare T3 : refroidissement isochore T4 : détente adiabatique

T5 : détente isotherme puis dilatation isobare

T6 : échauffement isochore puis contraction isobare.

1) Transformation T1 : compression isotherme lente



Transformation lente donc $P_{ext}=P$

$\delta W = -PdV$

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 -PdV = \int_1^2 -\frac{nRT}{V}dV$$

$$W_{1\to 2} = -nRT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Loi des gaz parfaits $P_1V_1 = nRT_1$

$W_{1\to 2} = P_1V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ et $T_1 = T_2$

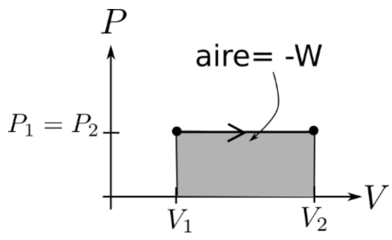
1[er] principe : $U_2 - U_1 = W_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$

1[ère] loi de Joule (GP) : $U_2 - U_1 = 0$

On en déduit : $Q_{1\to 2} = -P_1V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$

Ici, $W_{1\to 2} > 0$ et $Q_{1\to 2} < 0$

2)Transformation T2 : dilatation isobare



Transformation à pression constante

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 -PdV = -P_1 \int_1^2 dV$$

Et donc

$$W_{1\to 2} = -P_1(V_2 - V_1)$$

1[er] principe (isobare): $H_2 - H_1 = Q_{1\to 2}$

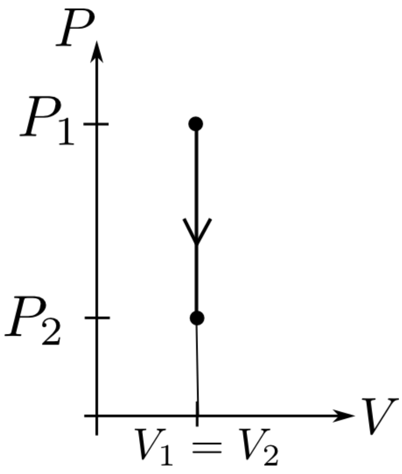
2ème loi de Joule (GP) : $H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1)$

Ici, $W_{1\to 2} < 0$ et $Q_{1\to 2} > 0$

$$\begin{cases} W_{1\to 2} = -P_2(V_2 - V_1) \\ Q_{1\to 2} = C_p(T_2 - T_1) \end{cases}$$

Ici, $W_{1\to 2} < 0$ et $Q_{1\to 2} > 0$

Transformation T3 : refroidissement isochore



Transformation à volume constant

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \delta W = -\int_1^2 P_{ext} dV = 0$$

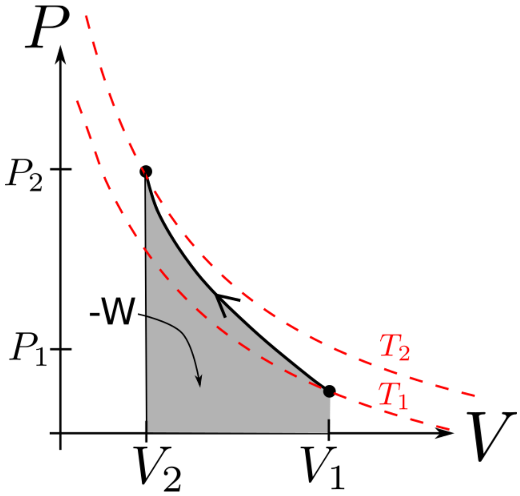
1er principe : $U_2 - U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2} = Q_{1\to2}$

1ère loi de Joule (GP) : $U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$

On en déduit : $\begin{cases} W_{1\to2} = 0 \\ Q_{1\to2} = C_V(T_2 - T_1) \end{cases}$

Ici, $Q_{1\to2} < 0$

Transformation T4 : détente adiabatique



$Q_{1\to2} = 0$

1er principe : $U_2 - U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$

1ère loi de Joule (GP) :

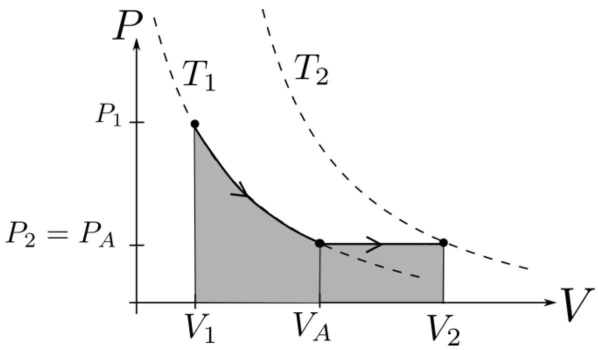
$U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$

On en déduit : $Q_{1\to2} = 0$ et

$$W_{1\to2} = C_V(T_2 - T_1)$$

Ici, $W_{1\to2} > 0$

Transformation T5 : détente isotherme puis dilatation isobare



On utilise les résultats de l'étude des transformations T1 et T2.

1 → A est isotherme : $P_1.V_1 = P_A.V_A$

A → 2 est isobare : $P_A = P_2$.

D'où $\frac{V_A}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$

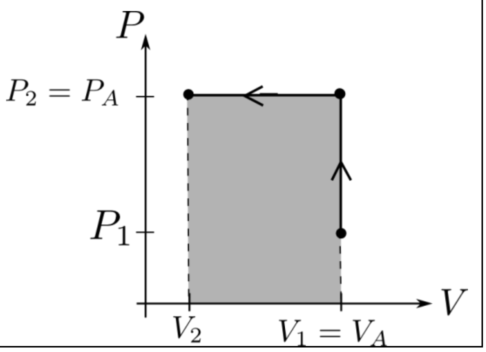
D'après T1: $W_{1\to A} = -Q_{1\to A} = -nRT_1 \ln\frac{V_A}{V_1} = -nRT_1 \ln\frac{P_1}{P_2} = -P_1V_1 \ln\frac{P_1}{P_2}$

D'après T_2 : $\begin{cases} W_{A\to2} = -P_2(V_2 - V_A) = -P_2V_2 + P_1V_1 \\ Q_{A\to2} = C_P(T_2 - T_A) \Rightarrow Q_{A\to2} = C_P(T_2 - T_1) \end{cases}$

Par addition : $\begin{cases} W_{1\to2} = -P_1V_1 \ln\frac{P_1}{P_2} - P_2V_2 + P_1V_1 \\ Q_{1\to2} = +P_1V_1 \ln\frac{P_1}{P_2} + C_P(T_2 - T_1) \end{cases}$

Ici, $W_{1\to2} < 0$ et $Q_{1\to2} > 0$

Transformation T6 : échauffement isochore puis contraction isobare

Diagramme de Clapeyron 1→A isochore : $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_A}{T_A} \Leftrightarrow T_A = T_1 \frac{P_2}{P_1}$.	

D'après T₃ : $\begin{cases} W_{1\to A} = 0 \\ Q_{1\to A} = C_V(T_A - T_1) \Rightarrow Q_{1\to A} = C_V T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) \end{cases}$

A→2 isobare : $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_A}{T_A} \Leftrightarrow T_A = T_2 \frac{V_1}{V_2}$

D'après T₂ : $\begin{cases} W_{A\to 2} = -P_2(V_2 - V_A) = -P_2(V_2 - V_1) \\ Q_{A\to 2} = C_P(T_2 - T_A) \Rightarrow Q_{A\to 2} = C_P T_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \end{cases}$

Par addition : $\begin{cases} W_{1\to 2} = -P_2(V_2 - V_1) \\ Q_{1\to 2} = C_V T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right) + C_P T_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \end{cases}$

Ici, $W_{1\to 2} > 0$ et on ne peut pas conclure pour $Q_{1\to 2}$