INSA - ITI **Année 2021-2022**

ITI 3 - Remise à niveau : Probas.

1 Rappels de cours

Dans ce qui suit, Ω désigne un univers muni d'une probabilité P.

1.1 Généralités sur les variables aléatoires à densité

On appelle variable aléatoire à densité toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux vérifiant la propriété suivante :

$$\forall a < b,\ P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Si une telle fonction f existe, elle est appelée **densité** de la variable aléatoire X.

Remarquons que si f est la densité d'une variable aléatoire X, alors nécessairement f est positive, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Rappelons que si X est une variable aléatoire, sa **fonction de répartition** est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(t) = P(X \leq t).$$

Théorème : Si X est une variable aléatoire à densité, sa fonction de répartition est continue. Autrement dit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $P(X = a) = 0$.

1.2 Espérance, Variance

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ converge. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel E(X) défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Théorème (linéarité de l'espérance) : Soit X et Y deux variables aléatoires à densité définies sur Ω. Alors

- $aX + b$ admet une espérance, et $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $X + Y$ admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Théorème de transfert : Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, et soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose en outre que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|f(x)dx$ converge. Alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance donnée par

$$E\big(\varphi(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx.$$

Soit X une variable aléatoire à densité f. On dit que X admet une variance si X admet une espérance $E(X) = m$ et si la variable aléatoire $\big(X - E(X)\big)^2$ admet une espérance, autrement dit si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx$ est convergente. Dans ce cas, on appelle variance de X la valeur de cette intégrale :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx.$$

Les propriétés de la variance des variables aléatoires discrètes restent vraies pour les variables aléatoires continues.

1.3 Lois uniformes

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si X admet pour densité la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t \geq b. \end{cases}$$

X admet une espérance et une variance données respectivement par

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

1.4 Lois exponentielles

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si X admet pour densité la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

X admet une espérance et une variance données respectivement par

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Théorème : Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors X est sans mémoire :

$$\forall s, t > 0, \ P_{(X>s)}(X > s + t) = P(X > t).$$

Proposition (temps de demi-vie) : Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $a > 0$ l'unique réel tel que $P(X > a) = P(X < a) = \frac{1}{2}$. Alors $a = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

1.5 Lois normales

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si X admet une densité f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

La variable aléatoire X admet alors une espérance qui vaut 0 et une variance qui vaut 1. Puisque la densité d'une loi normale centrée réduite est une fonction paire, on a pour $a > 0$

$$P(X \leq -a) = P(X \geq a).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire centrée réduite ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles. On en calcule des valeurs approchées à l'aide de l'outil informatique (ou de tables). Néanmoins, les valeurs suivantes interviennent souvent en statistiques :

$$\begin{array}{rcl} P(-1 \leq X \leq 1) & = & 0,683 \\ P(-2 \leq X \leq 2) & = & 0,954 \\ P(-3 \leq X \leq 3) & = & 0,997 \\ P(-1,96 \leq X \leq 1,96) & = & 0,95 \\ P(-2,57 \leq X \leq 2,57) & = & 0,99. \end{array}$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R} et \sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2), si Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Dans ce cas, X admet une espérance égale à m et une variance égale à σ^2.

Théorème : Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet pour densité la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Théorème (Moivre-Laplace) : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et soit $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors, pour tous nombres réels $a < b$, on a $P(Z_n \in [a,b]) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

2 Exercices

Exercice 1 :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. On note m sa moyenne et σ son écart-type. Calculer la probabilité $P(X \in [m - \sigma, m + \sigma])$.

Exercice 2 :
A partir de 7heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0,30]. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ? Qu'il l'attende plus de dix minutes ?

Exercice 3 :
La durée de vie des atomes de radon suit une loi exponentielle. La probabilité qu'un atome de radon ne soit pas désintégré en 40s sachant qu'il ne l'est pas en 12s vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas désintégré avant 76s sachant qu'il ne l'est pas en 20s ?

Exercice 4 :
Une usine fabrique des appareils électroniques constitués de deux composants A et B dont les fonctionnements sont indépendants l'un de l'autre et dont les durées de vie (en heures) sont des variables aléatoires X_1 et X_2 qui suivent une loi exponentielle de paramètre respectif λ_1 et λ_2.

1. On a observé que la durée de vie moyenne des composants de type A est de 1000 heures. Que vaut λ_1 ?
2. On a observé que, en moyenne, un composant sur deux de type B avait une durée de vie inférieure ou égale à 1500 heures, et un sur deux avait une durée de vie supérieure ou égale à 1500 heures. Que vaut λ_2 ?
3. Un appareil fonctionne si et seulement si ses deux composants fonctionnent. On note T la durée de vie d'un appareil. Pour x un réel strictement positif, exprimer $P(T > x)$ en fonction de $P(X_1 > x)$ et de $P(X_2 > x)$.
4. En déduire $P(T \leq x)$ en fonction de λ_1, de λ_2 et de x, puis reconnaitre la loi de T.
5. Sachant que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du premier composant, quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du deuxième composant ?
6. Sachant que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du deuxième composant, quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du premier composant ?

Exercice 5 :
Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire à densité. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et préciser si elles admettent une espérance.

1. $f_1(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$

3. $f_3(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \ x \in \mathbb{R}$

4. $f_4(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. $f_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

6. $f_6(x) = \sin x + 1, \ x \in \mathbb{R}.$