Fiche N°4 : Dérivées partielles, différentielle

Dérivée d'une fonction de plusieurs variables

Soit une fonction **f(x,y)** *de plusieurs variables. On peut calculer plusieurs dérivées en ne faisant à chaque fois varier qu'une seule de ces variables. On appelle ces dérivées, des* **dérivées partielles** *:*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}_{|(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}_{|(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Une fonction d'espace est une fonction qui dépend des trois variables d'espace : **f(x,y,z)**

A partir des dérivées partielles d'une fonction de d'espace, on peut définir un vecteur appelé gradient de la fonction dont les trois composantes sont les dérivées partielles d'espace :

$$\overrightarrow{grad}\left(f(x,y,z)\right) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{array} \right.$$

Ce vecteur suit une direction qui indique la direction imposant une plus grande variation de la fonction **f(x,y,z)**.

La différentielle

La différentielle d'une fonction, lorsqu'elle existe, indique la variation du premier ordre de la fonction pour une variation infinitésimale de ses variables :

Cas d'une fonction d'une variable

D'après la définition de la dérivée, une variation infinitésimale de la variable **x** *se note* **dx** *avec :*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx \quad \text{ainsi} \quad \frac{df(x)}{dx}_{|x_0} = \frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx}$$

La variation de la fonction **f(x)** *pour une variation* **dx** *de la variable* **x** *correspond au numérateur de l'expression précédente. On note donc la différentielle de la fonction* **f** *ainsi :*

$$df = f(x_0+dx) - f(x_0) = \frac{df(x)}{dx}_{|x_0} \times dx$$

Généralisation à une fonction de plusieurs variables

La généralisation au premier ordre consiste à cumuler les variations élémentaires de la fonction **f(x,y,z)** *pour des variations élémentaires indépendantes de toutes les variables. Ainsi pour une fonction d'espace :*

$$df = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

On note que le déplacement élémentaire à partir d'un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ *se note* $d\overrightarrow{OM}$ *et a pour coordonnées (***dx,dy,dz***). On vérifie alors la relation suivante :*

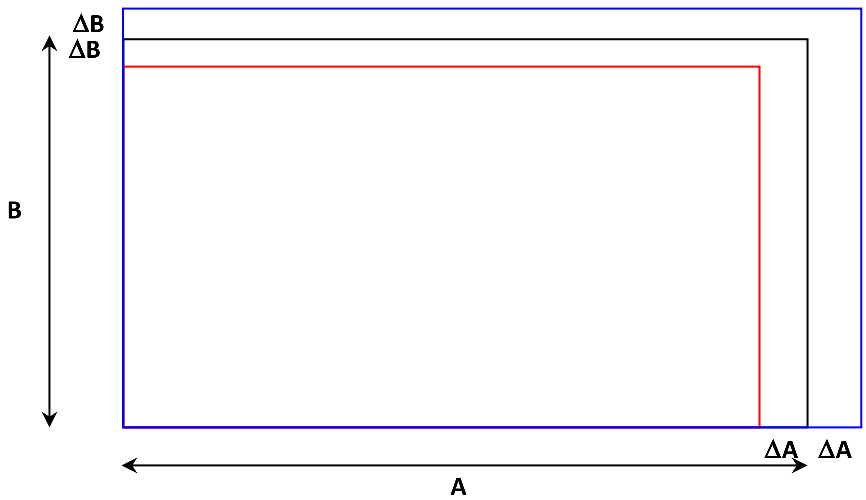
$$df = \overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big)\cdot d\overrightarrow{OM}$$

en effet :

$$df = \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array}\right. = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

Exemple d'utilisation du calcul différentiel

Soit une plaque rectangulaire de cotés **A** *et* **B***. La mesure de la surface consiste à calculer le produit* **AB** *des deux cotés. La mesure de la longueur d'un côté est sujette à une incertitude de mesure (précision de la graduation). Ainsi le coté* **A** *est connu à* **+/- ΔA** *et le côté* **B** *à* **+/- ΔB***.*



Ainsi la surface maxi mesurables est **S+ΔS=(A+ΔA)(B+ΔB) =AB+AΔB+ΔAB+ΔAΔB**

On observe alors que **ΔS=AΔB+ΔAB+ΔAΔB**

De même la surface mini mesurable est **S-ΔS=(A-ΔA)(B-ΔB) =AB-AΔB-ΔAB+ΔAΔB** *ce qui conduit a* **ΔS=AΔB+ΔAB-ΔAΔB**

*Dans le mesure où les erreurs sont faibles devant les grandeurs mesurées (***ΔA→dA***), le produit* **ΔAΔB** *devient négligeable devant les autres termes, ce qui conduit à* **ΔS=AΔB+ΔAB***.*

On observe que ce résultat correspond à la différentielle de la fonction surface. En effet l'erreur mesurée correspond à la contribution des erreurs sur chaque variable :

$$dS(A,B) = \frac{\partial S(A,B)}{\partial A} dA + \frac{\partial S(A,B)}{\partial B} dB = \frac{\partial AB}{\partial A} dA + \frac{\partial AB}{\partial B} dB = BdA + AdB$$

Ce résultat est vrai si les variations sont petites (infinitésimales).

Lien avec le travail d'une force

Considérons le travail d'une force le long d'un chemin partant du point A et aboutissant au point B :

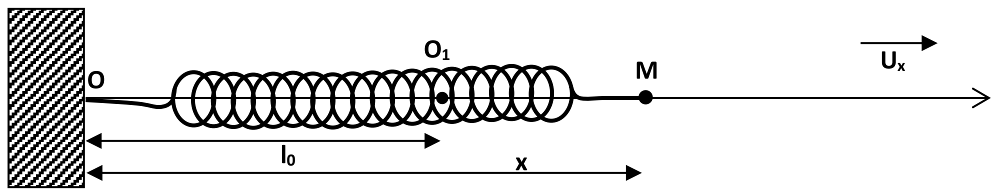
$$W(\vec{F})_{|R_0} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W$$

Il s'agit de la sommation des travaux élémentaires δW le long du chemin. Si le travail ainsi calculé ne dépend pas du chemin emprunté pour aller de A à B, alors la quantité δW est une différentielle totale $\delta W = dW$. La force considérée est alors conservative au sens où cette dernière ne dissipe pas d'énergie au cours de son déplacement. Cette dernière se note $\vec{F_c}$.D'après la propriété du gradient on a alors :

$df = \overrightarrow{grad}(f(x,y,z)) \cdot d\overrightarrow{OM}$ *et l'on définit la fonction énergie potentielle E_p telle que :*

$dW = -\overrightarrow{grad}(E_p) \cdot d\overrightarrow{OM}$ *mais comme par définition $dW = \vec{F_c} \cdot d\overrightarrow{OM}$, par identification on peut également écrire $\vec{F_c} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$. De façon réciproque, si l'on parvient à déterminer une fonction scalaire E_p vérifiant la précédente relation, alors la force considérée est conservative.*

Exemple de la force de rappel du ressort en repère cartésien :



$$\vec{F} = \begin{vmatrix} -k(x-l_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{vmatrix}$$

En projetant cette égalité dans les directions y et z on parvient à démontrer que la fonction E_p*, si elle existe, ne dépend que de x :* $\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$ *et* $\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \rightarrow E_p(x)$*. Ainsi, en projetant l'égalité vectorielle dans la direction x on arrive à :*

$$k(x-l_0) = \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{dE_p}{dx} \rightarrow dE_p = k(x-l_0)dx$$

La primitive de cette égalité conduit à $E_p = \frac{k}{2}(x-l_0)^2 + C^{st}$ *vérifiez le !*