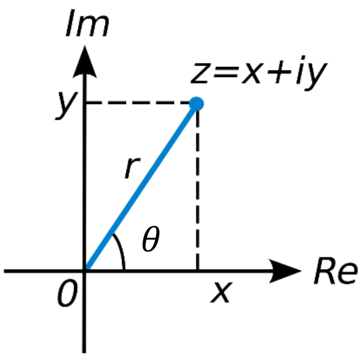
Fiche N°3 : Nombres complexes et équations différentielles

Définition d'un nombre complexe.

Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, est un nombre décrit par deux réels : la partie réelle x et la partie imaginaire y :



$$z = x + iy \leftrightarrow Re(z) = x \text{ et } Im(z) = y \text{ et } i^2 = -1$$

On peut représenter les nombres complexes comme un point (ou un vecteur) dans le plan cartésien constitué de l'axe des réels (abscisses) et de l'axe des imaginaires (ordonnées) et dont les coordonnées sont x et y.

On peut également utiliser des notations polaires pour exprimer un nombre complexe par son module r et sa phase θ :

$$z = r\big(cos(\theta) + i\ sin(\theta)\big)$$

De façon alternative, on peut utiliser les notations d'Euler du nombre complexe :

$z = re^{i\theta} \leftrightarrow r = |z|\ (module)\ et\ \theta = arg(z)\ (argument)\ avec\ e^{i\theta} = cos(\theta) + i\ sin(\theta)$

On appelle conjugué de $z = x + iy$ le nombre complèxe $z^* = x - iy$ (on considère l'opposé de la partie imaginaire, symétrie par rapport à l'axe des réels).

Propriétés des nombres complexes.

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- $z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
  $z_1 \times z_2 = r_1e^{i\theta_1} \times r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \leftrightarrow Produit\ des\ modules\ et\ somme\ des\ arguments$
  $|z_1 \times z_2| = |z_1|\,|z_2|\ \ et\ arg(z_1 \times z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
- $z \times z^* = re^{i\theta} \times re^{-i\theta} = r^2 = |z|^2$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \leftrightarrow Rapport\ des\ modules\ et\ différence\ des\ arguments$
- $z^n = r^ne^{in\theta}$
- $i = e^{i\frac{\pi}{2}},\ i^2 = e^{i\pi} = -1$
- $i \times z = e^{i\frac{\pi}{2}} \times re^{i\theta} = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \leftrightarrow Revient\ à\ pivoter\ de\ 90°\ le\ point\ dan\ sle\ plan\ complèxe$
- *Comme* $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\ sin(\theta)$, *on a* $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ *(expressions d'Euler)*
- $z = re^{i\theta} \rightarrow \dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + i\dot{\theta}re^{i\theta}$

Intérêts / Utilité.

- *Les complexes permettent de résoudre des équations parfois non résolubles dans l'espace réel.*
  Exemple de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *si le discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ *est positif ou nul et* $x = \frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ *si* Δ *est négatif. Exemple* $x^2 + x + 1 = 0$*. Le discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac - b^2 = -3 = i^23$ *et donc la solution devient* $x = \frac{-1\pm\sqrt{i^23}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$
- *Permet la démonstration de formules usuelles* $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = \big(cos(\theta_1) + i\ sin(\theta_1)\big)\big(cos(\theta_2) + i\ sin(\theta_2)\big)$

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \underbrace{cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sin(\theta_1)sin(\theta_2)}_{cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{\big(cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1)cos(\theta_2)\big)}_{sin(\theta_1+\theta_2)}$$

- *Les nombres complexes simplifient la notation et la résolution de systèmes oscillants :* $y = a\cos(\omega t) \leftrightarrow y = Re(ae^{i\omega t})$ *très utile pour décrire les ondes (en mécanique / électricité en régime alternatif / optique - électromagnétisme)*
- *Analyse des signaux en fréquence (Analyse de Fourier)*
- *Géométrie / topologie*
- *Permet la résolution des équations différentielles (voir ci-après)*

Définition d'une équation différentielle linéaire du second degré.

Dans certains, cas (dont en mécanique du point !) on cherche à déterminer une fonction y (par exemple du temps) vérifiant une équations dite « différentielle » de la forme :

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t)$$

Le membre de droite (terme de forçage) est une combinaison linéaire des dérivées de différents ordres de la fonction recherchée. Si $a \neq 0$*, l'équation est dite du second ordre (ou degré) sinon du premier ordre (ou degré). La fonction f peut dépendre du temps, être constante voire nulle.*

Décomposition de la solution.

Considérons que la solution générale puisse se décomposer en la somme de deux fonctions, l'une dite « homogène » (vérifiant l'équation sans second membre, c'est-à-dire avec f=0) et d'une seconde dite « particulière » :

$$a\frac{d^2(y_g + y_p)}{dt^2} + b\frac{d(y_g + y_p)}{dt} + c(y_g + y_p) = f(t)$$

La dérivation d'ordre 1 ou 2 reste une opération linéaire. En effet, si $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ *alors* $\dot{y}(t) = \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t)$ *(idem à l'ordre n).*

Ainsi, on aura, après développement :

$$\underbrace{a\ddot{y}_h + b\dot{y}_h + cy_h}_{=0} + \underbrace{a\ddot{y}_p + b\dot{y}_p + cy_p}_{=f(t)} = f(t)$$

Pour la résolution d'une équation différentielle, on cherchera systématiquement à trouver la solution de l'équation homogène et une solution particulière. On pourra conclure que la solution générale est la somme des deux autres : $y_{gen}(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Résolution de l'équation homogène, sans second membre.

Pour résoudre $a\ddot{y}_h + b\dot{y}_h + cy_h = 0$ *, on part de l'hypothèse que la solution est de la forme* $y_h = Ae^{pt}$ *avec A et p des constantes. Il vient* $\dot{y}_h = pAe^{pt} = py_h$ *et* $\ddot{z}_h = p^2Ae^{pt} = p^2y_h$ *et donc, après substitution/factorisation de ces dernières expressions dans l'équation précédente, il vient :*

$$\underbrace{y_h}_{\substack{\neq 0 \\ \text{sinon pas de} \\ \text{solution non nulle}}} \quad \underbrace{(ap^2 + bp + c)}_{=0} = 0$$

Ainsi, la solution proposée vérifie l'équation différentielle si $ap^2 + bp + c = 0$ *(appelée équation caractéristique). Selon les valeurs de a, b et c, p admet deux solutions pouvant être réelles ou complexes.*

1. Cas du discriminant positif $\Delta = b^2 - 4ac > 0$:

   Dans ce cas, p admet deux solutions réelles $p_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $p_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

   La solution de l'équation homogène est donc combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$y_h = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

2. Cas du discriminant nul $\Delta = b^2 - 4ac = 0$:

   La solution est $p_0 = \frac{-b}{2a}$. Mais, dans ce cas, on montre que la forme $y_h = Bte^{p_0 t}$ convient également et la solution générale devient donc une combinaison linéaire des deux formes génériques :

$$y_h = (A + Bt)e^{p_0 t}$$

3. Cas du discriminant négatif $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

   Dans ce cas, p admet deux solutions complexes conjuguées $p_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ et $p_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. On peut noter ces résultats sous la forme $p = r \pm \omega$. La solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions associées : $y_h = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{(r+\omega)t} + A_2 e^{(r-\omega)t} = e^{rt}(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$. En définissant $A = (A_1 + A_2)$ et $B = i(A_1 - A_2)$ et en substituant, on aboutit à $y_h = e^{rt}\left(\left(\frac{A-iB}{2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{A+iB}{2}\right)e^{-\omega t}\right)$. Et, après arrangement, on obtient $y_h = e^{rt}\left(A\left(\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right) + B\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2i}\right)\right)$. Enfin, après emploi des formules d'Euler (voir plus haut), on parvient au résultat suivant :

$$y_h = e^{rt}\big(Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)\big)$$

   Ce dernier résultat peut encore s'écrire $y_h = Ce^{rt}\left(\underbrace{\frac{A}{C}cos(\omega t) + \frac{B}{C}\ sin(\omega t)}_{cos(\omega t+\varphi)=cos(\omega t)cos(\varphi)-sin(\omega t)sin(\varphi)}\right)$

   Et donc

$$y_h = Ce^{rt}cos(\omega t + \varphi)$$

La solution particulière.

La solution particulière y_p dépend de la forme du second membre $f(t)$:

Forme de $f(t)$	Forme de y_p
Constante	$y_p = C^{st}$
Polynome du 1er degré	$y_p = m + nt$
Sinusoïdale de pulsation ω	$y_p = Kcos(\omega t + \phi)$

Détermination des constantes.

Quand la solution homogène et la solution particulière sont déterminées, on obtient l'expression de la solution générale $y_{gen}(t) = y_h(t) + y_p(t)$. Mais il reste à déterminer les constantes d'intégration A et B (cas $\Delta \geq 0$) ou C et φ (cas $\Delta < 0$). Ces constantes sont obtenues à l'aide des conditions initiales du problème, par exemple $y(t = 0) = y_0$ et $\dot{y}(t = 0) = \dot{y}_0$

Exemples

$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 4$ avec $y(0) = 3$ et $\dot{y}(0) = 0$.

1. On cherche l'équation caractéristique de l'équation sans second membre : $p^2 - 2p + 2 = 0$
2. On recherche les racines : $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 4 = -12 = i^2 12, p_1 = \underbrace{1}_{r} + \underbrace{1}_{\omega} i$ et $p_2 = 1 - i$

On exprime la solution homogène correspondante $y_h = Ce^t cos(t+\varphi)$

3. *On recherche une solution particulière de type constante. C'est-à-dire une valeur constante de y qui vérifie l'équation différentielle. Ici, cela correspond à* $2y_p = 4 \rightarrow y_p = 2$
4. *On exprime la solution générale :* $y_{gen}(t) = y_h(t) + y_p = Ce^t cos(t+\varphi) + 2$
5. *On utilise les conditions limites pour déterminer les constantes :* $y_{gen}(0) = Ccos(\varphi) + 2 = 3 \rightarrow Ccos(\varphi) = 1$ *et* $\frac{dy_{gen}}{dt}(0) = \underbrace{Ccos(\varphi)}_{1} - Csin(\varphi) = 0 \rightarrow Csin(\varphi) = 1$*. Ainsi* $\frac{Csin(\varphi)}{Ccos(\varphi)} = 1 \rightarrow tan(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ *et* $C = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.
6. *On exprime la solution générale de l'équation différentielle :* $y_{gen}(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^t cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 2$
7. *On vérifie qu'elle vérifie bien l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales.*

Exercices

- $\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = 0$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $\dot{y}(0) = 1 \rightarrow y(t) = \frac{e^{2t} - e^{-4t}}{6}$
- $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = 0 \rightarrow y(t) = e^t(cos(t) - sin(t))$
- $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = 2 \rightarrow y(t) = e^t(1+t)$
- $\ddot{y} + 4y = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = -2 \rightarrow y(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} cos(2t + \pi/4)$
- $\dot{y} + 4y = 0$ *avec* $y(0) = 1 \rightarrow y(t) = e^{-4t}$
- $\dot{y} + 4y = 12$ *avec* $y(0) = 0 \rightarrow y(t) = 3(1 - e^{-4t})$
- $\ddot{y} - \dot{y} = sin(t)$ *avec* $y(0) = 0$ *et* $\dot{y}(0) = 0 \rightarrow y(t) = \frac{e^t}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} cos(t + \frac{\pi}{4})$