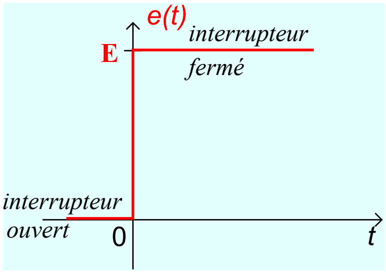
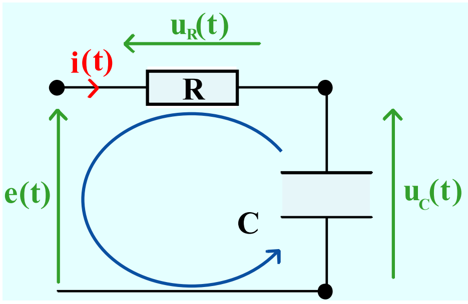
COMPLEMENT

I ETUDE QUALITATIVE DE DEUX CIRCUITS

1) Charge d'un condensateur à travers une résistance

Le montage :





e est un échelon de tension. Un échelon de tension modélise la fermeture d'un interrupteur.

Le phénomène de charge du condensateur :

Etat du réseau avant la fermeture de l'interrupteur

L'excitation e est nulle depuis une « durée infinie » ; plus physiquement $e = 0$ depuis une durée très grande devant une durée τ caractéristique du réseau *(voir II.1 page 6)*. Toutes les grandeurs électriques ont eu le temps d'atteindre des valeurs indépendantes du temps : Le réseau est en *régime permanent indépendant du temps*.

Le condensateur est déchargé ; il n'y a pas de générateur ; toute l'énergie a été dissipée dans la résistance : Il n'y a plus d'énergie dans le réseau. On en conclut que toutes les grandeurs électriques sont nulles ; notamment $u_c = 0$ et $i = 0$.

Etat du réseau juste après la fermeture de l'interrupteur (état initial)

A la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur

Initialement, la charge du condensateur est nulle, et il commence à se charger. Le courant de charge $i(0)$ n'est donc pas nul.

D'après la loi des mailles : $u_c(0) + u_R(0) = e(0) \Leftrightarrow 0 + u_R(0) = E \Leftrightarrow u_R(0) = E$; d'où $i(0) = \dfrac{u_R(0)}{R} \Leftrightarrow i(0) = \dfrac{E}{R}$.

Etat du réseau pendant la charge du condensateur

Cette phase au cours de laquelle les grandeurs électriques évoluent constitue le *régime transitoire*.

Le condensateur se charge progressivement, d'autant plus lentement que R est grande (la résistance au passage du courant augmente) : la tension aux bornes du condensateur augmente progressivement.

Corrélativement, le courant de charge i diminue au fur et à mesure que le condensateur se charge.

Etat du réseau après la charge du condensateur

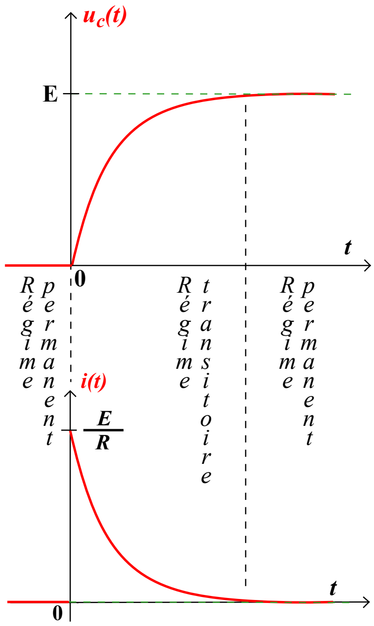
Après une certaine durée, le condensateur est chargé. Le courant de charge s'annule donc : $i(+\infty) = 0$. C'est la fin du régime transitoire. Les grandeurs électriques retrouvent des valeurs indépendantes du temps. Le réseau est de nouveau en régime permanent indépendant du temps.

Que vaut la tension aux bornes du condensateur chargé ? Une rapide analyse du réseau montre que si le courant de charge s'annule, il n'y a plus de tension aux bornes de R (loi d'Ohm), et donc, toute la tension aux bornes du générateur se retrouve aux bornes du condensateur : $u_c(+\infty) = E$.

Les courbes obtenues :

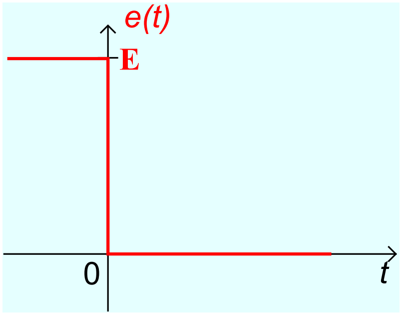
Les courbes ci-contre rendent bien compte des phénomènes décrits ci-dessus :

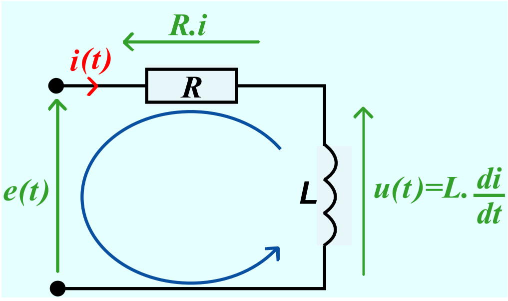
- u_c varie sans discontinuité de 0 à E.
- i est discontinue en $t = 0$; $i(t)$ diminue de $\dfrac{E}{R}$ à 0 au cours de la charge.
- Le réseau est successivement en régime permanent, puis en régime transitoire, puis en régime permanent.



2) Annulation du courant dans un réseau RL

Le montage :





Cette excitation modélise l'ouverture d'un interrupteur, et son remplacement par un fil. A partir de la date $t = 0$, plus aucune énergie n'est apportée au réseau.

Le retard aux variations du courant dans une bobine :

Etat du réseau avant l'ouverture de l'interrupteur

L'excitation e est constante et égale à E depuis une « durée infinie ». Toutes les grandeurs électriques ont eu le temps d'atteindre des valeurs indépendantes du temps : Le réseau est en *régime permanent indépendant du temps*.

La bobine étant traversée par un courant constant, elle n'a aucun effet sur les grandeurs électriques du réseau. Elle se comporte comme un simple fil : $u_L = 0$.

Tout se passe donc comme si un générateur E débitait dans une résistance R. L'intensité dans la maille vaut donc $i = \frac{E}{R}$.

Etat du réseau juste après l'ouverture de l'interrupteur (état initial)

A la date $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. L'excitation e s'annule instantanément.

En l'absence de bobine, le courant s'annulerait « instantanément » (c'est-à-dire en une durée très courte comparée à une durée caractéristique du réseau). Mais la bobine s'oppose aux variations de l'intensité. Juste après l'annulation de e, grâce à l'action de la bobine, le courant a encore pour intensité $i(0) = \frac{E}{R}$.

Etat du réseau pendant la variation d'intensité

Le réseau est en régime transitoire. La présence de la bobine induit une décroissance progressive de l'intensité dans le réseau, de $\frac{E}{R}$ jusqu'à 0.

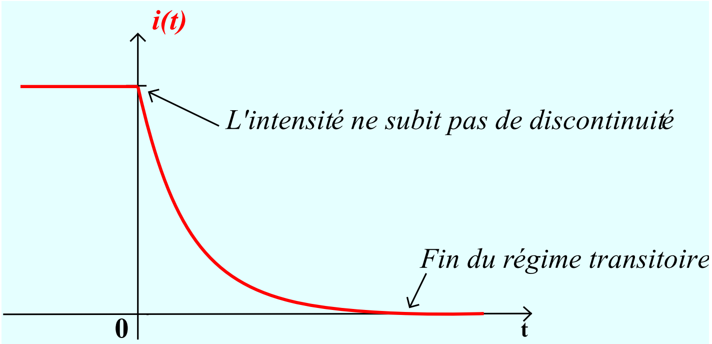
Etat du réseau après la variation d'intensité

Après une certaine durée, l'intensité s'est annulée. Donc : $i(+\infty) = 0$. C'est la fin du régime transitoire. Le réseau est de nouveau en régime permanent indépendant du temps.

La courbe d'intensité :

Sur la courbe ci-contre, on retrouve les phénomènes décrits ci-dessus :

- L'intensité ne subit pas de discontinuité. Le théorème vu au I.2 est bien vérifié.
- Alors que l'excitation s'annule instantanément, on constate que l'intensité s'éteint progressivement. On vérifie bien que la bobine s'oppose aux variations de l'intensité dans la branche.



II ETUDE QUANTITATIVE DES DEUX CIRCUITS

1) Circuit RC

L'étude qualitative de la charge nous a permis de déterminer les valeurs initiales : $u_C(0) = 0$ *et* $u_R(0) = E$;
et les valeurs finales : $u_c(+\infty) = E$ *et* $u_R(+\infty) = 0$.

Reste à étudier si notre modèle de condensateur idéal est compatible avec l'allure des courbes décrivant le régime transitoire. C'est l'équation différentielle du réseau et sa résolution qui vont nous le permettre.

Régime transitoire ; Equation différentielle du réseau

- Détermination de l'équation différentielle *(voir schéma du montage page 4)* :

Pour t > 0 : $\begin{cases} u_c + u_R = e \\ e = E \\ i = C\dfrac{du}{dt} \\ u_R = R.i = RC\dfrac{du}{dt} \end{cases}$ On remplace dans l'équation de maille : $\boxed{u_{c.} + RC\dfrac{du_c}{dt} = E}$

La relation encadrée constitue *l'équation différentielle* du réseau.

Cette équation différentielle relie la fonction $u_c(t)$ à sa dérivée $\dfrac{du_c}{dt}$. Les équations différentielles de cette forme s'appellent des *équations différentielles linéaires du premier ordre*.

Les systèmes dont l'évolution dans le temps est décrite par une équation différentielle de ce type constituent des *systèmes linéaires du premier ordre*.

- Forme canonique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Analyse dimensionnelle : $\left[RC\dfrac{du_c}{dt}\right] = [u_c] = [E] \Leftrightarrow [RC]\dfrac{[u_c]}{T} = [u_c] \Leftrightarrow [RC] = T$. Le produit RC est homogène à un temps.

On pose $\tau = RC$, constante de temps du réseau. C'est une durée caractéristique du réseau.

L'équation différentielle du réseau RC a pour forme canonique : $\boxed{u_{c.} + \tau\dfrac{du_c}{dt} = E}$.

- Résolution de l'équation différentielle :

Résoudre une équation différentielle, c'est chercher l'ensemble des fonctions qui, pour toutes valeurs de t, vérifient cette équation différentielle.
L'inconnue n'est pas le temps, mais la fonction $u_c(t)$.

∗ On sépare les variables (u_c à gauche ; t à droite) : $\dfrac{du_c}{u_c - E} = -\dfrac{dt}{\tau}$.

∗ On intègre entre $t = 0$ et une date t quelconque : $\displaystyle\int_0^{u_c}\frac{du_c}{u_c - E} = -\int_0^t\frac{dt}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{u_c - E}{-E}\right) = -\frac{t}{\tau}$

L'équation horaire de u_c est donc : $\boxed{u_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

- Autres équations horaires :

D'après l'équation de maille : $u_R = e - u_c \Leftrightarrow u_R = E - E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Leftrightarrow \boxed{u_R = E.e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

$i = \dfrac{u_R}{R} \Leftrightarrow \boxed{i = \dfrac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}}$

- Chronogrammes

Théorèmes concernant les courbes en $e^{-\frac{t}{\tau}}$:

Th1 : Durée du régime transitoire : 5τ

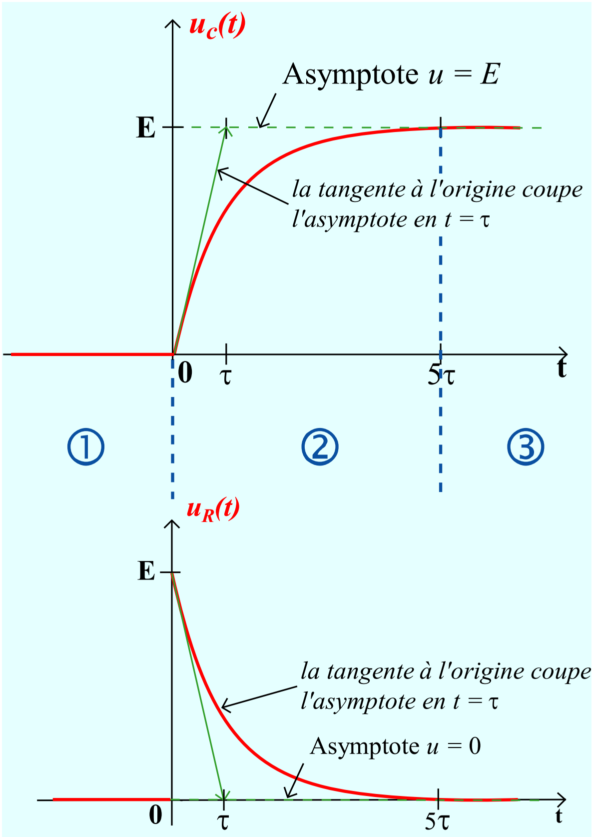
Th2 : La tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau$.

L'évolution des grandeurs électriques se fait en trois phases :

phase ① : $t < 0$ phase ③ : $t > 5\tau$	Régime permanent indépendant du temps
phase ② : $0 < t < 5\tau$	Régime transitoire

✓ On constate que les variations de u_c sont continues. Par contre u_R, et donc i sont discontinues en $t = 0$.

✓ On retrouve sur les courbes les valeurs initiales et finales déterminées directement aux paragraphes I.1) et I.2) précédents.



2) Circuit RL

L'étude quantitative du circuit RL est tout à fait semblable à celle du circuit RC. Nous nous contenterons de justifier l'allure de la courbe page 5.

L'allure du régime transitoire se déduit de l'équation différentielle. Voir schéma du montage page 5.

Loi des mailles, pour $t > 0$: $\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} + R.i - e = 0 \\ e = 0 \end{cases}$. On obtient : $\boxed{i + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = 0}$

Cette équation différentielle a pour forme canonique : $i + \tau\dfrac{di}{dt} = 0$. Sa solution est donc une fonction en $e^{-\frac{t}{\tau}}$, ce qui justifie l'allure du chronogramme page 5.