

# Oscillateur Pendule



**Étudiants :**

Adèle ENON  
Clément OBLED  
Emna RAIES  
Enzo VALENTE  
Marine LOUP  
Raphaël LOMBARD

**Enseignant-responsable du projet :**

Bernard GLEYSE

**Date de remise du rapport :** 12/06/2021

**Référence du projet :** STPI/P6/2021 – 012

**Intitulé du projet :** Oscillateur Pendule

**Type de projet :** Bibliographie, modélisation

**Objectifs du projet :**

- Étudier les différents types de mouvements d'un oscillateur pendule en fonctions des conditions initiales
- Intégrer les frottements et constater leurs effets
- Représenter l'évolution des différents paramètres du système à l'aide de simulations Maple

**Mots-clés du projet :** Oscillations, Résolution numérique, Problème de Cauchy

## Table des matières

1	Mise en situation	5
2	Résolution mathématique de l'équation différentielle en 3 cas	6
3	Résolution mathématique pour le cas général $\theta(0) \neq 0$ dans le cas d'un mouvement périodique	9
4	Résolution mathématique avec frottements	10
5	Simulations Maple pour le cas sans frottements	12
6	Simulations informatiques pour le cas avec frottements	18

# Introduction

Le mot pendule donné par Huygens (mathématicien astronome et physicien néerlandais du 17e siècle) vient du latin « pendere » qui signifie « pendre ». En effet, dans sa définition la plus simple, un pendule correspond à corps solide suspendu au bout d'un fil en pouvant osciller autour d'un point fixe en s'écartant de sa position d'équilibre et en la retrouvant, sous l'effet d'une force telle que la gravité.

Dans ce projet, nous nous intéresserons donc à l'étude du mouvement du pendule selon trois cas : périodique, critique ou circulaire. Afin d'approfondir le travail effectué l'année dernière, nous reprenons la résolution mathématiques en considérant de nouvelles variables et conditions. L'étude Maple sera élargie aux trois cas et nous inclurons dans les méthodes numériques le cas d'un pendule amorti (avec frottements). Nous aborderons également la notion de plan de phase. Ce projet rassemblera donc à la fois des notions mécaniques, mathématiques et informatiques, en plus des compétences de communication et d'organisation nécessaires pour mener à bien un tel travail.

Après avoir évoqué l'organisation de notre travail de groupe, nous aborderons la résolution mathématique pour les différents cas étudiés. Dans une nouvelle partie, nous présenterons l'étude des méthodes numériques. Finalement, nous exposerons les résultats obtenus, accompagnés de comparaisons entre résolutions exactes et approchées.

# Organisation du travail de groupe

**Adèle** “Lors de ce projet, j’ai eu l’occasion de travailler avec mes camarades Emna, Marine et Raphaël sur une première approche du pendule simple avec tout d’abord, l’étude du principe dynamique de celui-ci puis la résolution de l’équation différentielle en 3 cas. Ensuite lors du partage des tâches, j’ai apporté mon aide pour l’ensemble des cas mais je me suis surtout penchée avec Marine sur l’étude des points fixes et de leur stabilité en utilisant Maple. Enfin, j’ai participé avec le groupe à l’élaboration du rapport et à la bonne communication avec le professeur, étant la référente.”

**Marine** “Au début de ce projet, j’ai commencé, avec Emna, Adèle, et Raphaël, l’étude du mouvement du pendule et la résolution mathématique de ce dernier selon les 3 cas étudiés. Une fois familiarisés avec la résolution de l’an dernier, nous l’avons reprise avec de nouvelles variables. Je me suis par la suite occupée de la modélisation Maple du cas critique avec Adèle. Nous avons ensuite continué de travailler ensemble et nous avons étudié la question des plans de phase et des points fixes pour ajouter de nouvelles notions au rapport. Finalement, j’ai participé à la rédaction du rapport final en commentant nos résultats mais aussi en rédigeant les parties “secondaires” du rapport (introduction, objectifs, conclusion. . .)”

**Raphaël** “Après avoir étudié le mouvement du pendule et la résolution mathématique des 3 cas en fonction de  $\theta$  avec Adèle, Emna et Marine, je me suis chargé de la simulation du cas périodique et circulaire sur Maple. J’ai de plus, tout au long du projet, participé à la rédaction du rapport en centralisant les parties rédigées par chaque membre du groupe afin de les regrouper dans un même fichier Lyx, assurant de la continuité et de la cohérence sur l’ensemble du rapport.”

**Enzo** “Pour ma part, je me suis concentré sur l’étude de la méthode de résolution numérique RK4. Après quelques rappels théoriques, je me suis chargé de la simulation informatique de cette méthode sous la forme d’un code en Pascal, permettant de représenter des études avec ou sans frottements. J’ai également réalisé des modélisations de courbes grâce à Gnuplot.”

**Clément** “De mon côté, j’ai étudié une nouvelle résolution qui, pour élargir les notions étudiées, prend maintenant en compte les frottements, linéaires et quadratiques. J’ai par la suite utilisé le logiciel Maple pour la résolution des équations et les simulations informatiques.”

**Emna** “Comme Marine, Raphaël et Adèle, j’ai commencé par étudier la résolution mathématique des 3 cas pour me familiariser avec le projet. Je me suis ensuite chargée de reprendre cette résolution mais en considérant cette fois une position initiale différente de zéro ( $\theta_0 \neq 0$ ) pour le cas périodique afin de représenter un cas plus général.”

# Travail réalisé et résultats

## 1 Mise en situation

On étudie le mouvement d'une bille de masse  $m$  situé au bout d'un fil inextensible de longueur  $l$ .

Le fil forme un angle  $\theta$  avec la position d'équilibre (axe vertical)

Soient  $(O, u_x, u_y)$  et  $(O, u_r, u_\theta)$  les deux repères considérés, on peut écrire :

$$u_r = \cos\theta \cdot u_x + \sin\theta \cdot u_y$$

$$u_\theta = \sin\theta \cdot u_x + \cos\theta \cdot u_y$$

$$u_x = \cos\theta \cdot u_r + \sin\theta \cdot u_\theta$$

### 1.1 Etude du mouvement

Soit  $\overrightarrow{OM}$  le vecteur position,  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$

On en déduit le vecteur vitesse par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l \cdot \vec{u}_r)}{dt} = \underbrace{\frac{dl}{dt}}_{=0} \vec{u}_r + l \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

(avec  $\frac{dl}{dt} \vec{u}_r = 0$  comme  $l$  cst)

or

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{du_r}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{du_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta \cdot u_x + \sin\theta \cdot u_y) \cdot \dot{\theta} = (-\sin\theta \cdot u_x + \cos\theta \cdot u_y) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \times u_\theta$$

d'où

$$\vec{v} = l\dot{\theta}u_\theta$$

On obtient le vecteur accélération par la dérivée seconde :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2(l\dot{\theta}u_\theta)}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2(\dot{\theta}u_\theta)}{dt^2} = l \cdot \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} u_\theta + \dot{\theta} \frac{du_\theta}{dt} \right)$$

avec

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\sin\theta \cdot u_x + \cos\theta \cdot u_y) = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \cdot u_x + \cos\theta \cdot u_y) = \dot{\theta} \cdot (\cos\theta \cdot u_x - \sin\theta \cdot u_y) = -\dot{\theta}u_r$$

d'où

$$\vec{a} = l\ddot{\theta} \cdot u_\theta$$

### 1.2 Principe dynamique

Dans un premier temps, on néglige les frottements, les forces appliquées à la bille sont donc :

T, la tension due au fil

P, son poids (=mg).

On a donc  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$  d'après les lois de Newton

On projette ces forces dans le repère  $(O, u_r, u_\theta)$  (même repère que  $\vec{a}$ ), on obtient alors :

$$mg \cdot \cos\theta \cdot u_r - mg \cdot \sin\theta \cdot u_\theta - T \cdot u_r = m(l\ddot{\theta} \cdot u_\theta - l(\dot{\theta})^2 u_r)$$

Cette projection permet de simplifier l'équation :

$$-mg \cdot \sin\theta = ml\ddot{\theta} \text{ comme } u_\theta \cdot u_\theta = 1 \text{ et } u_\theta \cdot u_r = 0$$

finalement, on a :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

> dans le cas de faibles amplitudes on peut faire l'approximation  $\sin\theta = \theta$  et résoudre  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$   
 > dans ce rapport nous allons plutôt nous concentrer sur les grandes amplitudes, cela nous mène donc à la résolution d'un problème de Cauchy.

## 2 Résolution mathématique de l'équation différentielle en 3 cas

On considère le problème de Cauchy suivant :  $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta$  avec  $\omega^2 = \frac{g}{l}$

Les conditions initiales sont les suivantes :  $t = 0, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$

Le bilan énergétique donne :  $E_m = E_p + E_c$  dans le cas d'un système sans frottement, l'énergie mécanique se conserve.

$$\Rightarrow E_p(t) + E_c(t) = E_p(0) + E_c(0)$$

$$\frac{l^2 \dot{\theta}^2}{2} - gl \cos\theta = -gl + \frac{l^2 (\dot{\theta}_0)^2}{2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos(\theta))$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos(\theta))}$$

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos(\theta))}} = \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega} \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos(\theta)}}$$

Par intégration :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos(\Psi)}}$$

Les valeurs des conditions initiales  $\dot{\theta}$  et  $\omega$  varient selon le type de mouvement.

### 2.1 Mouvement périodique $\dot{\theta}_0 < 2\omega$

Posons :  $l - l^2 \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2g} = l \cos(\alpha)$  avec  $(0 < \alpha < \pi)$  et  $\alpha = \theta_m$  l'amplitude maximale.

Posons également :

—  $k^2 = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

—  $\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) = x \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  avec  $(0 < \Psi < \pi)$

—  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  avec  $(0 < \theta < \pi)$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos(\Psi)}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos(\Psi) - \cos(\alpha)}}$$

$$t = \frac{1}{2\omega} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)}}$$

Changement de variable :

$$\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) = kx \text{ donc } d\Psi = \frac{k dx}{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right)}$$

— Pour  $\Psi = 0 \rightarrow x = \frac{\sin\left(\frac{0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 0$

— Pour  $\Psi = \theta \rightarrow x = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = u$

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$u = sn(\omega t)$  donc :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) sn(\omega t)$$

avec  $(-\pi < \theta < \pi)$

Calcul de  $k$  :

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2k^2$$

$$k^2 = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} = \frac{l(\dot{\theta}_0)^2}{4g} \text{ soit } k = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donc finalement :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} sn(\omega t)$$

avec  $(-\pi < \theta < \pi)$

**Calcul de la période  $T$  :**

$$T = \frac{4}{\omega} K(k)$$

avec  $k = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega}$  et  $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$  l'intégrale elliptique complète de première espèce.

De plus, on a dans le cas linéaire des petites oscillations :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{\omega}$  donc  $T = T_0 \frac{2K(k)}{\pi}$ .

La fonction  $K(k)$  admet le développement :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots + \frac{\binom{2n}{n}^2}{16^n} k^{2n} + \dots \right)$$

En remplaçant  $k^2$  par  $\frac{\dot{\theta}_0^2}{4\omega^2}$ , on obtient la formule de Borda :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{4\omega^2} + \frac{9}{64} \times \frac{\dot{\theta}_0^2}{4\omega^4} \dots$$

## 2.2 Mouvement critique $\dot{\theta}_0 = 2\omega$

$\cos(\alpha) = 1 - \frac{(\dot{\theta}_0)^2}{2\omega^2}$  or  $\dot{\theta}_0 = 2\omega$  donc  $\cos(\alpha) = -1$  soit  $\alpha = \pi$

Posons  $u = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  avec  $(0 < \theta < \pi)$  :

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$t = \frac{1}{2\omega} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

soit

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = th(\omega t)$$

avec  $k = 1$

### 2.3 Mouvement circulaire $\dot{\theta}_0 > 2\omega$

Posons :

$$- k^2 = \frac{4\omega^2}{\dot{\theta}_0^2}$$

$$- \sin \frac{\Psi}{2} = x \text{ avec } (0 < \Psi < \pi)$$

$$- \sin \frac{\theta}{2} = u \text{ avec } (0 < \theta < \pi)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 1 + \cos(\Psi)}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} - 2\sin^2(\frac{\Psi}{2})}}$$

$$t = \frac{2}{\dot{\theta}_0} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ avec } k = \frac{2\omega}{\dot{\theta}_0}$$

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{\dot{\theta}_0}{2}t\right)$$

soit

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}\left(\frac{\dot{\theta}_0}{2}t\right)$$

Calcul de  $T = t(2\pi)$  :

$$t(2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\Psi}{\sqrt{l(1-2\sin^2(\frac{\Psi}{2})) - l\cos(\alpha)}}$$

Changement de variable :

$$- \text{Pour } \Psi = -\pi \rightarrow x = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = -1$$

$$- \text{Pour } \Psi = \pi \rightarrow x = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = 1$$

$$t(2\pi) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2l}{l-l\cos(\alpha)}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Or  $k^2 = \frac{2l}{l-l\cos(\alpha)} = \frac{4\omega^2}{\dot{\theta}_0^2}$  donc :

$$t(2\pi) = \frac{2}{\dot{\theta}_0} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2}{\dot{\theta}_0} \times 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Soit

$$T = t(2\pi) = \frac{4}{\dot{\theta}_0} K(k)$$

La relation  $\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}(\frac{\dot{\theta}_0}{2}t)$  est donc définie pour soit pour  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ . Or :

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$$

Et par imparité de la fonction  $\theta(t)$  on peut donc prolonger par continuité la fonction  $\theta = 2\arcsin \left( \operatorname{sn}(\frac{\dot{\theta}_0}{2}t) \right)$  sur  $\mathbb{R}$  en construisant une fonction définie par morceau :

$$\theta(t) = \begin{cases} 2\arcsin \left( \operatorname{sn}\left(\frac{\theta_0}{2}t\right) \right) & \text{pour } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 2\arcsin \left( \operatorname{sn}\left(\frac{\theta_0}{2}t - 2T\right) \right) + 2\pi & \text{pour } \frac{3T}{2} < t < \frac{5T}{2} \\ 2\arcsin \left( \operatorname{sn}\left(\frac{\theta_0}{2}t - 4T\right) \right) + 4\pi & \text{pour } \frac{5T}{2} < t < \frac{7T}{2} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

### 3 Résolution mathématique pour le cas général $\theta(0) \neq 0$ dans le cas d'un mouvement périodique

On considère cette fois-ci le problème de Cauchy suivant :  $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$  avec  $\omega^2 = \frac{g}{l}$

Les conditions initiales sont les suivantes :  $t = 0, \theta(0) = \theta, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$

Le bilan énergétique dans le cas d'un système sans frottement où l'énergie mécanique se conserve donne :

$$E_m = E_p + E_c$$

$\Leftrightarrow$

$$E_p(t) + E_c(t) = E_p(0) + E_c(0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 \left( \cos(\theta) - \cos(\theta_0) \right)$$

Posons  $\delta_0$  la valeur minimale de  $\dot{\theta}^2$ , qui représenterai l'énergie cinétique minimale nécessaire pour faire passer la masse au mouvement. Cette valeur est minimale pour  $\theta = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  et on obtient

$$\delta_0 = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \cdot (1 + \cos(\theta_0))$$

si  $\delta_0 < 0$

On suppose que  $\dot{\theta}_0 \geq 0$  et  $\theta_0 \in ]-\pi; \pi[$ , on a donc :  $\dot{\theta}_0 < 2\omega^2(1 + \cos(\theta_0))$

Il existe un majorant  $\alpha \in ]0, \pi[$  tq

$$\dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\theta_0)) = 0, \alpha = \text{amplitude maximale}$$

$$\dot{\theta}_0^2 = 2\omega^2 \cdot (\cos(\theta_0) - \cos(\alpha))$$

d'où  $\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\theta))$ , peut s'écrire  $\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 \cdot (\cos(\theta) - \cos(\alpha))$ ,

ou encore,

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 \cdot ((1 - \cos(\alpha)) - (1 - \cos(\theta))) = 4\omega^2 \cdot (\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}))$$

Or,  $\dot{\theta}^2 \geq 0$  d'où  $\sin^2(\frac{\theta}{2}) \leq \sin^2(\frac{\alpha}{2}) < 1$ , c'est à dire  $|\theta| < \alpha$

Ainsi,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 \cdot (\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}))$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{4\omega^2 \cdot (\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2}))}$$

Finalement, on obtient :

$$t = \frac{1}{2\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\psi}{2})}}$$

Afin d'obtenir une forme d'intégrale elliptique, nous aurons recours aux changements de variables :

$$- k^2 = \sin^2(\frac{\alpha}{2})$$

$$- \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = x \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k \cdot x$$

$$\begin{aligned} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= u \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k \cdot u \\ - \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) &= u_0 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k \cdot u_0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\omega} \int_{u_0}^u \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}} \\ \omega \cdot t &= \int_{u_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}} + \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}} \\ \omega \cdot t &= - \int_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}} + \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}} \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire,

$$u = \operatorname{sn}\left(\omega t + \int_0^{u_0} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2) \cdot (1-x^2)}}\right)$$

Donc,

$$\dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 \cdot (1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos(\theta_0)) = 0,$$

$$\iff$$

$$\dot{\theta}_0^2 + 2\omega^2 - 4\omega^2 k^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) = 0,$$

$$\iff$$

$$\dot{\theta}_0^2 + 4\omega^2 - 2\omega^2 - 4\omega^2 k^2 - 2\omega^2 \cos(\theta_0) = 0,$$

$$\iff$$

$$\delta_0 + 4\omega^2 = 4\omega^2 k^2$$

$$\iff$$

$$k^2 = \frac{\delta_0 + 4\omega^2}{4\omega^2}$$

Ainsi, le mouvement périodique pour le cas général où  $\theta_0$  est différent de 0, a comme période :

$$T = \frac{4}{\omega} K(k) \text{ avec } K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

## 4 Résolution mathématique avec frottements

On a trouvé précédemment :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$$

$$\text{avec } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Seulement cette équation représente le mouvement du pendule en régime périodique. Cela n'est pas un mouvement réaliste, en effet le pendule serait freiné par les frottements du fluide dans lequel est plongé le système. Nous allons donc dans cette partie créer une équation régissant le problème, puis nous allons simuler informatiquement celle-ci afin de mieux visualiser le mouvement. Dans ce cas-ci la masse  $m$  du pendule ne sera pas soumise qu'à son poids et à la tension du fil mais aussi aux forces de frottements. Il va falloir donc créer un terme de frottements (constant ou non) dans l'équation qui viendra freiner la masse.

### 4.1 Equation avec frottement dans le cas où le terme de frottement est linéaire :

Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Comme dit précédemment la bille est soumise à son poids, la tension du fil mais aussi aux forces de frottements.

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{P} + \vec{T}$$

$$mg\cos\theta\vec{U}_r - mg\sin\theta\vec{U}_\theta - T\vec{U}_r - kl\dot{\theta}\vec{U}_\theta = -ml\theta^2\vec{U}_r + ml\ddot{\theta}\vec{U}_\theta$$

En projetant sur  $\vec{U}_\theta$  et en divisant par  $ml$  on a :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

on a finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \omega^2\sin(\theta) = 0$$

Où  $k$  est le coefficient de frottement et  $m$  la masse de la boule. Pour définir ce coefficient  $k$  nous devons utiliser la formule de la force de traînée qui est la suivante :

$$k = \frac{1}{2}\rho SC$$

Où  $\rho$  représente la masse volumique du fluide,  $S$  la surface en contact avec le fluide,  $C$  le coefficient de traînée et  $k$  le coefficient de frottement en Newton. Pour trouver la valeur de  $C$  il faut se référer à un tableau listant tous les coefficients de traînée en fonction de la forme géométrique.

Forme		Coefficient de traînée
Sphère		0.47
Demi-sphère		0.42
Cube		1.05
Corps profilé		0.04
Semi-corps profilé		0.09

Mesures des coefficients de traînée

FIGURE 1 – Coefficients de traînée

Ici nous allons prendre une sphère, car c'est l'une des formes les plus simples, où  $C=0,47$ .

## 4.2 Equation avec frottement dans le cas où le terme de frottement dépend de la vitesse

Nous pouvons écrire une deuxième équation dans le cas où le coefficient de frottement dépendra aussi de la vitesse, c'est à dire qu'ici nous prenons en compte que le frottement est plus fort si la vitesse est plus importante. Pour cela il suffit de repartir du principe fondamentale de la dynamique en multipliant la valeur de la vitesse angulaire par les forces de frottement, on a donc :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + kv\vec{v}$$

or

$$kv\vec{v} = kl\dot{\theta}l\dot{\theta}\vec{U}_\theta = kl^2\dot{\theta}^2\vec{U}_\theta$$

$$mg\cos\theta\vec{U}_r - mg\sin\theta\vec{U}_\theta - T\vec{U}_r - kl^2\dot{\theta}^2\vec{U}_\theta = -ml\theta^2\vec{U}_r + ml\ddot{\theta}\vec{U}_\theta$$

On projette sur  $\vec{U}_\theta$  :

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin\theta - kl^2\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}l\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

on pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{kl}{m}\dot{\theta}^2 + \omega^2 sin(\theta) = 0$$

## 5 Simulations Maple pour le cas sans frottements

### 5.1 Modelisation Maple et comparaison entre méthodes exactes et approchées

#### Unités

Pour l'ensemble des graphiques, le temps t est en seconde (s), l'angle  $\theta$  en radian (*rad*), et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est en radian par secondes (*rad.s<sup>-1</sup>*).

#### Cas Périodique

---

```

> eq := diff(θ(t), t, t) +  $\frac{\pi^2}{4}$  · sin(θ(t)) = 0;
                                     eq =  $\frac{d^2}{dt^2}$  θ(t) +  $\frac{1}{4}$  π2 sin(θ(t)) = 0

> ini := θ(0) = 0, D(θ)(0) =  $\frac{\pi}{2}$ ;
                                     ini = θ(0) = 0, D(θ)(0) =  $\frac{1}{2}$  π

> sol0 := dsolve({eq, ini}, {θ(t)}); sol := dsolve({eq, ini}, {θ(t)}, numeric);
                                     sol0 = θ(t) = RootOf( - (  $\int_0^{-Z} \frac{2}{\sqrt{2\pi^2 \cos(\alpha) - \pi^2}} d_\alpha$  ) + t )
                                     sol = proc(x,kf#5) ... end proc

> sol(1);
                                     [t = 1., θ(t) = 1.04147878320020,  $\frac{d}{dt}$  θ(t) = 0.156205077796176]

> sol(0);
                                     [t = 0., θ(t) = 0.,  $\frac{d}{dt}$  θ(t) = 1.57079632679490]

> eval(θ(t), sol(1));
                                     1.04147878320020

> eval([t, θ(t)], sol(0));
                                     [0., 0.]

```

FIGURE 2 – Equations du cas périodique

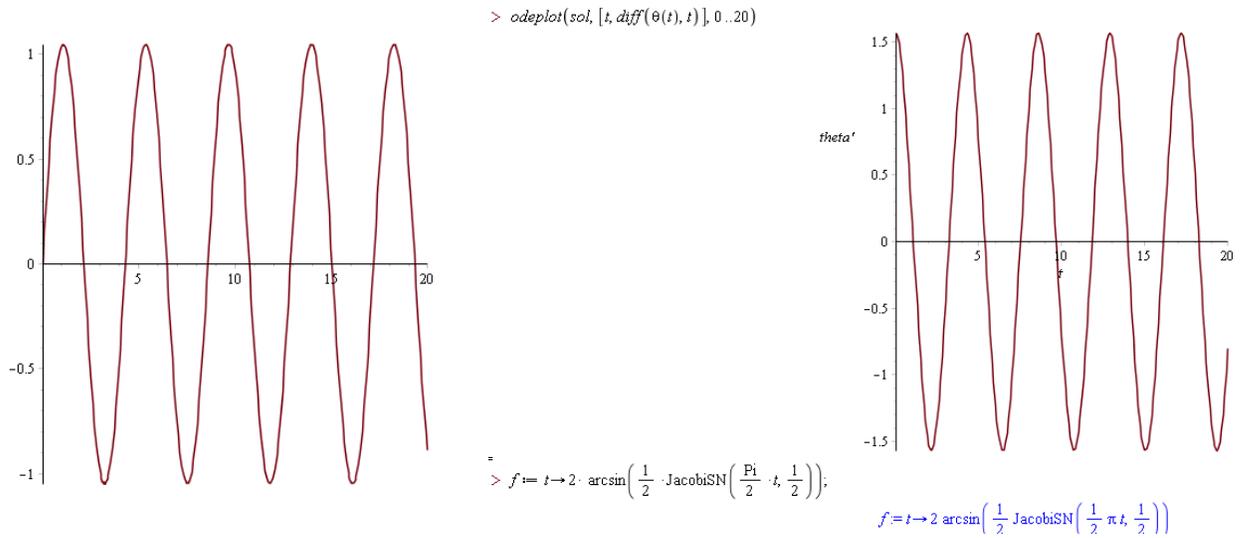


FIGURE 3 – Méthode numérique : Cas périodique

Résolution mathématique : Cas périodique

]

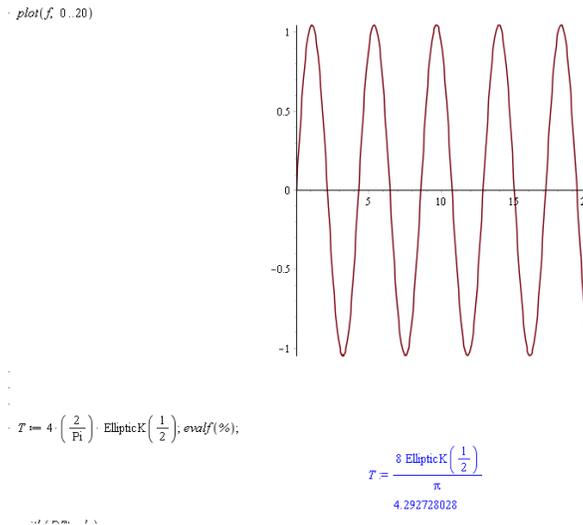


FIGURE 4 – Résolution mathématique : Cas périodique

Dans ces graphiques, on observe les résultats du cas périodique sans frottements. Grâce à la méthode numérique, on trace  $\theta$  puis dans le second graph,  $\dot{\theta}$ , respectivement en rad et rad/s. On observe bien une courbe caractéristique du mouvement périodique avec un motif régulier dans le temps. Le résultat de la méthode numérique est confirmé par le 3e graphique qui représente la solution  $\theta$  en utilisant la formule de la résolution mathématique obtenue dans la première partie du rapport. Nous observons les mêmes oscillations.

Equations du cas circulaire

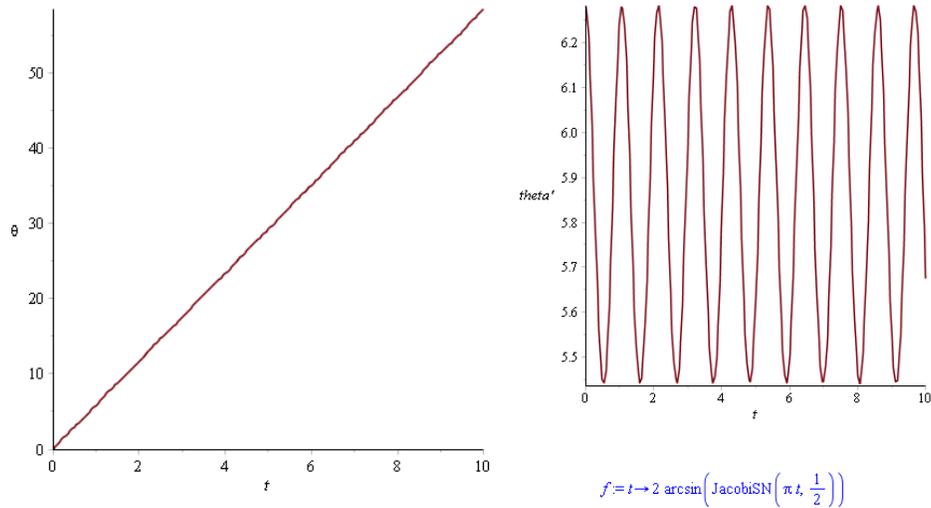


FIGURE 5 – Méthode numérique : Cas circulaire

Résolution mathématique : Cas circulaire

]

```
> T := (1/Pi) * EllipticK(1/2), evalf(%);
```

$$T = \frac{\text{EllipticK}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}$$

0.5365910035

```
> f := t -> 2 * arcsin(JacobiSN(Pi * t, 1/2));
```

$$f = t \rightarrow 2 \arcsin\left(\text{JacobiSN}\left(\pi t, \frac{1}{2}\right)\right)$$

```
> plot(f, -T..T)
```

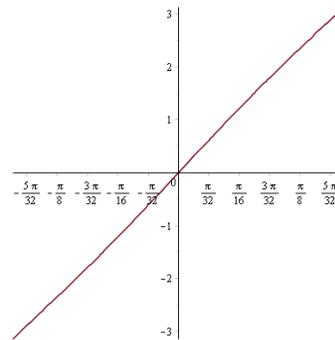


FIGURE 6 – Résolution mathématique : Cas circulaire

Dans ce cas, on observe une évolution linéaire de la position  $\theta$  du pendule. En effet, dans le cas circulaire sans frottements, le pendule fait des tours sans s'arrêter. On observe sur le graph de  $\dot{\theta}$  que les extremums de vitesse sont constants, caractéristique d'un mouvement non amorti. La méthode de résolution mathématique exacte confirme ce résultat puisqu'on obtient également une évolution linéaire.

Equations du cas critique

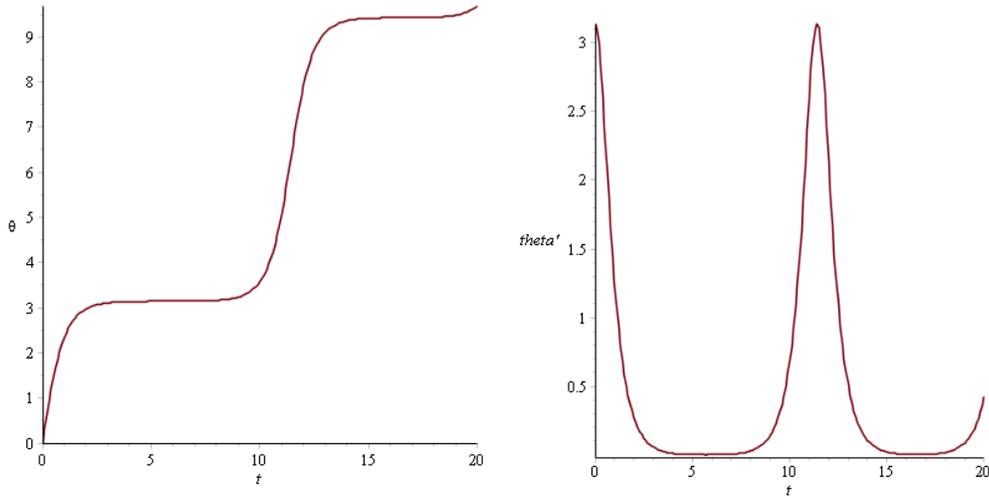


FIGURE 7 – Méthode numérique : Cas critique

Résolution mathématique : Cas critique

]

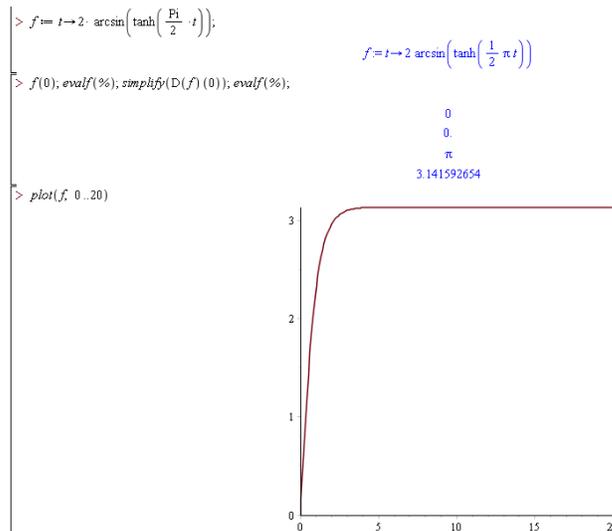


FIGURE 8 – Résolution mathématique : Cas critique

On observe sur le dernier graphique, la représentation de la résolution mathématique. On reconnaît le cas critique, puisque  $\theta$  (en rad) se stabilise en  $\pi$  et n'évolue plus dans le temps. Le pendule est arrivé à sa position d'équilibre et n'évolue plus. Lorsque l'on observe les premiers graphiques obtenus grâce à la méthode numérique, on observe cette même stabilisation. Cependant après un certain temps la position augmente à nouveau, ce qui signifie que le pendule reprend son mouvement et complète un tour. On retrouve la même chose dans le graph de la vitesse où aux mêmes instants  $t$ , la vitesse augmente lorsque la valeur  $\theta$  de la position augmente. Ces deux résultats différents, mettent en avant une limite de la méthode numérique. En effet, cette méthode pour le cas critique nous fait retomber dans une représentation du cas circulaire.

## 5.2 Plans de phase et points fixes

### Généralités

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales déterminées, c'est ce que l'on appelle le principe du déterminisme mécanique. Pour nos trois mouvements - périodique, circulaire et critique, sans frottements- nous allons étudier le portrait de phase du système représentant l'ensemble des trajectoires de phase du système en considérant toutes les conditions initiales réalisables.

Chaque point de phase  $P(t)$  à la date  $t$  est décrit par les coordonnées  $(x(t), v(t))$ . Les points d'équilibres ; aussi appelé points singuliers, sont les points de phase dont les coordonnées vérifient les relations :  $\frac{dx}{dt} = 0$  et  $\frac{dv}{dt} = 0$ . On peut distinguer deux types de points singuliers : stable ou instable. Un point d'équilibre est considéré comme stable si lorsqu'on applique une perturbation, l'élément finit par retrouver sa position d'équilibre. Dans le cas contraire, il est instable.

D'ailleurs, nous pouvons justifier les positions d'équilibre du pendule et leur stabilité en utilisant l'énergie potentielle. En effet,

$M$  est à l'équilibre dans (R) galiléen  $\leftrightarrow F(x)=0 \leftrightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0 \leftrightarrow$  la courbe de  $E_p$  présente une tangente horizontale en cette position d'équilibre

Lorsque  $\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$ , l'équilibre est stable (ici,  $\theta = 0$ ) Lorsque  $\frac{d^2 E_p}{dx^2} < 0$ , l'équilibre est instable (ici,  $\theta = (2k + 1)\pi$ )

Dans notre projet, on étudie la position de notre pendule en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  On a vu que  $m l^2 \ddot{\theta} = m g l \sin(\theta)$  et donc  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin(\theta)$ . On considère donc les équations d'évolutions  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  et  $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\theta)$

En cherchant les solutions de  $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ , on retrouve deux points singuliers tels que  $\sin(\theta) = 0$ . Le premier correspond à la position initiale en  $y=0$  et  $\theta = 0$ , et il est stable. Le second en revanche est instable, en  $y=0$  et  $\theta = (2k + 1)\pi$  (soit  $\pi, 3\pi ; 5\pi \dots$ ).

De plus l'aspect énergétique du mouvement permet d'approfondir l'étude du portrait de phase. Comme on considère un système conservatif, l'équation de conservation d'énergie peut s'écrire :  $\frac{1}{2}(l\dot{\theta})^2 + gl(1 - \cos\theta) = E_m$ , en posant  $y = \frac{\dot{\theta}(t)}{\theta_0}$ , on obtient l'équation de trajectoire de phase :  $y^2 + 2(1 - \cos\theta) = \frac{2E_m}{mgl}$

Ces trajectoires dépendent uniquement des conditions initiales imposées et représentent des courbes isoénergétiques. Pour différencier les différents mouvements parmi toutes les trajectoires du plan de phase, on cherche l'équation des séparatrices. Ces dernières représentent également le mouvement critique. A l'intérieur de ces courbes ; on aura un mouvement périodique avec des trajectoires fermées et une oscillation de part et d'autre d'une position d'équilibre stable. A l'extérieur, on trouve un mouvement circulaire avec des trajectoires ouvertes.

L'équation des séparatrices s'obtient en calculant la valeur de  $E_m$  avec les coordonnées d'un point singulier instable,  $y=0$  et  $\theta = (2k + 1)\pi$ . On obtient  $y^2 + 2(1 - \cos\theta) = 4$ .

### Représentations Maple

Nous avons donc tracé grâce au logiciel Maple, le plan de phase de chaque cas.

## Cas critique :

with(DTools):

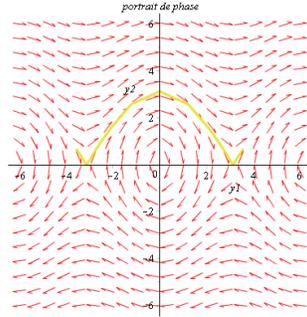
$$\text{sys} := \text{D}(y1)(t) = y2(t), \text{D}(y2)(t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin(y1(t));$$

$$\text{sys} = \text{D}(y1)(t) = y2(t), \text{D}(y2)(t) = -\frac{1}{4} \pi^2 \sin(y1(t)) \quad (12)$$

inits := [0, 0, Pi];

$$\text{inits} = [0, 0, \pi] \quad (13)$$

DDEplot([sys[1], sys[2]], [y1(t), y2(t)], t = -10..10, y1 = -6..6, y2 = -6..6, [inits], scaling = constrained, title = 'portrait de phase');



?RootOf  
?th

La courbe jaune représente la séparatrice évoquée précédemment. De plus, on peut clairement identifier les points instables en  $y=0$  et  $\theta = (2k + 1)\pi$ .

## Cas périodique :

> with(DTools):

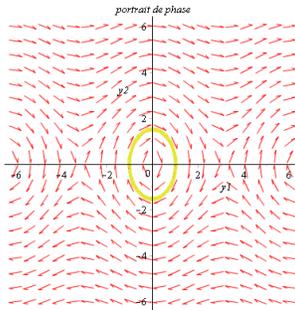
$$\text{sys} := \text{D}(y1)(t) = y2(t), \text{D}(y2)(t) = -\frac{\pi^2}{4} \sin(y1(t));$$

$$\text{sys} = \text{D}(y1)(t) = y2(t), \text{D}(y2)(t) = -\frac{1}{4} \pi^2 \sin(y1(t)) \quad (12)$$

> inits := [0, 0, Pi/2];

$$\text{inits} = [0, 0, \frac{1}{2} \pi] \quad (13)$$

> DDEplot([sys[1], sys[2]], [y1(t), y2(t)], t = -10..10, y1 = -6..6, y2 = -6..6, [inits], scaling = constrained, title = 'portrait de phase');



>  
>  
> ?RootOf

La courbe en jaune, dite d'oscillations ou en œil d'horus, représente notre cas périodique. Chaque orbite est parcourue dans le sens inverse au sens trigonométrique et tourne autour des points d'équilibre stables (ici, autour de 0). Comme évoqué dans la partie généralités, cette courbe se situe "à l'intérieur" de la séparatrice.

### Cas circulaire :

```
> T := (1/Pi) * EllipticK(1/2); evalf(%);
```

$$T = \frac{\text{EllipticK}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}$$

0.5365910035

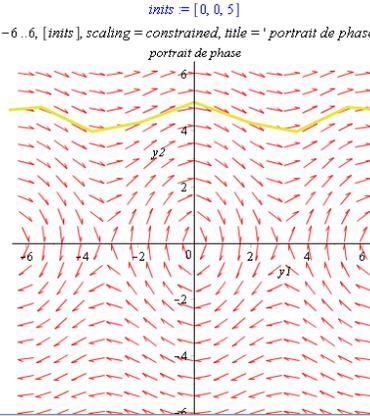
```
"> with(DEtools):
```

```
> sys := D(y1)(t) = y2(t), D(y2)(t) = -pi^2/4 * sin(y1(t));
```

$$\text{sys} = D(y1)(t) = y2(t), D(y2)(t) = -\frac{1}{4} \pi^2 \sin(y1(t))$$

```
> imts := [0, 0, 5];
```

```
> DEplot([sys[1], sys[2]], [y1(t), y2(t)], t = -10..10, y1 = -6..6, y2 = -6..6, [imts], scaling = constrained, title = 'portrait de phase');
```



La courbe jaune représente la région de révolution positive mais il existe en réalité deux régions. Les deux régions de révolutions (positive en haut ou négative en bas) correspondent au cas où le pendule tourne autour du point 0. Une fois de plus on retrouve un résultat attendu, la courbe se situe “à l’extérieur” de la séparatrice.

## 6 Simulations informatiques pour le cas avec frottements

### Unités

Pour l’ensemble des graphiques, le temps  $t$  est en seconde (s), l’angle  $\theta$  en radian ( $rad$ ), et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est en radian par secondes ( $rad.s^{-1}$ ).

### 6.1 Maple

Après avoir déterminé une équation différentielle avec un ralentissement linéaire et non linéaire nous allons pouvoir simuler informatiquement les mouvements de ce pendule amorti. Dans cette partie je vais vous présenter la simulation Maple. Tout d’abord nous devons créer les deux équations différentielles et définir leur constantes. Pour cette première simulation nous allons prendre des valeurs basiques pour la masse et la longueur :  $m=0,5$  kg ;  $l=0,5$  m  $g=9,81$  m.s<sup>-1</sup> donc  $k=0,1$  Pour la valeur de  $k$  nous prendrons 0,1. Ce qui nous donne finalement :

$$\ddot{\theta} + 0,2\dot{\theta}^2 + 19.62\sin(\theta) = 0$$

Nous pouvons recopier ces valeurs sur maple, ce qui nous donne :

```
> m := 0.5; L := 0.5; g := 9.81; k := 0.1; eq := diff(theta(t), t, t) + k/m * diff(theta(t), t) + g/L * sin(theta(t))
```

```
= 0;
```

```
m := 0.5
```

```
L := 0.5
```

```
g := 9.81
```

```
k := 0.1
```

$$eq := \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + 0.2000000000 \frac{d}{dt} \theta(t) + 19.62000000 \sin(\theta(t)) = 0 \quad (1)$$

Ensuite nous pouvons entrer les valeurs initiales qui sont  $\theta(0)=\pi/2$  :

```
> ini := theta(0) = 0, D(theta)(0) = Pi/2;
```

$$ini := \theta(0) = 0, D(\theta)(0) = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Maple permet de couvrir un large domaine mathématique en effet on peut travailler sur des quantités numériques, des polynômes, des fonctions, réaliser des dérivations, des intégrations, des calculs sur les matrices, résoudre des systèmes d'équations linéaires, des équations différentielles... Et dans ce cas-ci résoudre une équation différentielle et afficher des courbes représentant l'équation :

```
> sol := dsolve({eq, ini}, {theta(t)}, numeric);
sol := proc(x_rkf45) ... end proc (3)
```

```
> sol(1);
[t = 1., theta(t) = -0.306583738243841, d/dt theta(t) = -0.408245957195643] (4)
```

```
> sol(0);
[t = 0., theta(t) = 0., d/dt theta(t) = 1.57079632679490] (5)
```

```
> eval(theta(t), sol(1));
-0.306583738243841 (6)
```

```
> eval([t, theta(t)], sol(0));
[0., 0.] (7)
```

```
> odeplot(sol, [t, theta(t)], 0..10);
```

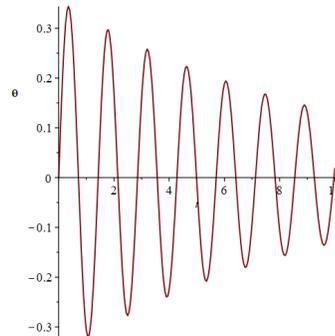


FIGURE 9 –  $\theta$  en fonction du temps entre  $t=0s$  et  $t=10s$

```
> odeplot(sol, [t, diff(theta(t), t)], 0..20)
```

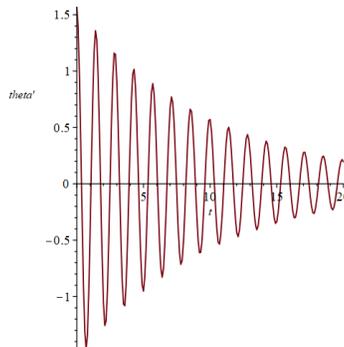


FIGURE 10 – Vitesse angulaire de la sphère en fonction du temps entre 0 et 20 secondes

Nous pouvons observer qu'il y a bien un ralentissement des oscillations de la sphère due à un frottement fluide. Si l'on élargit l'intervalle nous pouvons observer que le pendule s'arrête complètement à partir de 50 secondes :

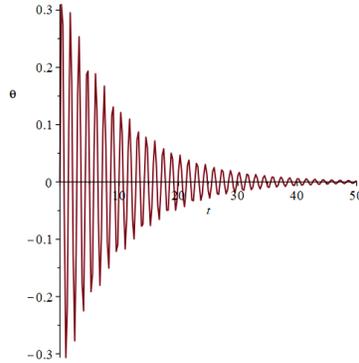


FIGURE 11 –

Les mouvements du pendule sont cohérents avec les valeurs dites "basiques" que nous avons pris. Cependant il peut être intéressant d'analyser les oscillations avec des valeurs plus "aberrantes", comme une grande masse, un très long fil ou encore une grande surface. Si par exemples nous prenons une sphère de très grandes tailles, le coefficient  $k$  augmente beaucoup, prenons  $k=1$  par exemple :

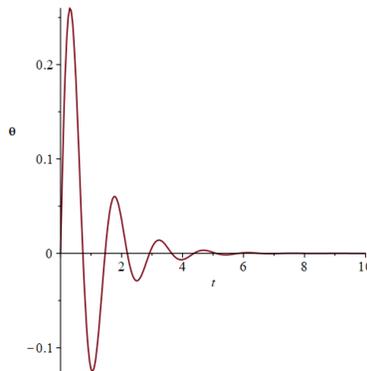


FIGURE 12 –

On peut observer que le ralentissement est bien plus brutal si la surface est grande. Si l'on augmente la masse, à l'inverse le ralentissement sera moins grand.

Maintenant nous allons nous intéresser au deuxième cas, celui où le frottement n'est pas linéaire et où nous avons une vitesse quadratique. Nous allons prendre les même valeur "normales" que précédemment :  $m=0,5$  kg ;  $l=0,5$ m ;  $k=0.1$  .

Nous obtenons les courbes ci-dessous :

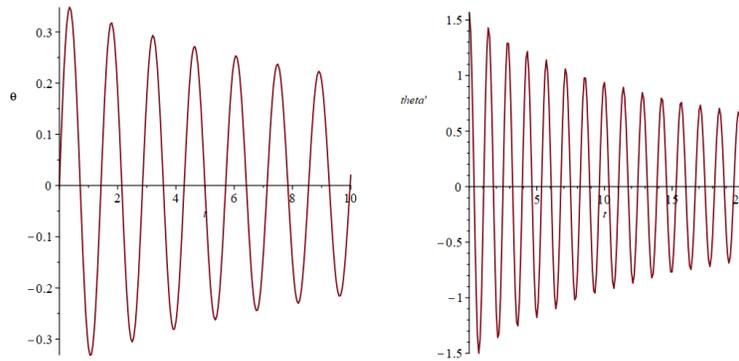


FIGURE 13 –

## 6.2 Pascal

Nous sommes parties de l'équation différentielle que l'on avait trouvé qui se situe dans  $\mathbb{R}^2$  pour en déduire une nouvelle équation différentielle grâce à la méthode RK4 qui se situe elle dans  $\mathbb{R}$  car en effet dans Geany en codage Pascal nous ne pouvons pas coder une équation de  $\mathbb{R}^2$ .

### Explication de la méthode RK4 :

La méthode de Runge-Kutta est une méthode d'analyse numérique approximative pour la résolution d'équations différentielles. Ils portent le nom des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta, qui ont développé la méthode en 1901. Ces méthodes sont basées sur le principe itératif, c'est-à-dire utiliser la première estimation de la solution pour calculer la seconde, des estimations plus précises, et ainsi de suite. La méthode RK4 est un cas particulier très fréquemment utilisé. Considérons le problème de Cauchy suivant :  $Y' = F(t, Y)$  et  $Y(t_0) = Y_0$  avec  $t \in \{t_0, \dots, T\}$ . La méthode RK4 est la suivante :

Choisissons une subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, \dots, T]$ .

On a  $t_n = t_0 + nh$  pour  $n \in \{0, \dots, N+1\}$  avec  $h = \frac{T - t_0}{N+1}$ . On pose aussi :  $Y_n = Y(t_n)$

Une approximation de solution  $Y$  en  $t_n$  du problème de Cauchy.

$$Y_{n+1} = Y_n + h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\text{d'où : } K_1 = f(t_n, Y_n) \quad K_2 = f(t_n + h/2, Y_n + h/2 K_1)$$

$$K_3 = f(t_n + h/2, Y_n + h/2 K_2) \quad K_4 = f(t_n + h, Y_n + h K_3)$$

L'idée est que la valeur suivante ( $y_{n+1}$ ) est approchée par la somme de la valeur actuelle ( $y_n$ ) et du produit de la taille de l'intervalle ( $h$ ) et de la pente estimée. La pente est obtenue par la moyenne pondérée des pentes :

- $K_1$  est la pente au début de l'intervalle.

- $K_2$  est la pente au milieu de l'intervalle.

- $K_3$  est à nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais cette fois elle est calculée par la pente  $K_2$ .

- $K_4$  est la pente à la fin de l'intervalle, et la valeur de  $y$  est calculée à l'aide de  $K_3$ .

### On utilise la méthode RK4 en résolvant les équations :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

Conditions initiales :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$  et  $z(0) = z_0$

Prenons  $z = \dot{\theta}$ . Nous avons un problème de Cauchy avec  $Y' = F(t, Y)$  et  $Y(t_0) = Y_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  ( avec  $t \in [t_0, T]$  ). En prenant  $Y = (\theta, z)$  et  $F(t, Y) = F(t, \theta, z) = (z, -\omega^2 \sin \theta)$  ( car  $Y' = (z, z')$  et  $z' = \ddot{\theta}$  )

Nous pouvons écrire sous la forme scalaire :

$$F(t, \theta, z) = (f_1(t, \theta, z); f_2(t, \theta, z)) = (z - \omega^2 \sin \theta)$$

Choisissons une subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, \dots, T]$  Par exemple si  $t_0 = 0$ , nous prenons un pas constant  $h = t_{i+1} - t_i$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  et  $t_i = ih$  pour  $i \in \{0, \dots, N+1\}$  avec  $h = TN + 1$  et nous obtenons l'équation récurrente vectorielle dans  $\mathbb{R}^2$  :

$Y_n = (\theta_n, z_n) \quad t \in \mathbb{R}^2$  ce qui donne :  $Y_{n+1} = Y_n + h_6 (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$  Avec  $K_i = (k_{i1}, k_{i2})_t$ ,  $i = \{1, \dots, 4\}$  et  $Y_0$  donné.

Donc  $K_1 = F(t_n, Y_n)$

$K_2 = F(t_n + h/2, Y_n + h/2 K_1)$

$K_3 = F(t_n + h, Y_n + h K_2)$

$K_4 = F(t_n + h, Y_n + h K_3)$

En utilisant les fonctions scalaires, on obtient :

$k_{11} = f_1(t_n, \theta_n, z_n) = z_n$

$k_{12} = f_2(t_n, \theta_n, z_n) = -\omega^2 \sin(\theta_n)$

$k_{21} = f_1(t_n + h/2, \theta_n + h/2 k_{11}, z_n + h/2 k_{12}) = z_n + h/2 k_{12} = z_n + (-\omega^2 h/2 \sin)(\theta_n)$

$k_{22} = f_2(t_n + h/2, \theta_n + h/2 k_{11}, z_n + h/2 k_{12}) = -\omega^2 \sin(\theta_n + h/2 k_{11}) = -\omega^2 \sin(\theta_n + h/2 z_n)$

$k_{31} = f_1(t_n + h, \theta_n + h k_{21}, z_n + h k_{22}) = z_n + h k_{22}$

$k_{32} = f_2(t_n + h, \theta_n + h k_{21}, z_n + h k_{22}) = -\omega^2 \sin(z_n + h k_{21})$

$k_{41} = f_1(t_n + h, \theta_n + h k_{31}, z_n + h k_{32}) = z_n + h k_{32}$

$k_{42} = f_2(t_n + h, \theta_n + h k_{31}, z_n + h k_{32}) = -\omega^2 \sin(\theta_n + h k_{31})$

Nous obtenons les 2 équations récurrentes scalaires suivantes :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h_6 (k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$z_{n+1} = z_n + h_6 (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$$

Une fois que l'on a obtenu les équations on est passé directement sur la simulation informatique. On a donc codé les équations sur Geany en pascal afin de modéliser les courbes. Le code pascal est disponible en annexe. Dans un premier temps on a vu le cas sans frottement, on a donc obtenu la courbe suivante. On remarque qu'elle est totalement sinusoïdale et périodique en accord avec ce terme sans frottement.

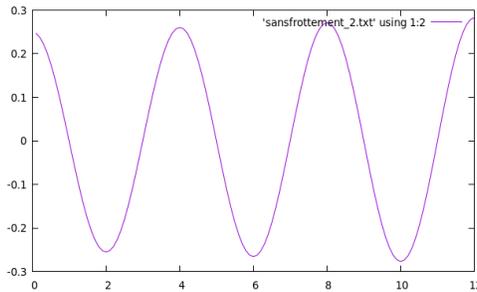


FIGURE 14 –

Puis dans un second temps nous avons fait le cas avec frottement, on a donc obtenu la courbe suivante.

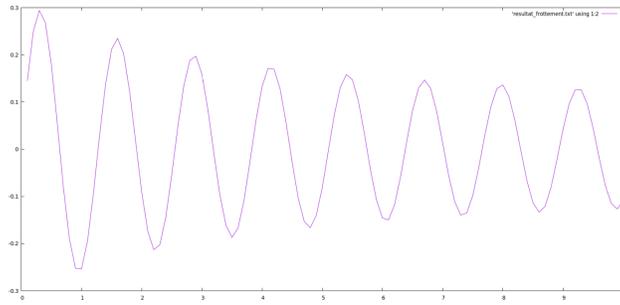


FIGURE 15 –

On remarque qu'elle est totalement sinusoïdale et mais non périodique et donc en accord avec ce terme avec frottement.

On remarque qu'entre les deux codes "avec frottement et sans frottement " la seule chose qui change c'est qu'on a rajouté un "coeff" dans le code qui est le coefficient de frottement qu'on met.

On peut donc conclure que les effets du frottement ont un effet considérable sur le pendule et on ne peut donc pas les négliger sur un cas réel.

# Conclusion

Pour conclure, ce projet nous aura demandé de grandes capacités d'adaptation. A la fois du côté humain, puisqu'avant ce projet la plupart d'entre nous n'avait jamais travaillé ensemble ; et au niveau du travail puisque nous nous sommes retrouvés face à des notions ou de nouveaux outils avec lesquels nous n'étions pas toujours à l'aise.

Au début du projet, nous avons ensemble étudié la mise en situation et les résolutions mathématiques afin de se familiariser avec le problème. Par la suite, la répartition du travail s'est faite assez naturellement en fonction de nos alternances présentielle afin que ceux qui traitaient la même partie puissent continuer de travailler ensemble.

Ce projet, assez similaire dans son organisation à un projet d'ingénieur en entreprise, nous a aussi permis de nous rendre compte des difficultés à faire le lien, à distance, entre les différentes parties du projet afin d'obtenir un ensemble cohérent. Au-delà de l'approfondissement de nos connaissances scientifiques et techniques, ce projet nous aura donc montré les différentes capacités humaines à mobiliser pour mener à bien un tel projet.

# Bibliographie

## Découverte de la théorie du pendule en 1656 par Christian Huygens

Il dépose le premier brevet d'horloge à pendule et afin de rendre la mesure du temps plus précise, reprend la formule de Galilée sur l'isochronisme du pendule mais la perfectionne pour l'adapter aux horloges.

— [https://www.lepoint.fr/montres/Magazine/Grand-horlogers/christian-huygens-03-12-2012-2018098\\_2978.php](https://www.lepoint.fr/montres/Magazine/Grand-horlogers/christian-huygens-03-12-2012-2018098_2978.php)

## Un pendule simple est un oscillateur mécanique

Un oscillateur mécanique est un système d'un mouvement de va et vient, en général autour d'une position d'équilibre stable Un pendule simple est constitué d'un solide de masse  $m$ , suspendu à un point fixe  $O$  par un fil inextensible de longueur  $L$ , de masse négligeable. Écarté de sa position d'équilibre avec un angle  $\theta$ , il oscille dans le champ de pesanteur terrestre  $g$ .

— <https://www.chimix.com/an4/term4/pendule.htm#:~:text=oscillateur%20m%C3%A9canique%20%3A%20le%20pendule&text=Un%20pendule%20si>

## Lien entre la période d'oscillation $T$ et la longueur du fil $l$

Protocole expérimental simple mettant en évidence le fait que la période d'un pendule simple varie selon la racine carrée de sa longueur.

— <http://phymain.unisciel.fr/periode-dun-pendule-simple/>

## Etude de l'équation du mouvement d'oscillation d'un pendule simple

On parvient à retrouver l'équation différentielle correspondante au mouvement du pendule en utilisant le PFD et en exprimant l'accélération en fonction de l'angle  $\theta$  et grâce à des projections.

— [http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_SC\\_M16\\_G03/co/Contenu\\_21b.html](http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_SC_M16_G03/co/Contenu_21b.html)

## Résolution exacte de la période d'oscillation du pendule simple

— <https://www.techno-science.net/definition/1830.html>

## Présentation du problème de Cauchy

— [https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me\\_de\\_Cauchy](https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Cauchy)

## Résolution de l'équation différentielle d'un pendule simple

Nous cherchons la solution générale et particulière de l'équation différentielle en effectuant l'approximation  $\sin(\theta) \approx \theta$  pour les petites valeurs de  $\theta$  puis en intégrant l'équation.

— [http://uel.unisciel.fr/physique/outils\\_nancy/outils\\_nancy\\_ch10/co/sexercer\\_07.html](http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch10/co/sexercer_07.html)

## Éléments bibliographique de Karl David RUNGE, qui donne en partie son nom à la méthode RK4

— <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Runge.html>

## Éléments bibliographique de Martin Wilhelm Kutta, qui donne en partie son nom à la méthode RK4

— <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kutta/>

## Méthode d'Euler et RK4

On trouve ici une explication détaillée des méthodes RK2 et RK4, utilisée pour trouver une approximation de la solution, tout en minimisant l'erreur. On voit que si cette méthode permet de corriger l'erreur de la méthode d'Euler, elle nécessite aussi quatre fois plus de calcul.

— <https://femto-physique.fr/omp/runge-kutta.php>

Mise en équation du problème et comparaison de plusieurs méthodes d'approximations (RK2/RK4/SY2/SY4). (> pages 20 à 24)

— <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01959896v2/document>

On trouve à partir de la 3e partie de la page l'application de la méthode d'Euler puis RK4 pour la résolution du problème du pendule.

— <https://www.physagreg.fr/methodes-numeriques-euler-runge-kutta.php>

## Positions d'équilibres et stabilité

Calcul des positions d'équilibre et de leur stabilité sur l'exemple du pendule en utilisant l'énergie potentielle. Explication du développement de Taylor au point d'équilibre.

— <https://melusine.eu.org/syracuse/immae/mpsi/physique-chimie/mecanique/03.pdf>

# Annexe

## Sans frottements

```
program P6_pendule;
var n :Integer;
h,t,x,v,xn1,vn1 : Real; fichier :Text;
function f(xn,vn : Real) :Real;
begin
f :=-(xn*((3.142*3.142)/4))
end;
procedure RK1D(xn,vn : Real);
var k1,k2,k3,k4,L1,L2,L3,L4 : Real;
begin
k1 :=h*vn;
L1 :=h*f(xn,vn);
k2 :=h*(vn+L1/2);
L2 :=h*f(xn+k1/2,vn+L1/2);
k3 :=h*(vn+L2/2);
L3 :=h*f(xn+k2/2,vn+L2/2);
k4 :=h*(vn+L3);
L4 :=h*f(xn+k3/2,vn+L3);
xn1 := xn+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
vn1 := vn+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
end;
begin
x :=0.25;{teta0}
v :=0;{teta0point}
h :=0.1;{pas de temps}
Assign(fichier,'sansfrottement_2.txt');
rewrite(fichier);
append(fichier);
for n :=1 to 120 do
begin t :=n*h;
write(fichier,t :0 :12);
write(fichier,' ');
RK1D(x,v);
write(fichier,xn1 :3 :4);
writeln(fichier,' ');
{writeln('position :',x :2 :2);}
{writeln('vitesse : ',v :2 :2);}
x :=xn1;
v :=vn1;
end;
close(fichier);
writeln('fin')
end.
```

### Avec frottements

```
program P6_pendule;
var n : Integer;
h,t,x,v,xn1,vn1,coef : Real; fichier : Text;
function f(xn,vn : Real) : Real;
begin
f := -(xn*24.5+abs(vn)*vn*coef)
end;
procedure RK1D(xn,vn : Real);
var k1,k2,k3,k4,L1,L2,L3,L4 : Real;
begin
k1 := h*vn;
L1 := h*f(xn,vn);
k2 := h*(vn+L1/2);
L2 := h*f(xn+k1/2,vn+L1/2);
k3 := h*(vn+L2/2);
L3 := h*f(xn+k2/2,vn+L2/2);
k4 := h*(vn+L3);
L4 := h*f(xn+k3/2,vn+L3);
xn1 := xn+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
vn1 := vn+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
end;
begin
coef := 0.04;
x := 0.25; {teta0}
v := 0; {teta0point}
h := 0.01; {pas de temps}
Assign(fichier,'resultat_2.txt');
rewrite(fichier);
append(fichier);
for n := 1 to 800 do
begin
t := n*h;
write(fichier,t : 3 : 2);
write(fichier,' ');
RK1D(x,v);
write(fichier,xn1 : 3 : 4);
writeln(fichier,' ');
{writeln('position : ',x : 2 : 2);}
{writeln('vitesse : ',v : 2 : 2);}
x := xn1;
v := vn1;
end;
close(fichier);
writeln('fin')
end.
```