

# Modélisation du trafic autoroutier à l'aide des lois de la mécanique des fluides



**Etudiants :**

**Lucie LOYAU**

**Eric FLAVIGNE**

**Julie CHIQUET**

**Théophile CHAUMONT-FRELET**

**Gaëlle REVAUX**

**Enseignant-responsable du projet :**

**Jérôme YON**



Date de remise du rapport : 22/06/09

Référence du projet : STPI/P6-3/2009 – N°2

Intitulé du projet : **Modélisation du trafic autoroutier à l'aide des lois de la mécanique des fluides**

Type de projet : **Calcul, Simulation**

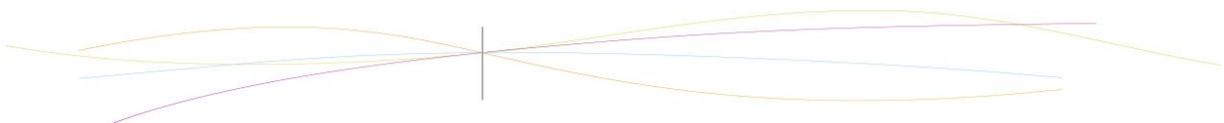
Objectifs du projet (10 lignes maxi) :

***L'objectif principal de ce projet est de modéliser le comportement humain à l'origine des embouteillages à l'aide des 2 équations de la mécanique des fluides : la dérivée particulaire et l'équation de conservation de la masse.***

## TABLE DES MATIERES

1. Introduction .....	6
2. Méthodologie / Organisation du travail .....	7
3. Travail réalisé et résultats .....	8
3.1. Deux approches de l'écoulement d'un fluide .....	8
3.1.1. Variables de Lagrange .....	8
3.1.2. Variables d'Euler .....	8
3.2. Différentes simulation déjà existantes.....	9
3.2.1. Macroscopiques.....	9
3.2.2. Microscopiques.....	10
3.3. Explication des équations.....	11
3.3.1. Dérivée particulaire.....	11
3.3.2. Loi de conservation de la masse.....	12
3.4. Explication du phénomène choisi: bouchon.....	13
3.4.1. Première méthode: à partir d'un résultat de recherche.....	13
3.4.2. Deuxième méthode: utilisation des équations de la dérivée particulaire et de conservation de la masse.....	16
3.4.3. Comparaison des 2 méthodes.....	22
3.5. Etude qualitative et interprétation physique de la modélisation du trafic autoroutier.....	22
3.5.1. Modélisation de la distance entre les voitures/vitesse/accélération.....	23
3.5.2. Modélisation de l'accélération en fonction de la distance.....	26
4. Conclusions et perspectives.....	27
5. Bibliographie .....	29
6. Annexes (non obligatoire) .....	30
6.1. Résolution mathématique.....	30
6.2. Listings des programmes réalisés .....	32

## NOTATIONS, ACRONYMES



## 1. INTRODUCTION

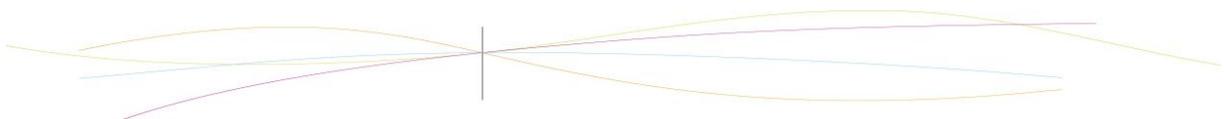
*Contexte du travail. Objectifs à atteindre pour le projet.*

Différentes méthodes de simulation du trafic autoroutier existent déjà. Dans ce projet, nous allons tenter de modéliser le phénomène de bouchon grâce aux lois de la mécanique des fluides. En effet, chaque voiture peut être assimilée à une particule donc le trafic autoroutier à l'écoulement d'un fluide ce qui explique l'utilisation de la mécanique des fluides dans notre étude.

Les objectifs de cette étude sont les suivants :

- comprendre le sens physique des équations (dérivée particulaire et conservation de la masse) du sujet en étudiant le rapport du projet de l'an dernier.
- Faire un état de l'art des différentes méthodes de simulation déjà existantes.
- Prendre en main le logiciel Scilab pour résoudre les équations.
- Étudier différents cas typiques tels que l'établissement d'un bouchon.

Tout d'abord, nous allons expliquer les 2 approches possibles de la mécanique des fluides. Les différentes méthodes de simulation déjà existantes seront ensuite décrites. Puis nous ferons une explication approfondie des 2 équations du sujet (loi de conservation de la masse et dérivée particulaire). Enfin nous tenterons de modéliser le phénomène de bouchon à l'aide de l'analyse numérique des équations.

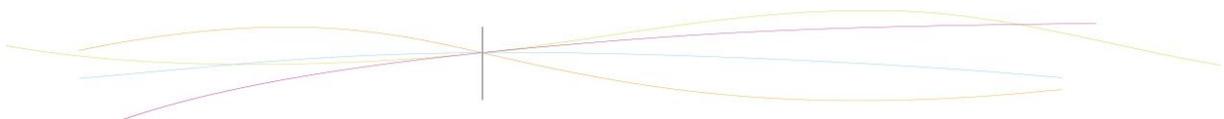


## 2. METHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

*Description de l'organisation adoptée pour le déroulement du travail:*

Nous nous sommes tout d'abord penchés sur l'étude et la compréhension des équations du sujet, à savoir l'équation de conservation de la masse et celle de la dérivée particulière. De plus, nous nous sommes intéressés au travail effectué l'an dernier. Nous avons utilisé le logiciel libre Scilab pour modéliser les différents résultats issus des équations. Après quelques séances, nous nous sommes partagés le travail comme l'indique le diagramme ci-dessous.

*Organigramme des tâches réalisées et des étudiants concernés:*



### 3. TRAVAIL REALISE ET RESULTATS

#### 3.1. Deux approches de l'écoulement d'un fluide

La cinématique a pour but l'étude des mouvements des fluides. Or dans notre projet, nous assimilons le trafic autoroutier à un écoulement fluide. C'est pour cela que l'on peut utiliser certaines équations de cinématique que nous analyserons ultérieurement (dérivée particulaire). Il existe deux méthodes pour étudier un écoulement fluide : le formalisme Lagrangien et le formalisme Eulérien. Elles diffèrent par le choix des variables adoptées.

##### 3.1.1. Variables de Lagrange

Dans cette méthode, on étudie le mouvement de chaque particule qui compose le fluide individuellement.

En effet, on définit la trajectoire  $R_i(t)$  de chaque particule pour reconstituer le mouvement d'ensemble. C'est-à-dire que l'on étudie les coordonnées  $x, y, z$  de chaque particule fluide à un instant  $t$ . Ainsi, le mouvement de la particule est connue si on se donne  $x, y, z$  en fonction de  $t$  et des coordonnées initiales à  $t_0$ . Ainsi, pour une particule  $i$ , sa vitesse est définie ainsi :

Eq. 1 
$$V_i(t) = \frac{dR_i(t)}{dt} = V(R_i(t), t)$$

Ainsi, la vitesse de chaque particule ne dépend que du temps et des coordonnées initiales.

Prenons un exemple concret pour mieux comprendre ce formalisme : Un hélicoptère de police suit un véhicule en effraction sur l'autoroute. Cet hélicoptère suit le véhicule et à une vue de dessus de la trajectoire de cette voiture et suit son déplacement au cours du temps. Les policiers de l'hélicoptère sont en formalisme lagrangien par rapport à cette voiture.

Ce mode d'étude impliquant le calcul des trajectoires de toutes les particules n'est pas commode et conduit à des calculs pénibles. C'est pour cela que l'on se tourne vers le formalisme Eulérien.

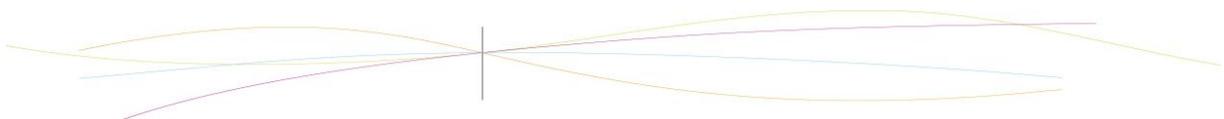
##### 3.1.2. Variables d'Euler

Comme nous l'avons vus précédemment, l'étude du mouvement des particules est en pratique inaccessible au calcul on cherche à décrire l'évolution du mouvement sans faire référence à une particule particulière.

On étudie donc des champs de vecteurs comme le champ de vecteur vitesse, accélération, mais aussi des grandeurs thermodynamiques locales comme la pression et la température. Ainsi, la vitesse est représentée par un champ de vecteurs vitesses :

Eq.2 
$$V(x, y, z, t) = V(M, t) \quad M \text{ position de la particule}$$

Pour être plus clair, reprenons l'exemple des policiers. Cette fois ci, ils décident de se poster au bord de l'autoroute et observent la vitesse des véhicules passant devant eux à l'instant  $t$ . A la même date  $t$  le policier observe la vitesse d'un véhicule. Il n'y a pas de suivi de trajectoire, mais juste l'observation d'une grandeur comme la vitesse à une date  $t$ . Les deux policiers n'observent pas les mêmes véhicules et donc pas les mêmes vitesses à une date  $t$ . Ce qui montre bien que les variables du temps et de l'espace sont indépendantes.



### 3.2. Différentes méthodes de simulation déjà existantes

Tout d'abord, il faut savoir qu'il existe 2 grands types de modélisation du trafic autoroutier : Microscopique et Macroscopique.

Les simulations de trafic, qu'elles soient macroscopiques ou microscopiques, suivent un même principe fondateur : simuler le trafic à l'aide d'équations mathématiques.

#### 3.2.1. Macroscopique

Les modèles macroscopiques permettent d'étudier les interactions entre les véhicules d'une manière globale. Le trafic autoroutier est alors assimilé à un fluide circulant dans un canal.

Le flux est caractérisé par 3 variables : le débit, la densité et la vitesse du flot. Les modèles macros décrivent les dynamiques de ces trois variables en utilisant des équations différentielles partielles.

Dans chaque modèle, 2 équations sont toujours utilisées :

- Équation de conservation de la masse 
$$\begin{cases} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = 0 \\ Q(x,t) = \rho(x,t)V(x,t) \end{cases} \quad (S) \quad \text{Eq.3}$$
- Définition de la vitesse du flux

Mais une 3<sup>ème</sup> est nécessaire afin de déterminer un modèle complet.

Il existe deux façons pour classifier les modèles macros :

1. Hoogendoorn et Bovy (2001):
  1. Les modèles type Lighthill-Whitham-Richards (équation dynamique de la densité)
  2. Les modèles type-Payne (E. dynamiques de la densité et de la vitesse)
  3. Les modèles type-Helbing (E. Dynamiques de la densité, de la vitesse et de la variance de la vitesse)
2. Zhang (2003) :
  1. Les modèles d'équilibre
  2. Les modèles de non équilibre non visqueux
  3. Les modèles de non équilibre visqueux

Dans le modèle LWR, le trafic évolue instantanément d'un état d'équilibre à un autre. La vitesse est fonction de la densité. **Eq. 4**  $V(t, x) = V_e(\rho(t, x))$

La relation fondamentale est donc : **Eq.5**  $Q_e(\rho(t, x)) = \rho(t, x)V_e(\rho(t, x))$

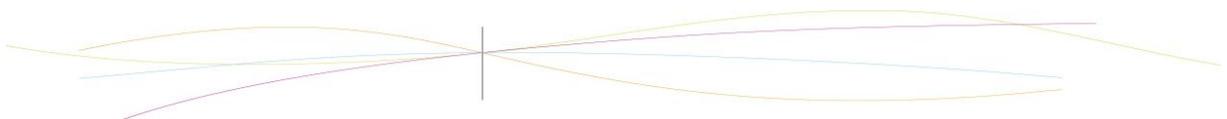
Avec  $Q(t, x)$  : le débit ;  $\rho(t, x)$  : la densité.

Ce modèle se résume alors en une seule équation hyperbolique : **Eq.6** 
$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = 0$$

Le modèle de Payne nous soumet une autre équation fondamentale :

**Eq.7**

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{accélération}} + \underbrace{\frac{V_{eq} \rho}{2\tau \cdot \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\text{anticipation}} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{convection}} = \underbrace{\frac{V_{eq} \rho - v}{\tau}}_{\text{relaxation}}$$



La pression de trafic reflète le comportement du conducteur par anticipation aux conditions du trafic en aval. Et la relaxation représente les conditions en amont.

### 3.2.2. Microscopique

Dans les modèles microscopiques, tous les véhicules sont individualisés et on cherche à reproduire le comportement de chaque couple conducteur-véhicule. Ce type de modèle a pour ambition de s'approcher le plus possible du comportement réel des véhicules.

Ils sont fondés sur une analyse simplifiée de la tâche de conduite. Les conducteurs adoptent le comportement suivant : ils prélèvent l'information dans leur environnement, traitent cette information, prennent une décision et agissent en actionnant une commande du véhicule. Les modèles de trafic s'intéressent davantage à la tâche de contrôle de l'accélération qu'à celle de direction.

Le modèle le plus simple est celui de la file indienne : on ne s'intéresse qu'aux interactions entre véhicules qui se suivent.

Voilà le principe : un conducteur va percevoir un stimulus à l'instant  $t$  et réagir avec un certain décalage temporel correspondant à son temps de réaction. La réponse est proportionnelle à l'intensité du stimulus mais dépend aussi de la sensibilité du conducteur à ce stimulus.

Un modèle couramment utilisé est

**Eq.8** 
$$d^2x_i(t+T)/dt^2 = \alpha \cdot v_i(t)^m [v_{i+1} - v_i] / [x_{i+1} - x_i]^n$$

Où  $T$  est le temps de réaction ( $T \approx 0.45s$ ) et  $\alpha, m, n$  sont des paramètres à ajuster.

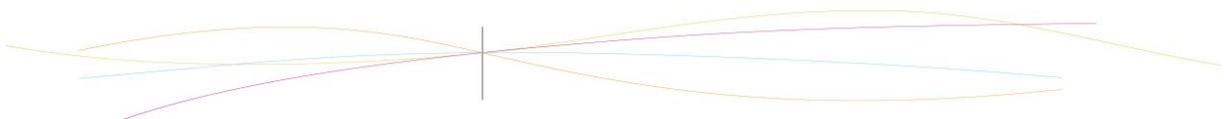
Un raffinement tenant compte de facteurs psychophysiologiques consiste à introduire des valeurs de seuil où le conducteur ajuste sa vitesse (selon une équation du format précédent).

Concrètement on délimite des régions dans un diagramme  $v_{i+1} - v_i$  en fonction  $x_{i+1} - x_i$ . À l'intérieur des régions, la vitesse est constante (accélération nulle) et, en franchissant une frontière la vitesse est ajustée selon une équation du type précédent.

Mais il faut garder à l'esprit que les véhicules sont conduits par des êtres humains et que le comportement humain est impossible à modéliser de façon parfaite. Les modèles microscopiques de trafic n'ont donc pas la même exactitude de description qu'en mécanique des fluides.

Tout ceci a modifié relativement en profondeur le paysage de la modélisation du trafic routier et rendu possible une coopération beaucoup plus étroite entre les chercheurs des différentes communautés. On peut ainsi dresser une liste de questions qui restent très largement ouvertes et sont autant de pistes de développement possible:

- La question des conditions aux limites, ainsi que tout ce qui concerne les points d'échanges (carrefours, échangeurs d'autoroute...)
- L'écoulement de flux comportant plusieurs types de véhicules voire une variation continue des caractéristiques des véhicules, Benzoni-Colombo (2003).
- La liaison entre les modèles de flux (modèles macroscopiques) et les modèles de véhicules individuels (modèles microscopiques), elle aussi déjà ébauchée des deux côtés, (Zhang (2000), Bourrel (2003), Aw- Klar- Materne- Rascle (2002)), mais encore riche en potentialités de développements.
- Les modèles représentant explicitement l'écoulement sur des routes à plusieurs voies, qui posent la question de l'approximation numérique des termes-source. Ce point est une motivation forte pour A.Y. LeRoux.



### 3.3. Explication des équations

#### 3.3.1. Dérivée particulière

La dérivée particulière, appelée aussi équation de Burger ou équation du choc, sert à étudier le choc et elle est aussi utilisée en mécanique des fluides. Son but est de calculer une accélération eulérienne dans un champ lagrangien.

La notion de dérivée particulière s'adapte à d'autres champs que le champ des vitesses. Elle consiste à évaluer la variation au cours du déplacement d'une particule de fluide d'une quantité définie par un champ scalaire ou vectoriel.

Considérons un fluide composé de particules, par exemple une rivière. Si l'on s'intéresse à la vitesse d'une de ces particules, elle doit dépendre du temps (évolution du débit de la rivière dans le temps), ainsi que de la position de la particule (présence d'un rapide par exemple). Si l'on cherche l'accélération, on aura donc :

$$\text{Eq.9} \quad d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt$$

soit :

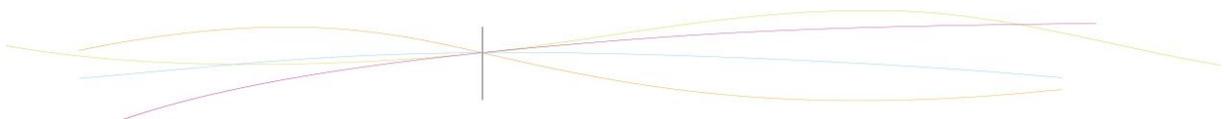
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{Eq.10}$$

Le premier terme  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(v)$  représente l'accélération de la particule dans le référentiel absolu, il représente l'accélération vue par la particule du fait de son déplacement dans le champ de vitesses. Pour la rivière, c'est l'accélération du point de vue de la particule du fait de son déplacement dans le champ de vitesses. Prenons l'exemple d'un rapide. Si on se place en régime stationnaire, la vitesse du fluide en chaque point de la rivière garde une valeur constante au cours du temps. La vitesse ne dépend pas explicitement du temps donc le terme d'accélération en  $(d/dt)$  est nul. Le lit de la rivière ayant une section plus faible au niveau du point B, on sait « intuitivement » que la vitesse en B est supérieure à la vitesse en A. une particule de fluide, allant de A à B, voit sa vitesse augmenter : elle a nécessairement accéléré, alors que le champ des vitesses du fluide ne dépend pas explicitement du temps. En régime stationnaire, l'accélération est purement convective, c'est-à-dire liée au mouvement ou convection du fluide.

Le terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  représente la variation de vitesse au cours du temps en un point fixe de l'espace (il s'agit donc de l'altération du champ de vitesses au cours du temps). Dans notre exemple, cela correspondrait à la variation de vitesse au cours du temps en un point fixe de l'espace. Il s'agit donc de l'évolution du débit de la rivière au cours du temps.

La dérivée particulière d'une grandeur  $\vec{A}$  s'écrit donc :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{Eq.11}$$



### 3.3.2. Loi de conservation de la masse

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. La variation de masse d'un fluide pendant un temps  $dt$  doit être égale à la somme des masses entrant diminuée de celle de fluide sortant.

On considère alors un volume  $V$  quelconque, fixe et indéformable, délimité par la surface  $S$ .

Effectuons un bilan de masse pour le système ouvert  $V$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$  en supposant qu'il n'y a ni création ni annihilation de masse. A l'instant  $t$ , la masse de fluide contenu dans le volume  $V$  est :

$$M(t) = \iiint_{p \in V} \rho(p, t) d\tau \quad \text{Eq.12}$$

A l'instant  $t + dt$ , cette masse devient :

$$M(t + dt) = \iiint_{p \in V} \rho(p, t + dt) d\tau \quad \text{Eq.13}$$

Le volume  $V$  étant fixe et indéformable, le domaine d'intégration est le même aux 2 instants. La variation de la masse contenue dans le volume  $V$  est donc :

$$M(t + dt) - M(t) = \iiint_{p \in V} \rho(p, t + dt) d\tau - \iiint_{p \in V} \rho(p, t) d\tau = \iiint_{p \in V} (\rho(p, t + dt) - \rho(p, t)) d\tau \approx \iiint_{p \in V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(p, t) d\tau dt \quad \text{Eq.14}$$

La masse qui sort du volume  $V$  entre  $t$  et  $t+dt$  est égale au débit massique à travers la surface  $S$  multiplié par  $dt$ , c'est-à-dire au flux sortant du vecteur  $\vec{j}_m = \rho \vec{v}$  à travers la surface  $S$  multipliée par  $dt$  soit :

$$\delta M_{\text{sortant}} = \iint_{N \in S} (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{dS}_n dt \quad \text{Eq.15}$$

La conservation de la masse du volume  $V$  s'écrit :

$$M(t + dt) - M(t) = -\delta M_{\text{sortant}} \quad \text{Eq.15}$$

Soit après simplification par  $dt$  :

$$\iiint_{p \in V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(p, t) d\tau + \iint_{N \in S} (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{dS}_n = 0 \quad \text{Eq.16}$$

Ou encore

$$\frac{dM}{dt} + Dm = 0 \quad \text{Eq.17}$$

Le théorème d'ostrogradski permet de transformer l'expression du flux de masse sortant de la surface  $S$  :

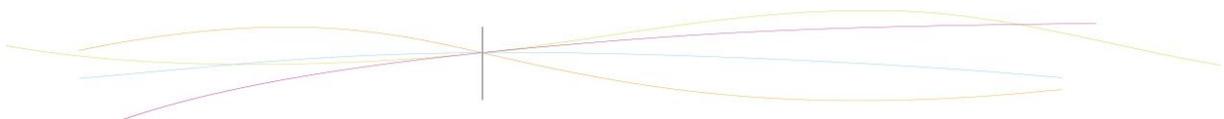
$$\iint_{N \in S} (\rho \vec{v})(N, t) \cdot \vec{dS}_n = \iiint_{p \in V} \text{div}(\rho \vec{v})(p, t) d\tau \quad \text{Eq.18}$$

On obtient alors

$$\iiint_{p \in V} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right)(p, t) d\tau = 0$$

Cette relation étant vérifiée quelque soit le volume  $V$ , on en déduit l'équation locale de conservation de la masse, appelée également équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Eq.19}$$



### 3.4. Explication du phénomène choisi: bouchon

#### 3.4.1. Première méthode: à partir d'un résultat de recherche

Après avoir effectué des recherches de différentes lois (vitesse, accélération...) sur Internet, nous avons donc trouvé une loi de vitesse qui nous semblait en accord avec le comportement humain.

$$U_{init} = U_{max} \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} \right) \quad \text{Eq.20}$$

Cette formule nous est apparue cohérente pour différents points:

Tout d'abord, on observe bien que quand la densité est maximale ( $\rho = \rho_{max}$ ), on obtient une vitesse nulle, c'est-à-dire que les voitures sont à l'arrêt.

Ensuite, on constate que lorsque  $\rho$  tend vers 0, la vitesse tend bien vers la vitesse maximale. En résumé, cela revient à dire que le conducteur accélère lorsqu'il n'y a pas de voitures devant lui.

De plus, on remarque que la vitesse est une fonction affine de la densité.

Cependant, on observe une limite à cette loi: en effet, on ne peut envisager une densité nulle. Donc d'après cette loi, la vitesse maximale n'est jamais atteinte. Or, si on observe le comportement humain, l'automobiliste peut atteindre la vitesse maximale bien qu'il y ait des voitures devant ou derrière lui.

Avec cette loi de vitesse, nous avons cherché à obtenir une expression de l'accélération en utilisant l'équation de conservation de la masse et l'équation de la dérivée particulaire.

Équation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t) \cdot U(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{Eq.21}$$

équation de la dérivée particulaire:

$$a(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \cdot U(x,t) \quad \text{Eq.22}$$

On injecte donc notre loi de vitesse dans cette première équation.

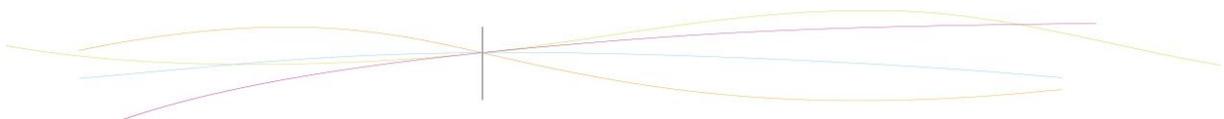
On obtient :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \cdot U_{max} \left( 1 - 2 \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} \right) = 0 \quad \text{Eq.23}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \cdot U_{max} \left( 1 - 2 \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} \right) \quad \text{Eq.24}$$

On injecte désormais notre loi de vitesse dans la deuxième équation. On obtient:

$$a(x,t) = - \frac{U_{max}}{\rho_{max}} \cdot \left( \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} \cdot U_{max} \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} \right) \right) \quad \text{Eq.25}$$



En croisant les deux équations, on obtient:

$$a(x, t) = - \frac{U_{max}}{\rho_{max}} \cdot \left( -U_{max} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \left( 1 - 2 \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \cdot U_{max} \left( 1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) \right)$$

**Eq.26**

$$a(x, t) = - \frac{U_{max}^2}{\rho_{max}} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \left( 2 \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} - 1 + 1 - \frac{\rho(x, t)}{\rho_{max}} \right) \quad \text{Eq.27}$$

$$a(x, t) = - \left( \frac{U_{max}}{\rho_{max}} \right)^2 \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \rho(x, t) \quad \text{Eq.28}$$

On a donc désormais une expression de la vitesse initiale et de l'accélération en fonction de la densité. On fait une hypothèse sur la densité.

On étudie le cas d'un bouchon de type accordéon. Dans cette situation, on observe l'alternance de densités maximales et minimales. On choisit donc une densité de type sinusoïdal:

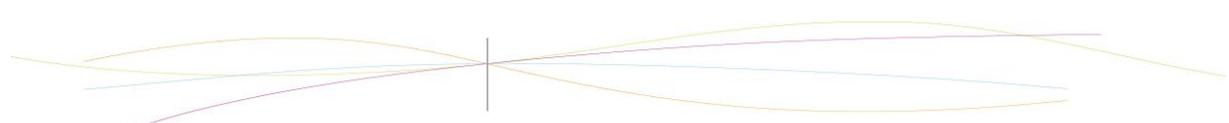
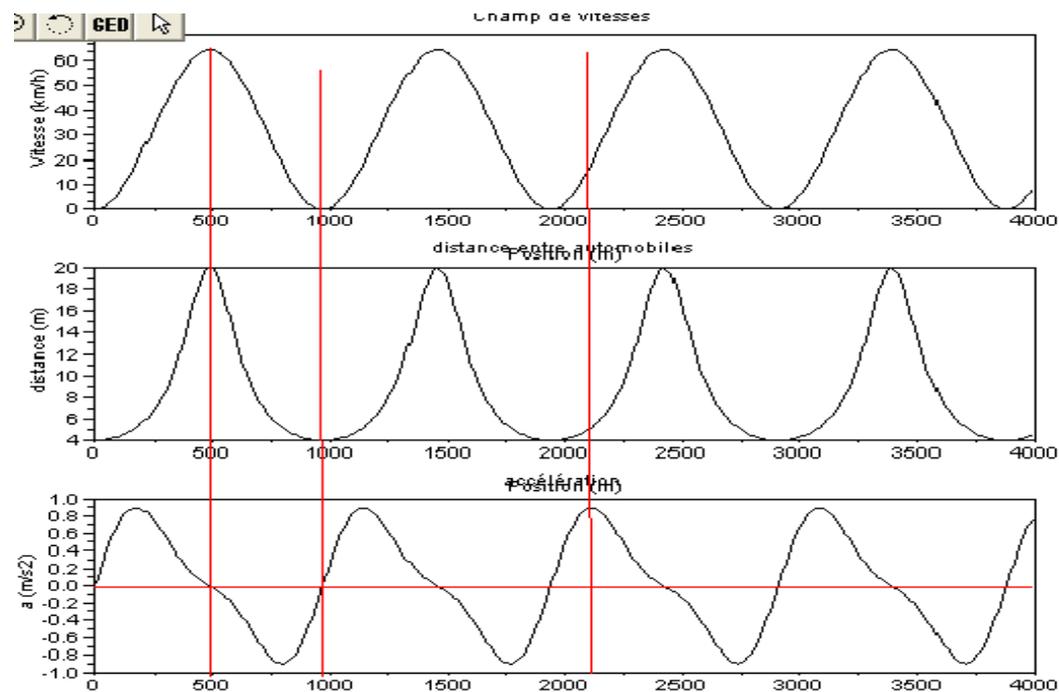
$$\rho_{init}(x, t) = A \cdot \cos(w \cdot L) + B \quad \text{Eq.29}$$

A représente l'amplitude de la densité initiale. B représente la densité moyenne. De plus, w représente la pulsation spatiale. Les constantes A et B sont les mêmes que celles de la deuxième méthode pour avoir la même situation initiale.

Nous avons ensuite inséré la loi de vitesse, l'accélération et la densité initiale dans le programme de l'année précédente.

Après exécution, on obtient les graphes suivants:

- au temps t = 0

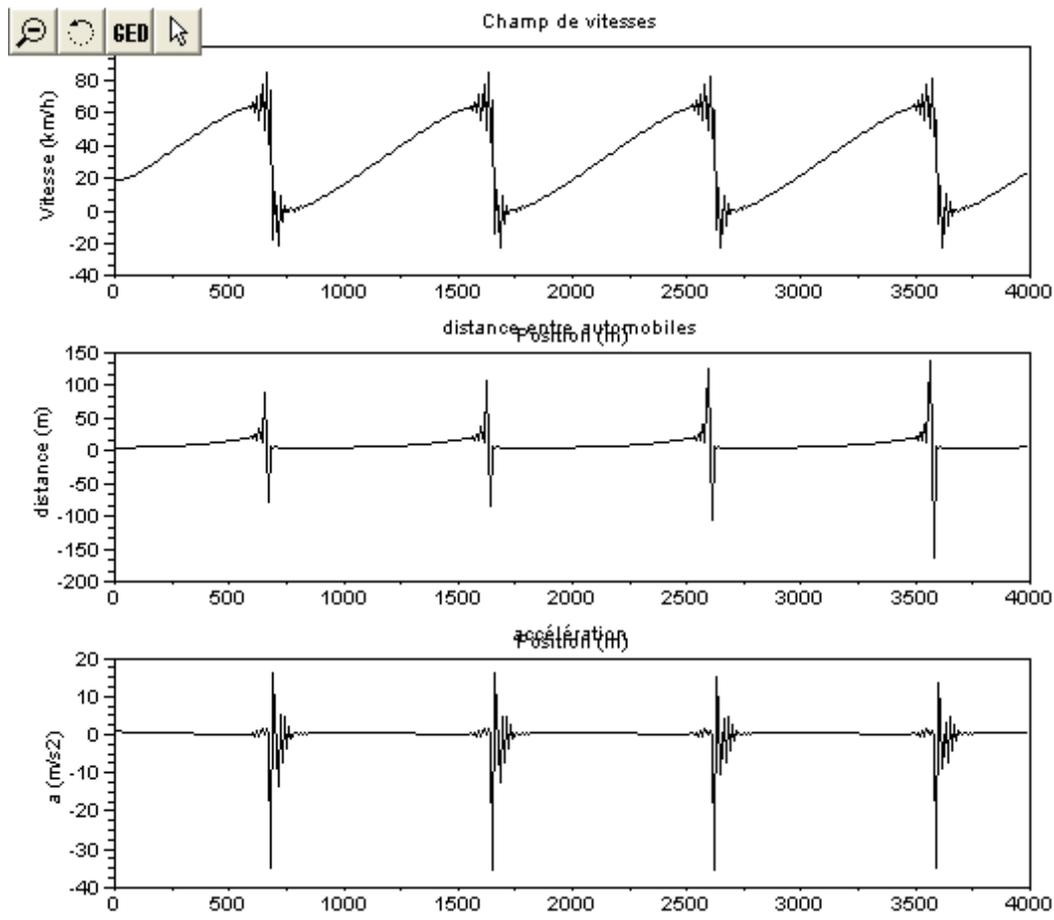


Comme lors d'un bouchon en accordéon, on observe bien un champ de vitesse sinusoïdal. On remarque que la vitesse et la distance entre les voitures sont en phase. En effet, la vitesse augmente lorsque cette distance augmente, et diminue lorsque cette dernière diminue.

De plus, on constate bien que l'accélération est négative quand la vitesse et la distance décroissent (freinage) et est positive quand elles croissent (accélération).

Enfin on peut remarquer que l'accélération est maximale lorsque le trafic a commencé à se décongestionner. La distance entre les voitures s'est agrandie et la pression sur la pédale d'accélération est maximale. Si on continue par la suite d'appuyer sur la pédale, la vitesse continuera d'augmenter mais de façon moins abrupte jusqu'à une nouvelle zone de densité maximale où le conducteur freinera (accélération  $< 0$  et vitesse décroissante).

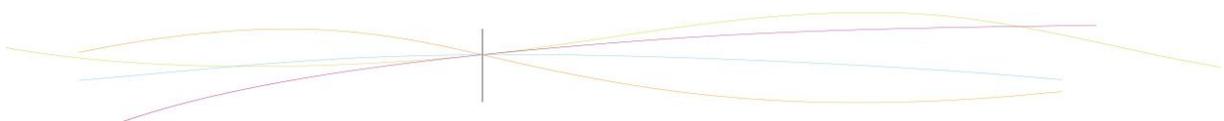
- au temps  $t = 30$  sec



Les courbes se sont peu à peu inclinées jusqu'à l'obtention d'un choc (courbes ci-dessus).

En fait, la distance devant une quelconque voiture a diminué mais cette voiture n'a pas freiné assez vite et a donc rattrapé celle qui la précédait, ce qui conduit inévitablement à un choc.

Cette modélisation ne représente donc pas le comportement humain.



### 3.4.2. *Deuxième méthode: utilisation des équations de la dérivée particulière et de conservation de la masse*

Les équations de conservation et de la dérivée particulière mettent en relation la densité, la vitesse des particules ainsi que leur accélération en un point et à un instant donné. A partir de l'expression de la densité, on peut obtenir mathématiquement les expressions de la vitesse et de l'accélération des particules.

Notre objectif est de comprendre le comportement humain à l'origine des ralentissements automobiles. On peut définir ce comportement comme la réaction du conducteur à la distance le séparant des véhicules le précédant. Il semble donc intéressant de représenter l'accélération des véhicules (qui correspond à la réaction du conducteur: appuyer sur le frein ou bien l'accélérateur) en fonction de la distance entre les véhicules à un instant défini en un point donné.

En résumé, nous commençons par définir un modèle de densité en fonction de cas réels observés (une fonction sinusoïdale permet de représenter les ralentissements « en accordéon »). Puis, possédant une expression de densité, nous calculons les modélisations des lois de vitesse et accélération correspondantes. Enfin nous tentons de lier distance entre les véhicules et accélération.

Simplification des équations:

Les équations de la dérivée particulière et de conservation sont des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) à la fois spatiale et temporelle. On va pouvoir les simplifier en modélisant une route comme un milieu unidimensionnel (expression de la divergence notamment). En outre le sens donné à la densité devient plus évident puisqu'il s'agit de l'inverse de la distance séparant deux véhicules (on considère la distance entre deux véhicules « ponctuels », pour avoir la distance réelle séparant les véhicules il faut soustraire la longueur d'un véhicule, environ 4 mètres) en un point et à un instant.

On obtient donc:

Equation de conservation de la masse:

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\vec{U}) = 0 \quad \text{Eq.30}$$

Simplification de la divergence en dimension 1:

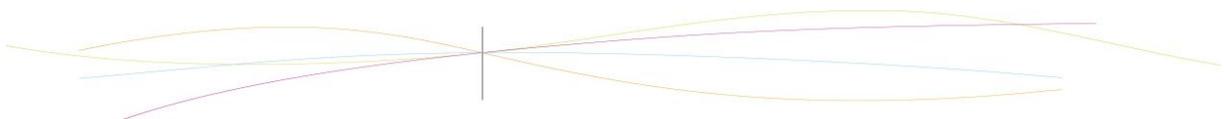
$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho U}{dx} = 0 \quad \text{Eq.31}$$

Equation linéaire normalisée:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} U = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad \text{Eq.32}$$

Equation de la dérivée particulière, pour la vitesse:

$$a(x, t) = \frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dx} \cdot U \quad \text{Eq.33}$$



Choix d'un modèle de densité:

Nous étudions le cas où le nombre global de véhicules sur la portion de route étudiée est constant (les voitures sortant et entrant dans la section étudiée se compensent). Pour établir notre modèle de densité nous sommes alors partis de deux constats: dans un embouteillage, il y a des zones alternativement denses et « vides », la densité évolue graduellement entre ces deux extrêmes. D'autre part, ces zones peuvent se déplacer dans le temps. Nous avons donc opté pour un modèle sinusoïdal spatialement, capable de se transposer dans le temps.

$$\rho(x, t) = \langle \rho \rangle + A \cos(w(x + Bt)) \quad \text{Eq.34}$$

$\rho(x, t)$ : densité des véhicules (1/m)

$\langle \rho \rangle$ : densité moyenne (1/m)

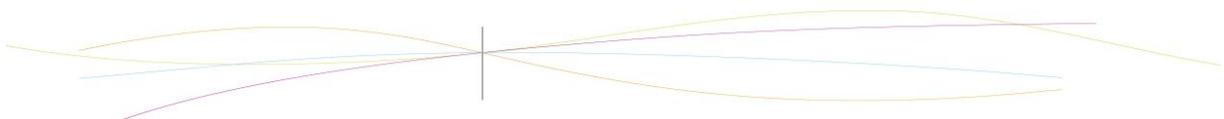
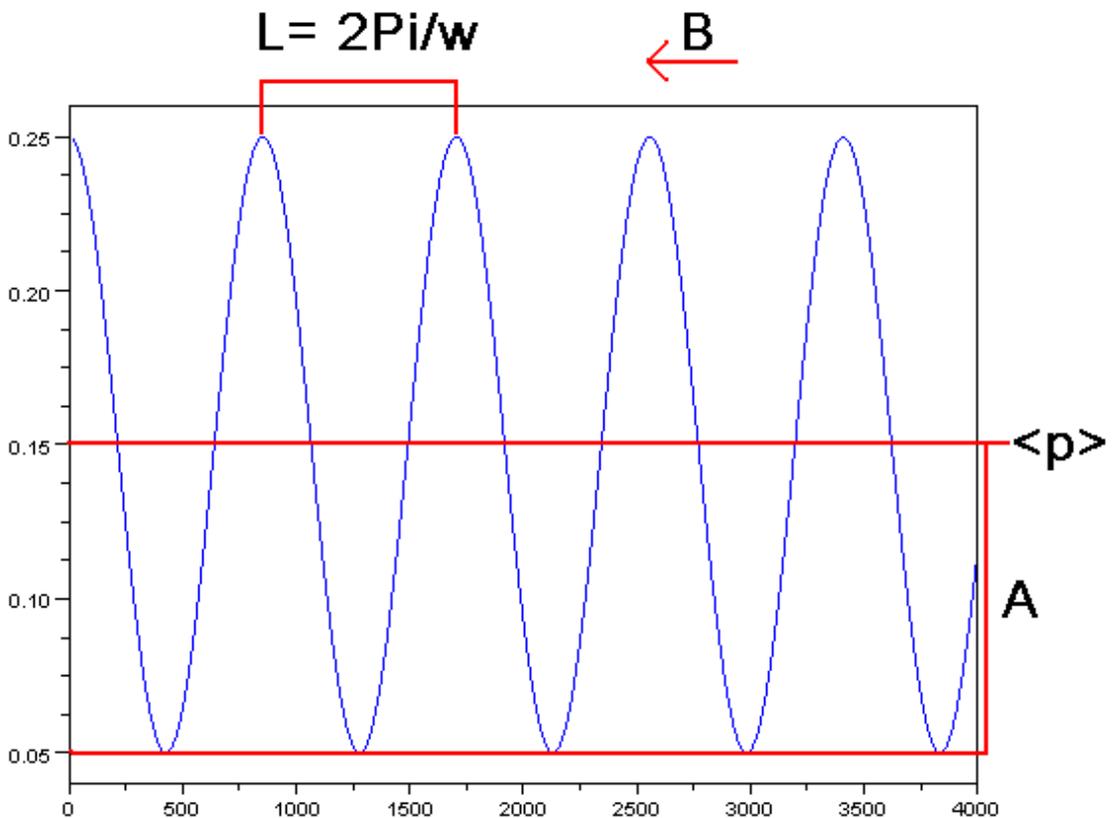
A: amplitude des variations de densité (1/m)

w: pulsation spatiale (la distance entre deux zones dense est  $2\pi/w$ ) (rad/m)

B: vitesse de déplacement des zones denses (m/s)

La densité ne pouvant être négative,  $\langle \rho \rangle > A$ .

Voici une représentation de notre fonction de densité, pour un temps donné.



Voici l'expression de la distance entre les véhicules:

$$d(x, t) = \frac{1}{\langle \rho \rangle + A \cos(w(x+Bt))} \quad \text{Eq.35}$$

$d(x,t)$ : distance entre les véhicules (m)

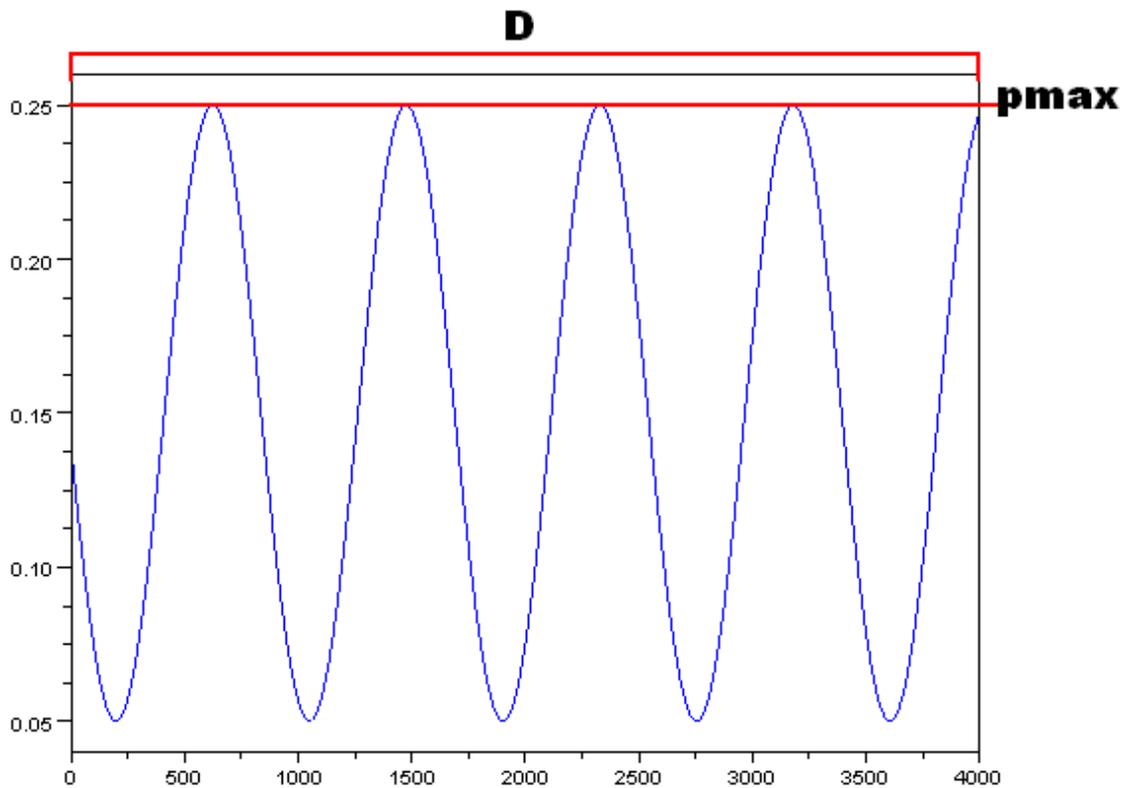
Bien que ce modèle mathématique corresponde à une « densité sinusoïdale mobile », la présence de paramètres purement mathématiques tels que A et B n'est pas satisfaisante, nous allons les déterminer à partir de paramètres physiques.

Nous fixons la longueur de la section de route étudiée, la distance minimale entre deux véhicules ainsi que le nombre (constant) de véhicules qui y circulent pendant la simulation.

D: longueur de la section (m)

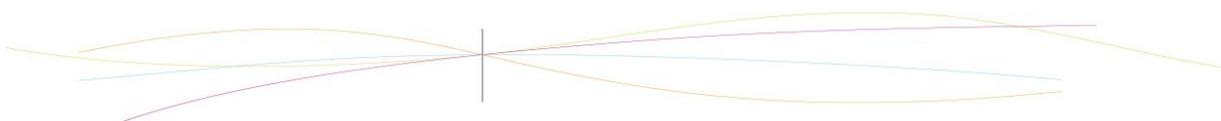
$d_{min}$ : distance minimale entre deux véhicules (m) ( $d_{min} = \frac{1}{\rho_{max}}$ )

N: nombre de véhicules (sans unité)



La densité moyenne correspond au nombre total de véhicules sur la distance complète de la portion de route, on a donc:

$$\langle \rho \rangle = \frac{N}{D} \quad (1/m) \quad \text{Eq.36}$$



De plus, la distance minimale entre deux véhicules est atteinte lorsque la densité est maximale, dès lors:

$$\rho_{max} = \frac{1}{d_{min}} = \langle \rho \rangle + A \Rightarrow A = \frac{1}{d_{min}} - \frac{N}{D}$$

On peut maintenant ajouter des conditions sur le choix de N. La densité est nécessairement positive, en outre au maximum, les voitures sont toutes à la distance minimum:

$$\rho_{min} > 0 \Rightarrow A < \langle \rho \rangle \Rightarrow \frac{1}{d_{min}} - \frac{N}{D} < \frac{N}{D} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{D}{d_{min}} < N$$

$$\frac{D}{N} > d_{min} \Rightarrow N < \frac{D}{d_{min}}$$

Finalement

$$\frac{1}{2} \frac{D}{d_{min}} < N < \frac{D}{d_{min}}$$

Nous allons maintenant utiliser l'équation de conservation de la masse pour déterminer l'expression de la vitesse. La résolution est détaillée en annexe, on obtient:

$$U(x, t) = \frac{\mu - AB \cos(w(x+Bt))}{\langle \rho \rangle + A \cos(w(x+Bt))} \quad \text{Eq.37}$$

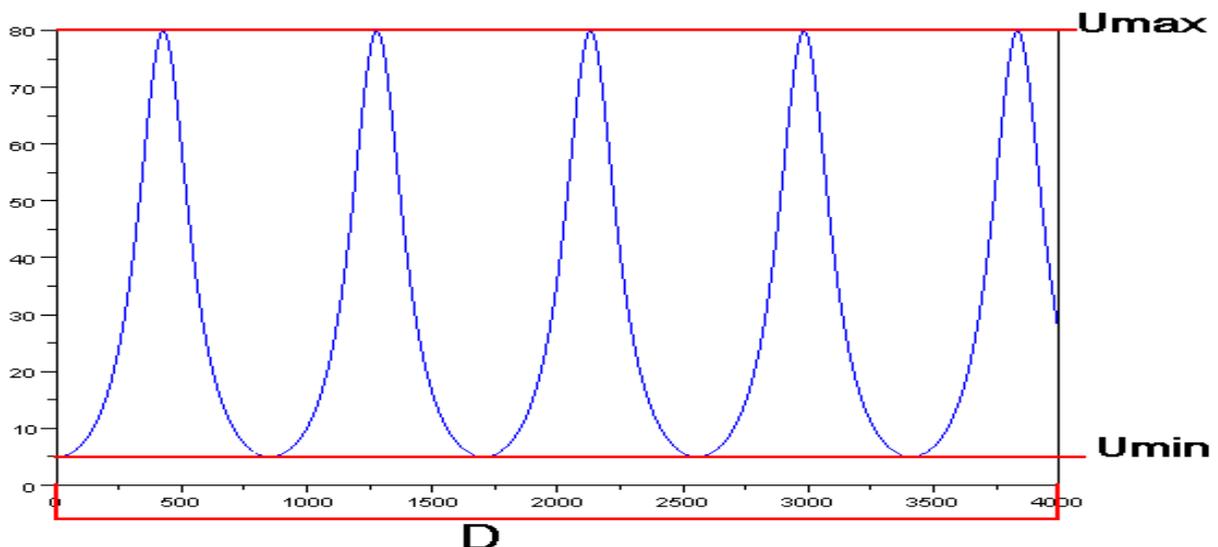
C'est à dire:

$$U(x, t) = \left( \frac{\mu}{\langle \rho \rangle} + B \right) \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(x,t)} - B \quad \text{Eq.38}$$

$\mu(1/s)$  est un paramètre supplémentaire obtenu lors de la résolution de l'équation linéaire.

On peut remarquer que la vitesse est en relation affine avec l'inverse de la densité. La vitesse est donc proportionnelle, à une constante près à la distance entre les véhicules.

Nous allons maintenant remplacer les paramètres  $\mu$  et B (mathématiques), par des paramètres physiques: vitesse maximum et minimum.



$$U_{max} = \frac{\mu + AB}{\langle \rho \rangle - A} \quad (\text{m/s})$$

$$U_{min} = \frac{\mu - AB}{\langle \rho \rangle + A} \quad (\text{m/s}) \quad \text{Eq.39}$$

En résolvant le système on obtient:

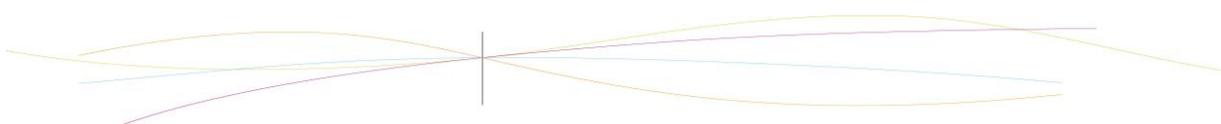
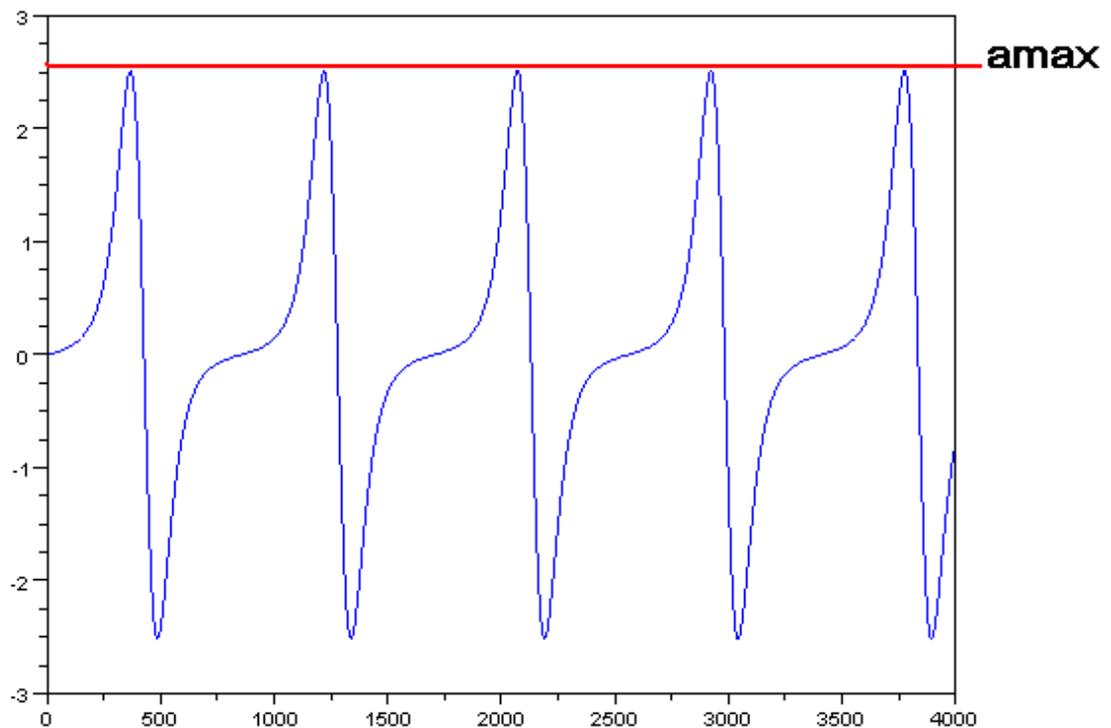
$$B = \frac{U_{max} (\langle \rho \rangle - A) - U_{min} (\langle \rho \rangle + A)}{2A} \quad \text{Eq.40}$$

$$\mu = \frac{U_{max} (\langle \rho \rangle - A) + U_{min} (\langle \rho \rangle + A)}{2} \quad \text{Eq.41}$$

Finalement nous pouvons calculer l'accélération à l'aide de la dérivée particulière:

$$a(x, t) = (B \langle \rho \rangle + \mu)^2 \frac{Aw \sin(w(x+Bt))}{\langle \rho \rangle + \cos(w(x+Bt))}^3 \quad \text{Eq.42}$$

Voici sa représentation:



On peut maintenant déterminer  $w$  en donnant l'accélération maximale tolérée pour les véhicules.

$$amax = Aw \frac{(B\langle\rho\rangle + \mu)^2}{(\langle\rho\rangle)^3} \quad \text{Eq.43}$$

d'où

$$w = \frac{amax (\langle\rho\rangle)^3}{A(B\langle\rho\rangle + \mu)^2} \quad \text{Eq.44}$$

On peut obtenir l'équation de l'accélération en fonction de la densité:

$$a(x, t) = (B\langle\rho\rangle + \mu)^2 \frac{\langle\rho\rangle - \rho(x + \frac{L}{4}, t)}{(\rho(x, t))^3} \quad \text{Eq.45}$$

En résumé, la donnée du nombre de véhicules, de la distance étudiée, de la distance minimale tolérée, des vitesses maximale et minimale, et de l'accélération maximale, nous permet de calculer les distances, vitesse et accélération des véhicules pour le modèle de densité étudié.

Attardons nous maintenant sur les valeurs physiquement cohérentes pouvant être données à ces termes.

Une distance d'au moins 2 km semble nécessaire pour pouvoir réaliser notre simulation.

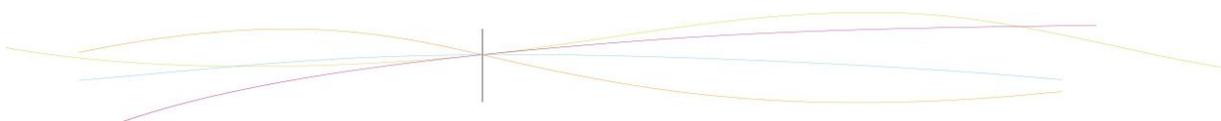
La distance minimum entre les véhicules dépend du ralentissement que l'on veut modéliser, plus elle sera grande plus le ralentissement sera fluide. Quoi qu'il en soit, elle ne peut être inférieure à 4m, cas extrême où les voitures sont quasiment en contact (en considérant 3m50 de longueur pour les voitures).

La vitesse maximale doit être inférieure à 130km. Dans le cas d'une distance minimale faible, une vitesse trop importante aboutirai à des incohérences.

La vitesse minimale peut être nulle si l'on prend une distance minimale de l'ordre de 5m. En revanche il serait incohérent de considérer une vitesse minimale importante et une petite distance minimale (et inversement).

L'accélération maximale communément ressentie lors de la conduite d'un véhicule civil est de: 3m/s.

Le programme donné en index (script pour Scilab), prend en entrée les données précédemment citées, calcule les variables intermédiaires et trace les courbes de distance, de vitesse et d'accélération sur toute la section de route à un instant donné. En outre, l'accélération est également représentée en fonction de la distance.



### 3.4.3. Comparaison des deux méthodes

Nous comparons les deux méthodes avec les mêmes conditions initiales.

La deuxième modélisation représente mieux la réalité. En effet, la première modélisation conduit rapidement à un choc. Ceci peut être dû à la loi de vitesse fixée au départ. Celle-ci semble pourtant plus intuitive (on voit bien que lorsque la densité augmente, la vitesse diminue). Au contraire la deuxième modélisation semble moins évidente, cependant elle est justifiée car elle est calculée à partir des lois de la mécanique des fluides.

En ce qui concerne l'accélération, on peut constater que les deux modélisations mènent à des courbes assez semblables. De même pour les vitesses.

On rappelle des deux lois de vitesse:

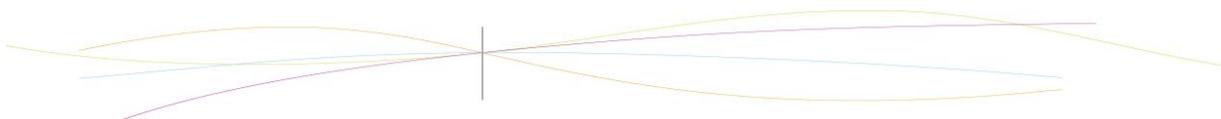
1.  $U_{init} = U_{max} \left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}}\right)$
2.  $U_{init} = (\mu + B) \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(x,t)} - B$

En conclusion, on peut dire que la deuxième loi peut modéliser le comportement humain dans un bouchon en accordéon.

### 3.5. Etude qualitative et interprétation physique de la modélisation du trafic autoroutier

Nous nous sommes intéressés à la modélisation de trois types de bouchons sur une distance de 4000m que nous nommerons ainsi dans la suite :

- Bouchon A : Gros bouchons c'est-à-dire que les voitures sont cote à cote sur tout le domaine d'étude soit une distance minimum de **4m**. Les vitesses varient entre **50km/h** et **5km/h**. C'est le type de bouchons que l'on rencontre souvent aux heures de sortie de bureau. Le nombre de véhicules sur le domaine d'étude doit être cohérent avec les vitesses choisies. C'est pourquoi nous avons pris **600** véhicules pour la modélisation de ce bouchon.

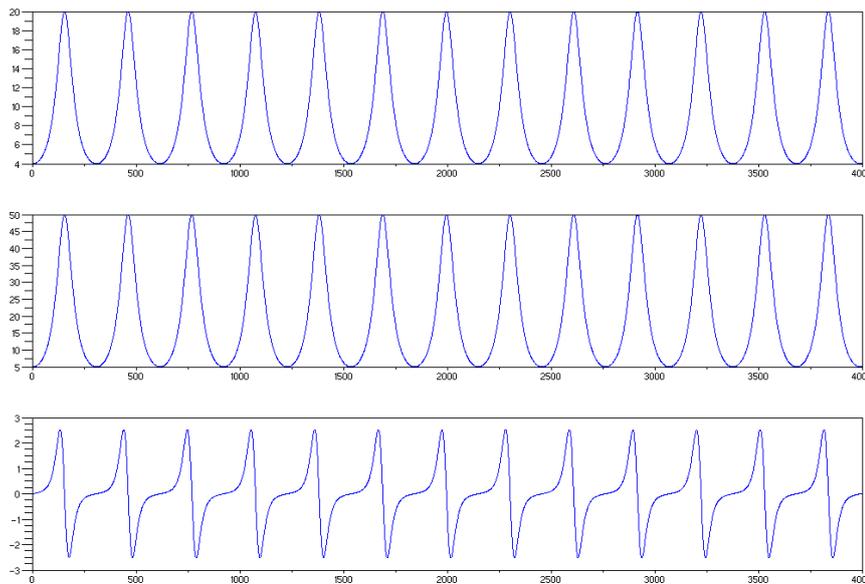


- Bouchon B : Bouchon accordéon c'est-à-dire que les voitures accélèrent et ralentissent brusquement. C'est le genre de bouchon que l'on rencontre lors d'accidents et parfois même sans raison particulière. Lors de la modélisation, nous avons choisi de faire varier les vitesses entre **20km/h** et **130km/h**. La distance minimum entre les voitures est un peu plus grande (**20m**) car les vitesses sont plus grandes et il est clair que deux voitures à 130km/h ne vont pas être cote à cote. Il y a donc une distance de sécurité minimum de 20m imposée. Le nombre de véhicule circulant est fixé à **110**.
- Bouchon C : C'est un peu l'intermédiaire entre les deux bouchons précédents puisque les vitesses varient entre **15km/h** et **80km/h**. Le nombre de véhicule est de **250** et la distances minimum entre eux est de **10m**.

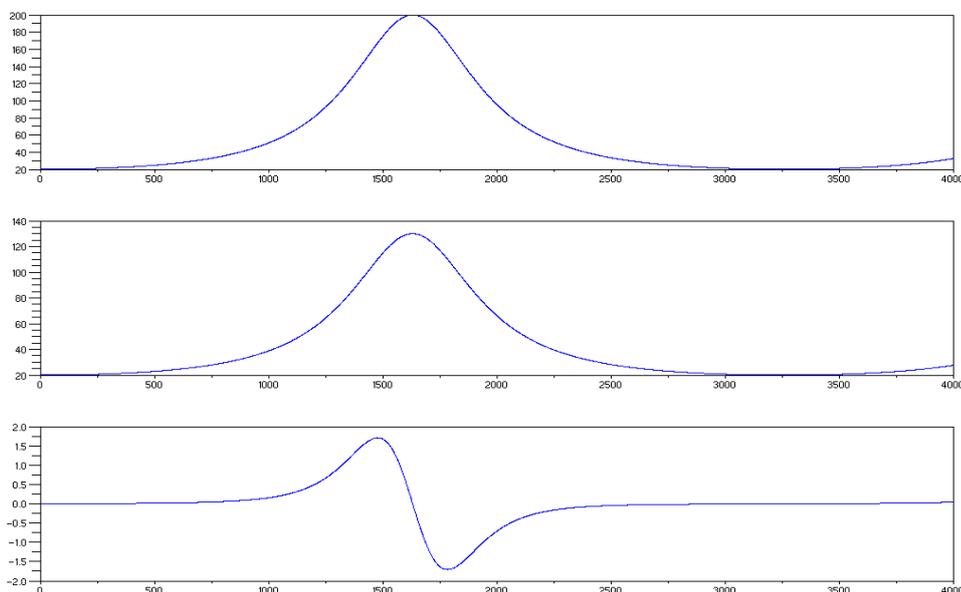
### 3.5.1 Modélisation de la distance entre les voitures/vitesse/accélération

Pour les trois types de bouchons on modélise la distance entre les véhicules le long du domaine d'étude, la vitesse et l'accélération.

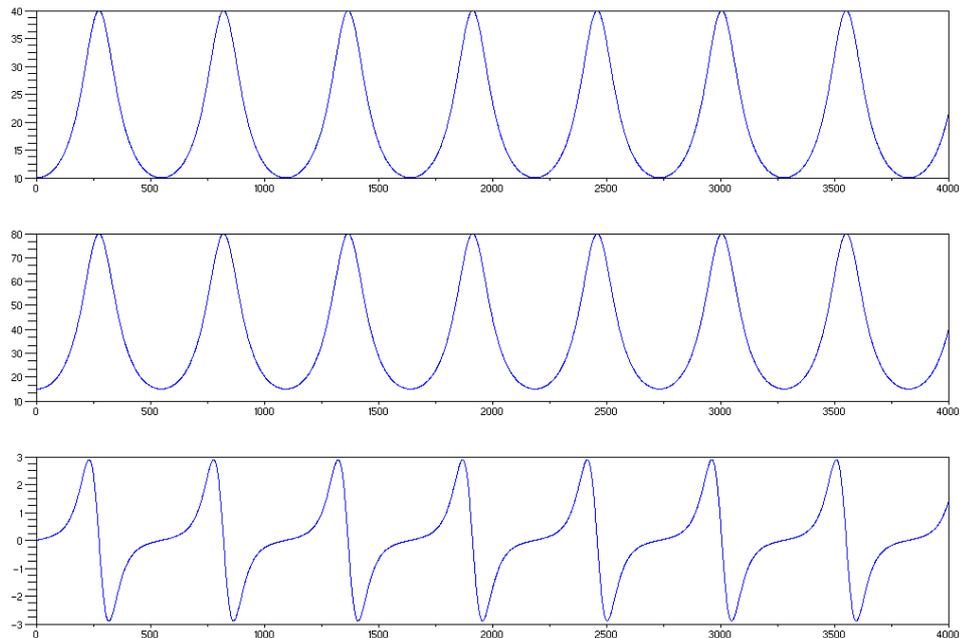
Bouchon A :



Bouchon B :

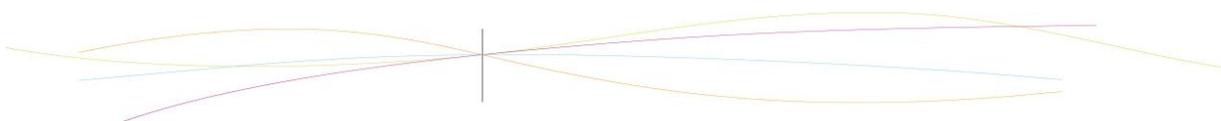


Bouchon C :

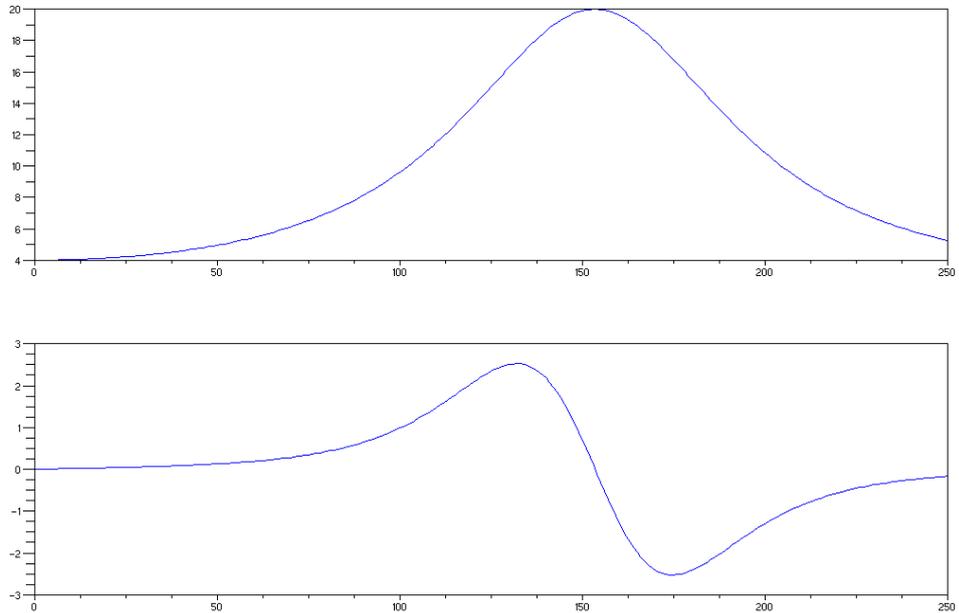


Les graphiques sont cohérents puisque lorsque la distance entre les véhicules augmente, la vitesse aussi ainsi que l'accélération. En effet, le conducteur étant en dessous de la vitesse maximale et voyant une distance de sécurité suffisante devant lui se permet d'accélérer. Puis, lorsque la distance atteint un pic qui correspond à la distance maximale. Dès lors, la distance diminue donc la vitesse aussi et l'accélération tombent dans des valeurs positives puis négatives. En effet, lorsque la distance diminue entre les véhicules le conducteurs de derrière accélère un peu moins fort puis arrête d'accélérer (lorsque la courbe atteint le 0) et enfin il se met à freiner quand la distance devient trop petite (le freinage correspond aux valeurs négatives d'accélération). Puis quand la distance entre les voitures est minimale, la vitesse est minimale et l'accélération est nulle. Enfin, lorsque la distance augmente, la vitesse augmente aussi et l'accélération aussi. Et ainsi de suite.

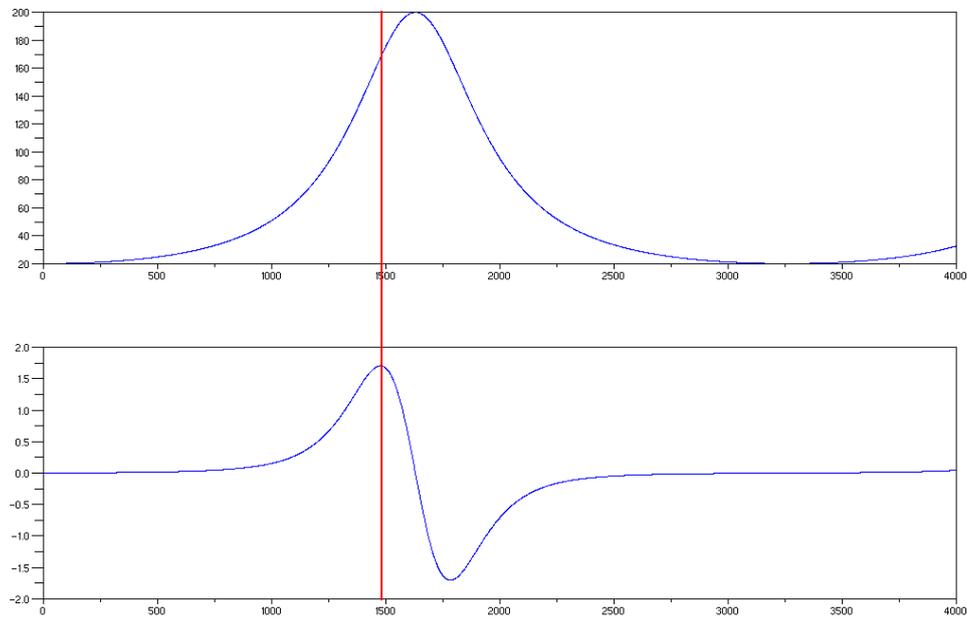
Etudions les deux cas extrêmes (bouchon A et B). On observe que la période spatiale est beaucoup plus petite pour le bouchon A que le B. On peut expliquer physiquement ces résultats : La densité de véhicules en A est beaucoup plus élevée qu'en B. C'est pour cela que pour une meme distance, les véhicules A accélèrent sur 50m et ralentissent sur 50m. Les voitures sont cote à cote et accélèrent puis décélèrent brusquement. Tandis qu'en B, les voitures accélèrent sur 1550m puis ralentit sur 1550 m. C'est l'effet « accordéon ».



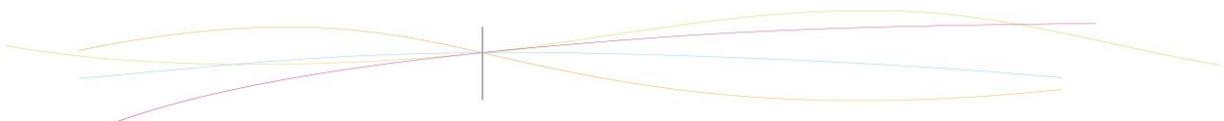
Bouchon A



Bouchon B :



Par ailleurs, comme le montre le trait rouge tracé au dessus, on observe que le conducteur arrête d'accélérer 50 m avant d'avoir atteint la distance maximale autorisée. Ce phénomène montre bien le comportement du conducteur qui anticipe le freinage de la voiture de devant.



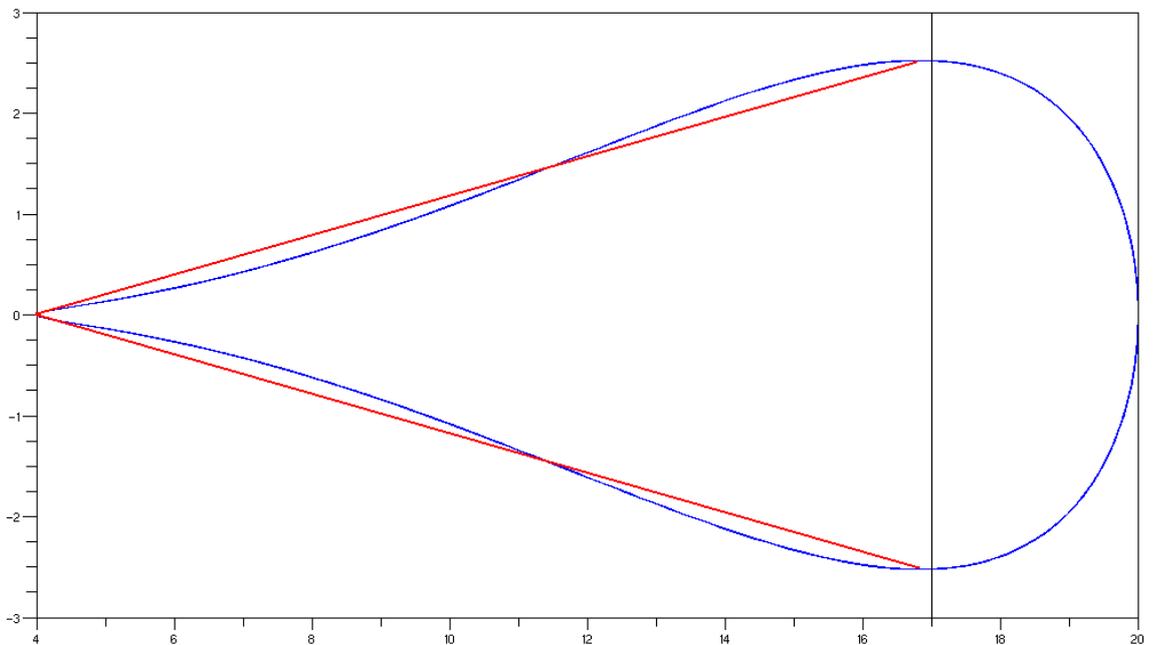
### 3.5.2. Modélisation de l'accélération en fonction de la distance

On peut représenter l'accélération de manière linéaire par rapport à la distance quand celle-ci est petite. Plus l'intervalle de distance est faible, le coefficient directeur ( $a(d) = c \cdot d$ ) est grand. On en déduit que les conducteurs réagissent plus vite au changement de distance lorsque la circulation est plus dense.

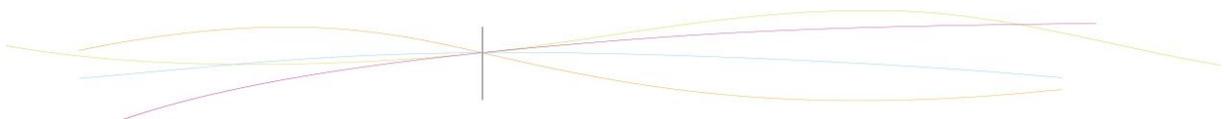
Concernant la 2<sup>ème</sup> partie de la courbe, il paraît moins intéressant de la modéliser en fonction de la distance séparant le conducteur du véhicule le précédant. En effet, la décélération (ou accélération) observée est surtout due au phénomène d'accordéon : le conducteur anticipe la réduction de distance qu'il observe au loin.

On remarque que la courbe présente une symétrie. En effet, pour une distance donnée, le conducteur accélère si la distance entre les véhicules est en train d'augmenter, inversement il décélère si elle diminue.

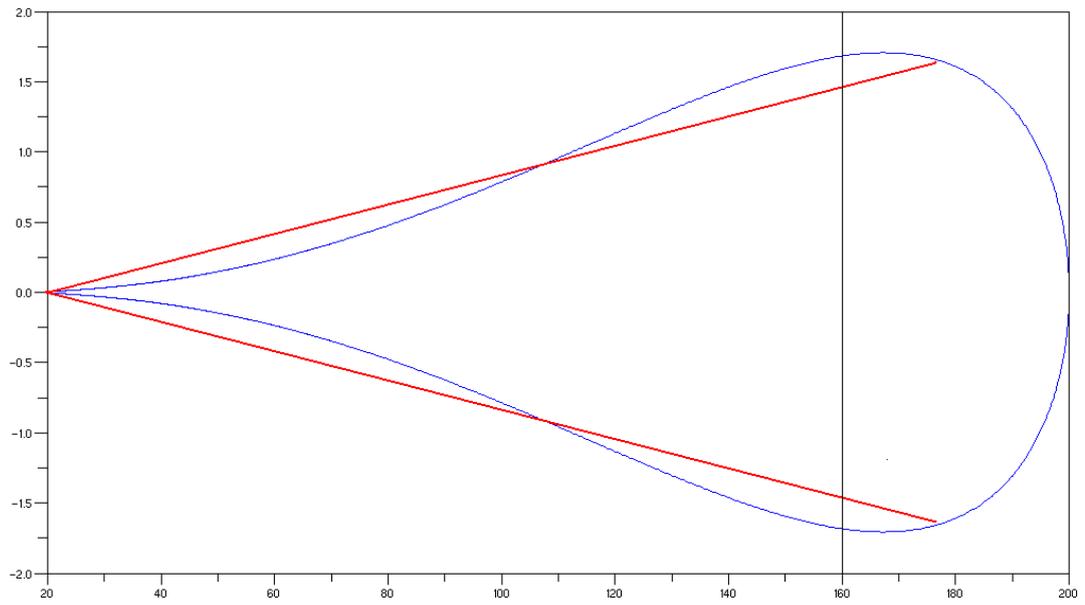
Bouchon A :



$a = 0,19d$

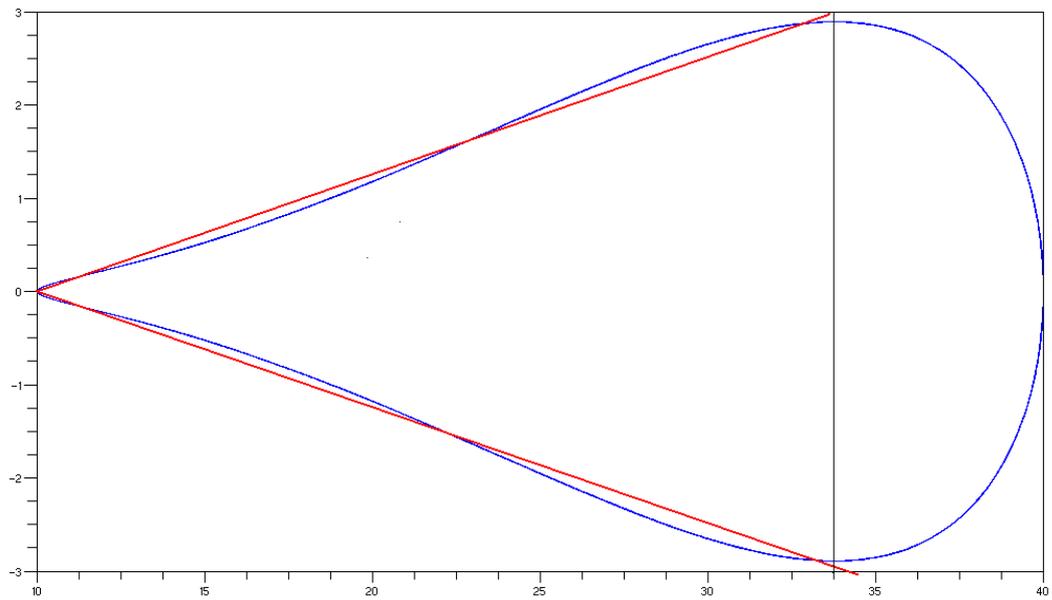


Bouchon B :

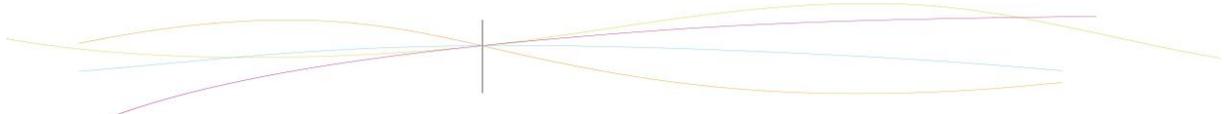


$a = 0,0107 d$

Bouchon C :



$a = 0,109 d$

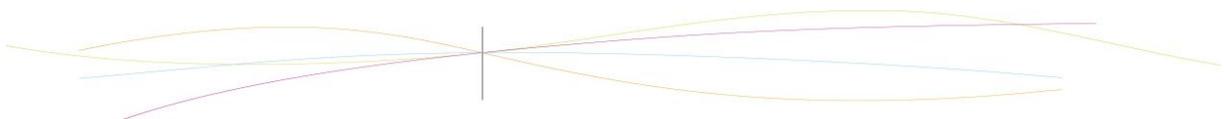


#### 4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

En conclusion, nous pouvons dire que ce projet fut très enrichissant pour tous les membres du groupe car il comprenait aussi bien de la physique, des mathématiques ou encore de l'information. Ainsi chacun a pu trouver son domaine de compétences et apporter ses connaissances à l'ensemble du groupe. Ce projet nous a également permis d'améliorer notre gestion de travail en groupe, d'autant plus que personne ne se connaissait avant la constitution du groupe.

Les principales difficultés que nous avons rencontrées sont principalement dues au large sujet auquel nous faisons face. Nous avons mis plusieurs séances à vraiment cerner le travail demandé et donc à nous concentrer sur ce projet. Evidemment en cas de difficultés nous avons un professeur responsable, afin de nous aider mais aussi de nous encadrer pour s'assurer de la bonne gestion du projet.

Finalement, nous avons réalisé 2 modélisations différentes du trafic autoroutier, l'une plus réaliste que l'autre. Cependant, ces 2 modélisations ne reflètent pas encore vraiment la réalité, donc il serait peut-être intéressant de continuer ce projet dans les années suivantes afin d'aller encore plus loin dans la démarche.



## 5. BIBLIOGRAPHIE

- « Mécanique des fluides » 2<sup>nd</sup>e année, Hprépa, Hachette Supérieur, 1999
- <http://www.inrets.fr/ur/licit/licit.htm> (valide à la date du 03/04/2009)
- <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~sauvageo/Organisation/FeteDeLaScience/FS2004/Posters/Trafic.pdf>  
(valide à la date du 12/04/2009)
- [http://www.lama.univ-savoie.fr/sitelama/Membres/pages\\_web/BOURDARIAS/enseignement/M1/cours/Trafic.pdf](http://www.lama.univ-savoie.fr/sitelama/Membres/pages_web/BOURDARIAS/enseignement/M1/cours/Trafic.pdf)  
(valide à la date du 12/04/2009)
- [http://www.ann.jussieu.fr/~despres/BD\\_fichiers/tr1.pdf](http://www.ann.jussieu.fr/~despres/BD_fichiers/tr1.pdf) (valide à la date du 15/03/2009)

## 6. ANNEXES (NON OBLIGATOIRE)

### 6.1. Résolution mathématique

Résolution de l'équation de conservation

$\rho$ : Densité (1/m)

$U$ : Vitesse (m/s)

Équation de conservation

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho U) = 0$$

Nous ramenons l'espace à une dimension:

$$\frac{d(\rho U)}{dx} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho(x,t)} \frac{d\rho}{dx} U(x,t) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{E})$$

On normalise l'équation différentielle:

On fixe  $p$ , on résout avec  $U$  en inconnu et  $p$  en paramètre. On commence par chercher les solutions de l'équation homogène.

$$\frac{d(\rho U_H)}{dx} = 0 \quad (\text{H})$$

$$\frac{d(\rho U_H)}{dx} = 0 \Rightarrow \rho U_H = \varphi(t)$$

$$U_H(x,t) = \frac{\varphi_1(t)}{\rho(x,t)}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on utilise la variation de la constante.

$$U_0(x,t) = \frac{\lambda(x,t)}{\rho(x,t)}$$

On réinjecte  $U_0$  dans (E):

$$\frac{dU_0}{dx} + \frac{1}{\rho(x,t)} \frac{d\rho}{dx} U_0(x,t) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{E})$$

$$\frac{dU_0}{dx} = \frac{1}{\rho(x,t)} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\rho}{dx} \frac{\lambda}{[\rho(x,t)]^2}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{d\rho}{dt}$$

$$d\lambda = -\left(\frac{d\rho}{dt}\right) dx$$

$$\lambda(x,t) = \varphi_2(t) - \int \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dx$$

$$U_H(x,t) = \frac{1}{\rho(x,t)} \left( \varphi_2(t) - \int \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dx \right)$$

$$U(x,t) = U_H(x,t) + U_0(x,t)$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho(x,t)} \left( \varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \int \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dx \right)$$

Application à notre modèle

$$\rho(x,t) = \langle \rho \rangle + A \cos(\omega(x + Bt))$$

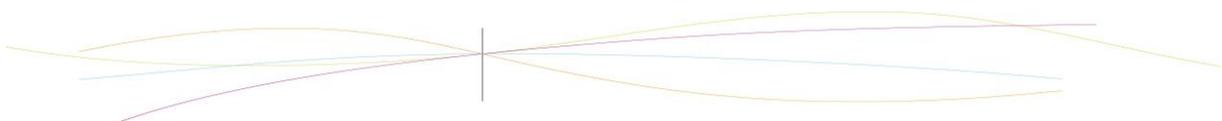
$$\frac{d\rho}{dt} = -AB\omega \sin(\omega(x + Bt))$$

$$\int \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dx = AB \cos(\omega(x + Bt)) = B(\rho(x,t) - \langle \rho \rangle)$$

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho(x,t)} (\lambda + B[\langle \rho \rangle - \rho(x,t)])$$

En posant  $\mu = \lambda \langle \rho \rangle$

$$U(x,t) = (\mu + B) \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(x,t)} - B$$



$$U(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \left( \varphi(t) - \int \left( \frac{d\rho}{dt} \right) dx \right)$$

On simplifie notre étude en nous intéressant au cas où  $\varphi(t) = \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$U(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \left( \lambda - \int \left( \frac{d\rho}{dt} \right) dx \right)$$

Calcul de l'accélération à l'aide de la dérivée particulaire

$$a(x, t) = \frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dx} U(x, t)$$

$$\frac{dU}{dt} = -(\mu + B) \frac{d\rho < \rho >}{dt [\rho(x, t)]^2} \quad \frac{dU}{dx} = -(\mu + B) \frac{d\rho < \rho >}{dx [\rho(x, t)]^2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -ABw \sin(w(x + Bt)) \quad \frac{d\rho}{dx} = -Aw \sin(w(x + Bt))$$

$$a(x, t) = (\mu + B) \frac{< \rho >}{[\rho(x, t)]^2} A \sin[w(x + Bt)] [B + U(x, t)]$$

$$a(x, t) = w < \rho >^2 (\mu + B)^2 \frac{A \sin[w(x + Bt)]}{[\rho(x, t)]^3}$$

$$A \sin[w(x + Bt)] = -A \cos\left[w(x + Bt) + \frac{\pi}{2}\right] = -A \cos\left[w\left(x + \frac{\pi}{2w} + Bt\right)\right] = < \rho > - \rho\left(x + \frac{\pi}{2w}, t\right)$$

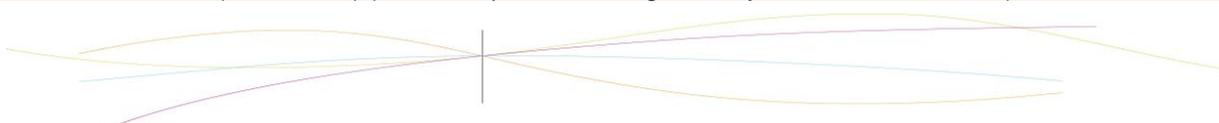
$$w = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow \frac{\pi}{2w} = \frac{L}{4}$$

$$a(x, t) = w < \rho >^2 (\mu + B)^2 \frac{< \rho > - \rho(x + L/4, t)}{[\rho(x, t)]^3}$$

## 6.2. Listings des programmes réalisés

Programme de la 1<sup>ère</sup> méthode :

```
clear all
// longueur de l'échantillon (m) (choisie pour avoir une représentation pertinente du phénomène de bouchon)
D=4000;
// vitesse maximale (m/s) (selon des situations réelles, la vitesse maximale ne dépasse pas cette valeur pour le
phénomène étudié)
Vmax=80/3.6;
// densité maximale (véhicule / m) (choisie en prenant une longueur moyenne de voiture de 4 m)
```



```

rhomax=1/4;

// pas
dx=10;
dist=4000;
L=[1:dx:dist]';
Nbp=length(L);

// Distance minimale entre deux vehicules (en m)
dmin = 4;
// Nombre de vehicule ( D/2dmin < N < D/dmin )
N = 600;
// Vitesse maximale (m/s)
Umax = Vmax;
// Vitesse minimale (m/s)
Umin = 0;
// Acceleration maximale (m/s2)
amax = 10;
// Densite moyenne
pmoy = N/D;

// Variation de la densite
A = 1/dmin - pmoy;

// Parametre de l'EDL
lambda = ( Umax*(pmoy-A) + Umin*(pmoy+A) )/2;

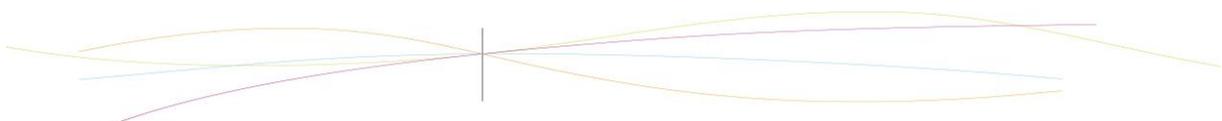
// Vitesse de deplacement des zones denses
B = ( Umax*(pmoy-A) - Umin*(pmoy+A) )/(2*A);

// Pulsation spatiale de la densite
w = amax*(pmoy - A)*(pmoy - A)/( A*(B*pmoy+lambda)*(B*pmoy+lambda) );

// densite inintiale (voir deuxieme methode)
rhoinit=A*cos(w*L)+pmoy;

// vitesse initiale (voir III. 4) b) 1) )

```



```

Uinit=Vmax*(1-rhoinit/rhomax);

Xinit=[rhoinit;Uinit];

//Determine la loi de comportement de l'accélération de chaque voiture
function ax=CalculAcc(U,rho)
    dk = splin(L,rho);
    [rhobis, deltarho] = interp(L, L, rho, dk);
    ax=-(Vmax/rhomax)^2*deltarho.*rho
endfunction

function [dXdt] = VariationX(t,X)
    long=length(X);longrho=long/2;longU=long/2;
    //Extraction des données de densite et de vitesses
    rho=X(1:longrho,1);U=X(longrho+1:$,1);

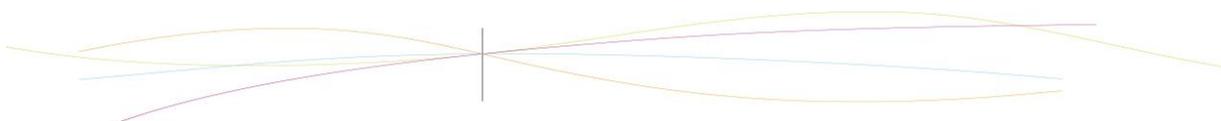
    //Adapatation du champ de densite
    rhoU=U.*rho;
    dk = splin(L,rhoU);
    [rhoUbis, deltarhoU] = interp(L, L, rhoU, dk);

    //Variation du Champ de vitesses
    dk = splin(L,U);
    [Ubis, gradU] = interp(L, L, U, dk);
    //Calcul de la dérivée particulaire à cet instant
    ax=CalculAcc(U,rho);
    //Variation du Champ de vitesses
    dk = splin(L,U);
    [Ubis, gradU] = interp(L, L, U, dk);
    //Calcul de la dérivée particulaire à cet instant
    ax=CalculAcc(U,rho);
    dXdt=[-deltarhoU;ax-gradU.*U];

endfunction

t0=0;
for t=t0:1:40
    x = ode("adams",Xinit, t0, t, 1E-7,1E-9,VariationX);

```



```

rho=x(1:length(x)/2);
U=x(length(x)/2+1:$);
ax=CalculAcc(U,rho);
clf
subplot(3,1,1);
plot2d(L,U*3.6);xtitle('Champ de vitesses','Position (m)','Vitesse (km/h)');
subplot(3,1,2);
plot2d(L,ones(rho)./rho);xtitle('distance entre automobiles','Position (m)','distance (m)');
subplot(3,1,2);
plot2d(L,ones(rho)./rho);xtitle('distance entre automobiles','Position (m)','distance (m)');
subplot(3,1,3);
plot2d(L,ax);xtitle('accélération','Position (m)','a (m/s2)');
printf('Nb voitures = %d\n',sum(rho)*dist);

t0=t;
Xinit=x;
End

```

Programme de la 2<sup>nde</sup> méthode

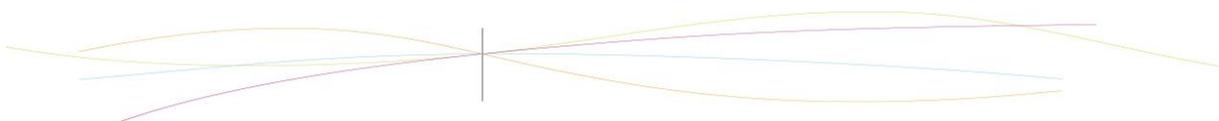
```

// trace les courbes de distance, de vitesse et d'acceleration des vehicules
// ainsi que l'acceleration en fonction de la distance

// purge l'environnement...
clear
//-----//
// Parametre a declarer //
//-----//

// Distance sur laquelle se deroule la simulation (en m)
D = 4000;
// Distance minimale entre deux vehicules (en m)
dmin = 4;
// Nombre de vehicule ( D/2dmin < N < D/dmin )
N = 600;
// Vitesse maximale (m/s)
Umax = 80/3.6;
// Vitesse minimale (m/s)

```



```

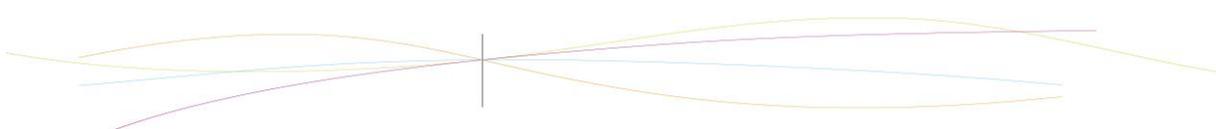
Umin = 5/3.6;
// Acceleration maximale (m/s2)
amax = 10;
//-----//
// Parametre intermediaire (calcule par le programme) //
//-----//
// On fixe un temps
t = 0;

// Densite moyenne
pmoy = N/D;
// Variation de la densite
A = 1/dmin - pmoy;
// Parametre de l'EDL
lambda = ( Umax*(pmoy-A) + Umin*(pmoy+A) )/2;
// Vitesse de deplacement des zones denses
B = ( Umax*(pmoy-A) - Umin*(pmoy+A) )/(2*A);
// Pulsation spatiale de la densite
w = amax*(pmoy - A)*(pmoy - A)*(pmoy - A)/( A*(B*pmoy+lambda)*(B*pmoy+lambda) );
// Vecteur spatial
X = [0:10:D];
//-----//
// Calcul des fonctions (p, d, U et a) //
//-----//

// Densite
p = pmoy + A*cos( w*(X + B*t) );
// Distance
d = ones(p)./p;
// Vitesse
U = (lambda - A*B*cos( w*(X + B*t) ))./p;
// Acceleration
a = A*w*sin( w*(X + B*t) )*( B*pmoy+lambda )*( B*pmoy+lambda )./( p.*p.*p );

//-----//
// Tracer des courbes //
//-----//

```



```
subplot(4,1,1);
plot(X,d);
subplot(4,1,2);
plot(X,3.6*U);
subplot(4,1,3);
plot(X,a);
subplot(4,1,4);
plot(d,a);
```

Programme de la 2nde méthode injectée dans le programme de l'année précédente

```
clear all
dist=4000;
Vmax=130/3.6;
dx=10;

// Distance sur laquelle se deroule la simulation (en m)
D = 4000;

// Distance minimale entre deux vehicules (en m)
dmin = 4;

// Nombre de vehicule ( D/2dmin < N < D/dmin )
N = 600;

// Vitesse maximale (m/s)
Umax = 80/3.6;

// Vitesse minimale (m/s)
Umin = 5/3.6;

// Acceleration maximale (m/s2)
amax = 10;

// Densite moyenne
pmoy = N/D;

// Variation de la densite
A = 1/dmin - pmoy;

// Parametre de l'EDL
lambda = ( Umax*(pmoy-A) + Umin*(pmoy+A) )/2;

// Vitesse de deplacement des zones denses
B = ( Umax*(pmoy-A) - Umin*(pmoy+A) )/(2*A);

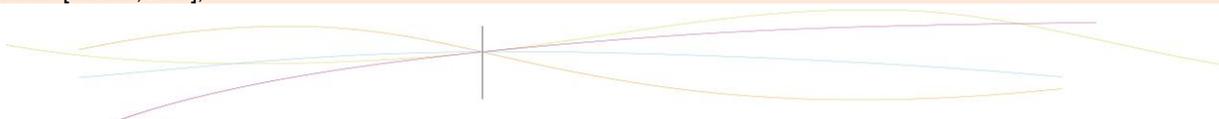
// Pulsation spatiale de la densite
w = amax*(pmoy - A)*(pmoy - A)/( A*(B*pmoy+lambda)*(B*pmoy+lambda) );

dist = (2*pi/w)*4;

L=[1:dx:dist];
Nbp=length(L);

rhoinit=pmoy + A*cos(w*L);
Uinit=(lambda + B*pmoy)*ones(rhoinit)./rhoinit - B;

Xinit=[rhoinit;Uinit];
```



```

//Determine la loi de comportement de l'accélération de chaque voiture
function ax=CalculAcc(U,rho)

decal = int( Nbp*%pi/(2*w*dist) );

rhodecal = ones(rho);

for i=1:1:(length(rho) - decal)
    rhodecal(i) = rho(i + decal);
end

for i=1:1:decal
    rhodecal(i+length(rho)-decal) = rho(i);
end
ax=w*pmoy*(B*pmoy + lambda)^2*(pmoy*ones(rhodecal)-rhodecal)./(rho.*rho.*rho);
endfunction

function [dXdDt] = VariationX(t,X)
    long=length(X);longrho=long/2;longU=long/2;
    //Extraction des données de densite et de vitesses
    rho=X(1:longrho,1);U=X(longrho+1:$,1);

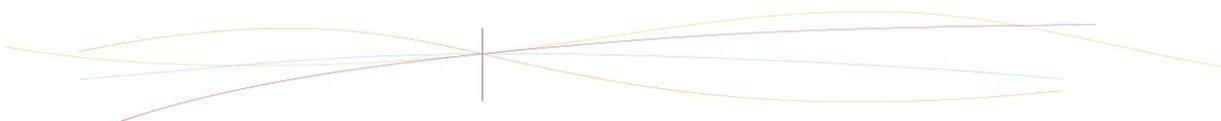
    //Adapatation du champ de densite
    rhoU=U.*rho;
    dk = splin(L,rhoU);
    [rhoUbis, deltarhoU] = interp(L, L, rhoU, dk);

    //Variation du Champ de vitesses
    dk = splin(L,U);
    [Ubis, gradU] = interp(L, L, U, dk);
    //Calcul de la dérivée particulaire à cet instant
    ax=CalculAcc(U,rho);
    dXdDt=[-deltarhoU;ax-gradU.*U];

endfunction

t0=0;
for t=t0:1:40
    x = ode("adams",Xinit, t0, t, 1E-7,1E-9,VariationX);
    rho=x(1:length(x)/2);
    U=x(length(x)/2+1:$);
    ax=CalculAcc(U,rho);
    clf
    subplot(3,1,1);
    plot2d(L,U*3.6);xtitle('Champ de vitesses','Position (m)', 'Vitesse (km/h)');
    subplot(3,1,2);
    plot2d(L,ones(rho)./rho);xtitle('distance entre automobiles','Position (m)', 'distance (m)');
    subplot(3,1,3);
    plot2d(L,ax);xtitle('accélération','Position (m)', 'a (m/s2)');
    printf('Nb voitures = %d\n',sum(rho)*dist);

    t0=t;
    Xinit=x;
end
    
```



**Projet P6-3 N°2**

**Intitulé du projet :** Modélisation du trafic autoroutier à l'aide des lois de la mécanique des fluides.

**Encadrant :** Jérôme Yon

**Créneau horaire :** chaque mercredi de 11h30 à 12h45

**Elèves :**

Eric FLAVIGNE
Gaelle REVAUX
Julie CHIQUET
Lucie LOYAU
Théophile CHAUMONT FRELET

**Objectifs du projet :**

L'année dernière un groupe (équation du choc) a étudié le sens de la dérivée particulaire utilisée en mécanique des fluides :

$$\underbrace{\frac{d\vec{U}}{dt}}_{\text{dérivée particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_{\text{caractère non permanent}} + \underbrace{(\vec{\nabla} \vec{U}) \cdot \vec{V}}_{\text{caractère non uniforme}} = \vec{a}$$

Ainsi que la loi de conservation de la masse :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$

Après compréhension du sens physique de ces équations, les étudiants ont commencé une illustration de ces équations dans la modélisation du trafic autoroutier.

Il vous est demandé d'approfondir cette illustration.

Il sera demandé aux élèves :

1. De comprendre le sens physique de ces expressions en étudiant le rapport du projet de l'an dernier.
2. De faire un état de l'art des différentes méthodes de simulation du trafic existantes.
3. Prendre en main le logiciel Scilab (équivalent de Matlab) pour résoudre les équations.
4. Etudier différents cas typiques tels que l'établissement d'un « bouchon ».