Projet de Physique P6-3

STPI/P6-3/2009 – n°1

ETUDE D'UN SYSTEME PHYSIQUE NON DISSIPATIF « CHAOTIQUE »

Etudiants :

David PELTIER **ThaoLan NGUYEN HOANG**

Diem Phuong TRAN **Omar ABDELMALKI**

Kenza ALAOUI **Kevin LEROUX**

Enseignant-responsable du projet :

Jerome YON

Date de remise du rapport : ***23/06/09***

Référence du projet : ***STPI/P6-3/2009 – n°1***

Intitulé du projet : ***Etude d'un système physique non dissipatif chaotique***

Type de projet : ***Simulation sur Scilab et analyse numérique***

Objectifs du projet : ***Approche de la dynamique des systèmes***

- Prendre en main un outil numérique capable de résoudre des systèmes d'équations différentielles et de visualiser les solutions dans l'espace des phases ou l'espace physique.
- Analyse sur un système connu : le système de Lorenz
- Mettre en évidence le mouvement chaotique du système Terre - Lune - Soleil :
    1. Résoudre numériquement les équations différentielles.
    2. Visualiser les résultats.
    3. Réaliser une analyse bibliographique.
    4. Analyser les résultats.

N° cahier de laboratoire associé : ***A30222***

Remerciements :

Nous tenons à remercier Monsieur Yon, pour son aide et sa présence sans lesquelles ce projet n'aurait jamais pu être mené à terme.

Nous remercions aussi Selima Masmoudi et Martin Rosalie qui sont venus nous expliqué leur travail de l'an dernier et qui nous ont rassuré à un moment où nous pensions ne plus nous en sortir !

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS :

Système chaotique: Un système chaotique est un système qui est étudié à partir d'une équation différentielle comme tout autre système mais dont la représentation dans un espace orthonormé cartésien donne une courbe complètement désordonnée. Cela est dû au fait que des petits écarts aux conditions initiales sont amplifiés de façon exponentielle au cours du temps. Grâce à cette étude nous pouvons accéder à des phénomènes microscopique à l'échelle macroscopique.

Pour étudier un système chaotique il faut se placer dans l'espace des phases ou il apparaît clairement que le mouvement du corps étudié est alors chaotique.

Espace des phases: L'espace des phases est un espace abstrait ou nous pouvons visionner de manière ordonnée les mouvements de corps qui nous paraissaient chaotiques dans les espaces classiques. Les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié. On étudiera alors notre corps grâce a 6 variables: 3 variables de position (x, y, z) et trois variables de quantité de mouvement (Px, Py, Pz).

Les conditions initiales étant déterminantes, l'évolution d'un système dans l'espace des phases est entièrement déterminée par la donnée initiale de la position (x, y, z) et de la vitesse (vx, vy, vz) (la masse étant connue, la quantité de mouvement est proportionnelle à vitesse.)

Attracteur: domaine de l'espace des phases vers lequel converge le système chaotique.

Système continu: c'est un système dont les variables évoluent de manière continue. On peut alors déterminer les valeurs de différentes coordonnées à tout moment et cela en fonction des autres valeurs.

Système discret: système dont les variables n'évoluent pas de manière continue.

Système dissipatif : système pour lequel l'énergie n'est pas conservée au cours du temps, il perd de l'énergie.

Système conservatif : système pour lequel l'énergie mécanique est conservée au cours du temps.

INTRODUCTION :

Le système solaire est un système que l'on peut considérer comme "simple" : il comporte peu d'objets (le Soleil et les planètes, pour simplifier) et n'est régi que par une seule loi, la gravitation universelle.

Depuis l'Antiquité, les hommes observent le ciel, et nombreuses sont ces observations qui nous ont été transmises jusqu'à présent. Nous savons aussi, à notre niveau, que, de la force d'attraction s'exerçant sur un corps, on peut déduire l'accélération de son mouvement et calculer sa trajectoire, à partir de ses positions et vitesse initiales. Ainsi, la connaissance de l'état actuel du système solaire devrait nous permettre de prévoir toute son évolution future. L'unique loi de gravitation suffirait à expliquer les mouvements des astres et à prévoir tous les phénomènes célestes.

Mais en réalité, le système solaire est régit par les lois du chaos. Nous avons choisi de nous y intéresser.

L'année dernière un groupe a travaillé sur l'étude d'un système dynamique chaotique. Il s'agissait d'une masse attachée sur un ressort. Le système était dissipatif. Nous avons souhaité revenir à une approche de la dynamique des systèmes grâce a un système non dissipatif.

Notre travail s'est déroulé en deux parties :

- Dans un premier temps nous avons étudié un modèle célèbre de système chaotique non dissipatif : le système de Lorenz. Cela nous a permis de nous familiariser avec l'outil Scilab ainsi que de visualiser les solutions dans l'espace des phases et l'espace physique et de les interpréter.
- Dans un deuxième temps nous avons décidé d'étudier de système Terre-Lune-Soleil.

A travers ce rapport, nous allons vous présenter tous les résultats que nous avons obtenus dans l'étude de nos deux systèmes ainsi que toutes les notions nécessaires à la compréhension de celles-ci.

METHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Lors de notre première séance, Mr. Yon nous a expliqué succinctement ce qu'était le chaos, où et comment il se manifestait, comment on pouvait le mettre en évidence, et comment on pouvait exploiter les informations issues du chaos pour en dégager une forme d'ordre. Il nous a aussi fait une présentation du logiciel Scilab et de ses principales fonctionnalités.

Nous devions donc en savoir un petit peu plus sur le chaos, et entreprîmes de lire le rapport qu'avait rédigé le groupe de l'année dernière ayant traité le même sujet que le notre. Nous avons d'ailleurs eu la chance de pouvoir rencontrer deux membres de ce groupe, Martin Rosalie et Selima Masmoudi, qui ont accepté de venir nous présenter le travail qu'ils avaient effectué l'an passé. Cette rencontre a été très instructive car elle nous a permis de mieux appréhender le travail qui nous attendait et de mieux nous y préparer.
Nous nous sommes répartis les tâches de la manière suivante : une moitié du groupe (Kenza, Diem Phuong et ThaoLan) s'est vouée à la recherche d'informations sur le chaos, ses différentes méthodes d'analyse ainsi que sur un exemple connu, celui du papillon de Lorenz, tandis que l'autre moitié du groupe s'occupait de la mise en équation des systèmes et de la programmation sous Scilab. Kevin, qui avait des notions en informatique, a assuré en grande partie la programmation. David s'est chargé de traiter le système Terre-Tune Soleil, et Omar de l'application des procédés d'analyse au deux systèmes étudiés.

Pour la rédaction de ce rapport, nous avons suivi le même schéma.

1. TRAVAIL REALISE ET RESULTATS

1.1. Notion de système dynamique et chaos:

Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps et qui est à la fois causal, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent, et déterministe, c'est-à-dire qu'à une «condition initiale» donnée à l'instant «présent» va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état «futur» possible.

L'évolution déterministe du corps peut alors être discontinue et ne peut pas être modélisé par une équation différentielle ordinaire car il n'évolue pas continument au cours du temps. C'est le cas des systèmes soumis à la théorie du chaos.

Il faut savoir que les équations qui régissent les systèmes chaotiques ne sont pas forcément plus complexes même si elle semble moins réalistes physiquement.

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques et rigoureusement déterministes mais comme nous l'avons dit dans la définition présente une instabilité appelé «sensibilité aux conditions initiales». L'exemple le plus connu est celui de l'effet papillon (un battement d'aile de papillon peu changer le monde par les conséquences qu'il engendrera). Ces phénomènes ne sont dont pas prédictibles en principe à long terme.

Dans l'étude de mouvement chaotique, le but ultime n'est pas de résoudre l'équation différentielle que l'ont obtient comme pour un système quelconque mais d'étudier le comportement général de notre corps et de voir s'il tend vers certains domaines, a quels moments et pourquoi. Enfin, on cherche à comprendre et à étudier dans quelle mesure les conditions initiales influent sur le comportement de notre corps.

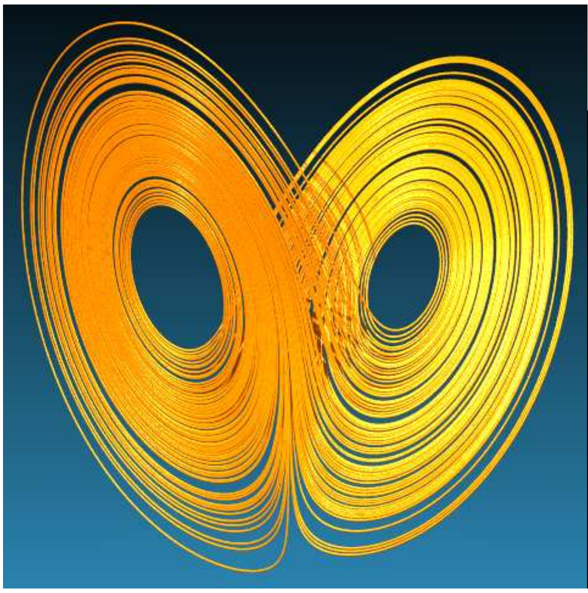
Lors de l'étude d'un système chaotique, un objectif important est la recherche des points fixes aussi appelés états stationnaires du système. Ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle n'évolue plus avec le temps. Certains de ces points fixes sont attractifs, ce qui veut dire que si le système parvient à leur voisinage, il va converger vers le point fixe. On voit donc la qu'il apparaît un «ordre dans le chaos» dixit Mr Yon!

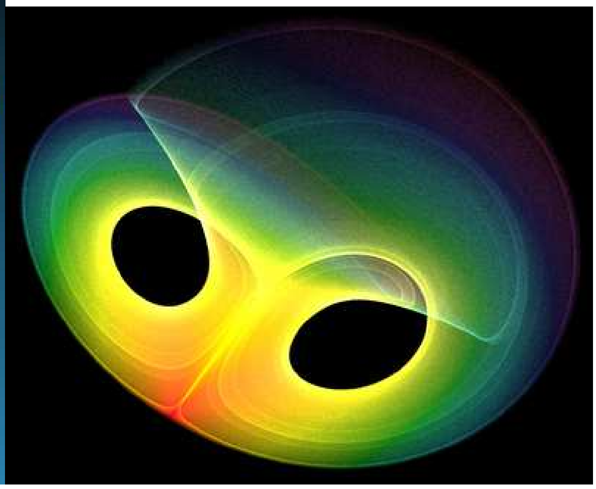
De même, on recherche les points dits périodique. Ce sont les états du système pour lesquels on remarque que le mouvement commence à se répéter au bout d'un certain nombre de périodes. Les points périodiques peuvent également être attractifs. Cette périodicité peut apparaître au bout de peu de temps mais aussi pour certains système comme celui que l'on a étudié sur plusieurs centaines de jours.

1.2. Célèbre exemple de chaos : le papillon de Lorenz

Après l’étude théorique de ce système nous avons réalisé sur Scilab sa modélisation dans l’espace des phases.

1.2.1. Introduction :





La Méthode de la Théorie du chaos de Lorentz et de Poincaré est une technique qui peut être utilisée pour que des systèmes complexes et dynamiques soient étudiés. On découvre des modèles de commande (non-chaotique) hors des comportements apparemment chaotiques.

« La Théorie du Chaos est l'étude qualitative du comportement apériodique instable dans les systèmes dynamiques non-linéaires déterministes » (Keller, 1993). Le comportement apériodique est constaté quand il y a une variable (souvent dans les conditions initiales) décrivant la condition du système dont la valeur est légèrement modifiée. Le comportement apériodique instable est hautement complexe : il ne se répète jamais et il continue à manifester les effets de n'importe quelle petite perturbation au cours du temps.

Selon la théorie mathématique courante, un système chaotique est défini comme montrant «une sensibilité aux conditions initiales». En d'autres termes, pour déduire la future condition d'un système avec certitude, vous devez connaître les conditions initiales avec une exactitude quasi infinie, puisque les erreurs s'accroissent rapidement même avec la plus légère inexactitude.

C'est pourquoi il est si difficile d'établir des prévisions météorologiques. La théorie a également été appliquée aux cycles économiques, et à la dynamique des populations animales, comme dans le mouvement du liquide, les orbites planétaires, les courants électriques dans les semi-conducteurs, les conditions médicales (comme les crises épileptiques), et la modélisation de la course aux armements.

Pendant les années 60, Edouard Lorenz, un météorologiste au MIT, a travaillé sur un projet pour simuler des modèles climatiques sur ordinateur. Il est accidentellement tombé sur l'effet papillon après que les déviations par milliers dans les calculs aient considérablement changé les simulations. L'Effet Papillon démontre comment les changements sur une petite échelle, peuvent influencer les choses à grande échelle. C'est l'exemple classique du chaos, où les petits changements peuvent causer de grands bouleversements. Un papillon, agitant ses ailes à Hong Kong, peut changer les modèles de tornade au Texas.

1.2.2. Comment mettre en évidence le chaos ?

Pour appliquer la Théorie du Chaos, une seule variable est mesurée X (n) = x (t0 + NT) avec un temps de départ, t0, et un délai d'exécution, t, fournit un espace à n-dimensions, ou espace de phase, cela représente l'espace multi-variables d'état complet du système; jusqu'à 4 dimensions peuvent être requises pour représenter cet espace des phases d'un système chaotique. Ainsi, sur une longue période, un système observé développera des modèles dans une série chronologique non-linéaire qui peut être employée pour déduire de futures conditions.

1.2.3. Equations du système de Lorentz :

Un système chaotique, bien que déterministe, est extrêmement sensible aux conditions initiales. C'est pourquoi une infime variation (une perturbation) des conditions initiales entraîne une importante déviation de la trajectoire résultante.

De sorte que l'évolution du système, suite aux erreurs de mesure et systématiques, sera en pratique imprédictible.

Compte tenues une trajectoire cible et des conditions initiales obtenues par perturbation, le but du forçage sera de contrôler l'évolution de la trajectoire perturbée dans l'espace des phases de façon à la forcer à suivre la trajectoire cible.

Pour mener cette investigation, nous nous intéresserons en particulier au système décrit par Lorenz [Lorenz, 1963] qui exhibe cette propriété chaotique sur un sous espace de l'espace des paramètres engendré par {σ, ρ, β}. Il s'agit d'un système non-linéaire à trois degrés de liberté:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \sigma.(x-y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= (\rho - z).x - y \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= x.y - \beta.z \end{aligned} \right.$$

Nous considérons le système étudié par Lorenz, paramétré par : σ=10, ρ=28, β=8/3.

1.2.4. Les notions importantes :

- Trajectoire :

La trajectoire est la ligne décrite par n'importe quel point d'un objet en mouvement, et notamment par son centre de gravité.

En astronomie, la trajectoire, est la courbe que décrit le centre de gravité d'une planète accomplissant sa révolution autour du soleil, ou d'un satellite autour d'une planète.

La trajectoire apparente est la ligne que décrit un astre sur le fond du ciel lors de sa révolution, telle que la perçoit un observateur terrestre.

- Espace des phases :

Notre première approche du chaos nous a fait réaliser la difficulté de trouver des solutions exactes ou même approchées à des équations non linéaires et ceci nous amène à la recherche d'une représentation qui nous permettrait d'accéder plus simplement à des solutions qualitatives. C'est le moment d'introduire l'espace de phase.

L'espace des phases en mécanique analytique est un espace à 2M dimensions permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système mécanique décrit par des équations différentielles du second ordre par rapport au temps. Il est étroitement associé aux équations de Hamilton et donc au formalisme Hamiltonien. Les 2M dimensions correspondent aux M paires de variables conjuguées intervenant dans les équations différentielles gouvernant le mouvement d'un système mécanique (un exemple simple est donné ci-dessous).

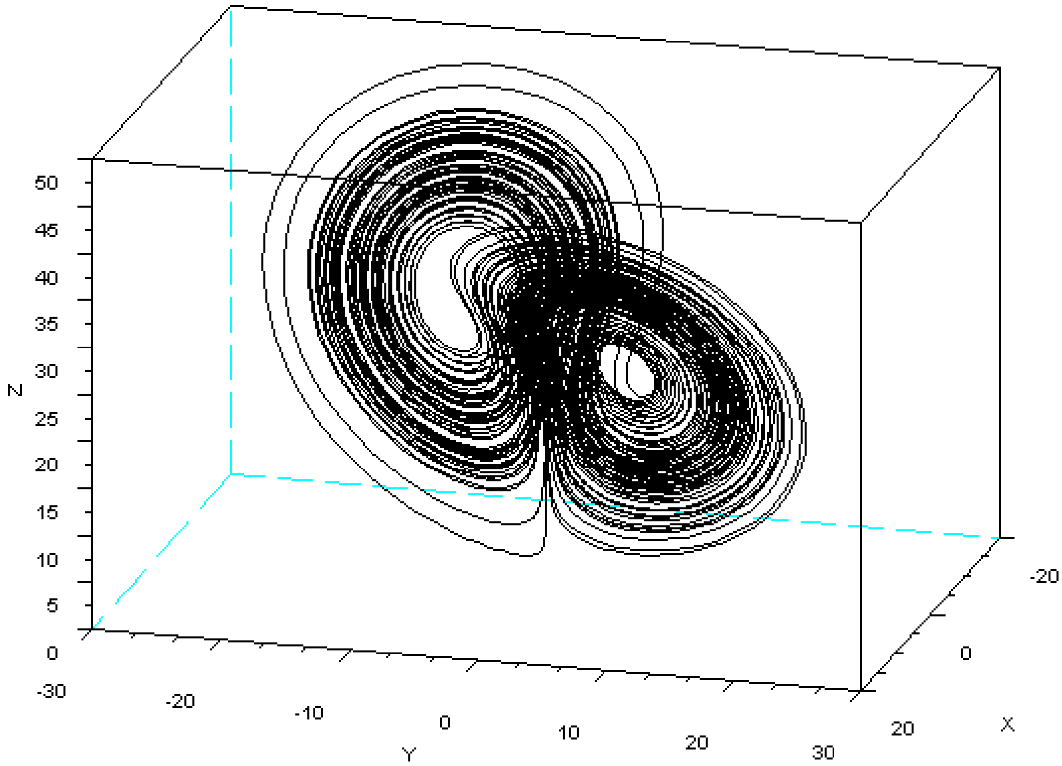
Cet espace est fondamental en physique et on le retrouve au cœur de la formulation de la mécanique quantique et de la mécanique statistique.

Initialement introduit dans des problèmes de mécanique céleste, pour décrire de manière unifiée les équations de la mécanique des points matériels dans un potentiel et les trajectoires des rayons lumineux dans des milieux inhomogènes d'indices variables, Schrödinger en fera usage pour construire la mécanique ondulatoire à partir des idées de De Broglie. Auparavant, Bohr et Sommerfeld l'avaient utilisé en théorie quantique pour exprimer des règles de quantification de systèmes mécaniques simples.

La trajectoire d'un système mécanique est donc représentée par celle d'un point à 2M coordonnées dans l'espace des phases. Si l'on considère différentes conditions initiales, on aura différentes courbes dans cet espace. Dans le cadre de la mécanique statistique cela permettra d'étudier le comportement moyen d'un ensemble de systèmes mécaniques identiques sous la forme d'un fluide de particules. En théorie du chaos, l'espace des phases permet de visualiser que les trajectoires de systèmes non-linéaires avec différentes conditions initiales se retrouvent parfois proches de certaines formes géométriques dans cet espace. On parle alors d'attracteur étrange car tout se passe comme si ces formes étranges attiraient les points représentant un système mécanique pour les forcer à rester dans leur voisinage.

→ Attracteur de Lorenz :

Dans un espace des phases à trois dimensions dans lequel l'on représente les coordonnées (n, T, Z). On obtient l'attracteur de Lorenz.



Attracteur de Lorenz représenté grâce au logiciel Scilab

- Section de Poincaré :

La section de Poincaré est souvent utilisée pour caractériser le chaos, et étudier la dynamique d'un système. Pour définir cette section de Poincaré dans le cadre du problème à trois corps restreints, rappelons-nous qu'on s'intéresse à la particule test, dans le repère tournant. Il est alors intéressant de reporter sur un diagramme les valeurs (q1, p1) de cette particule à chaque fois qu'elle coupe l'axe q2=0. On dit alors que la section de Poincaré est à q2=0.

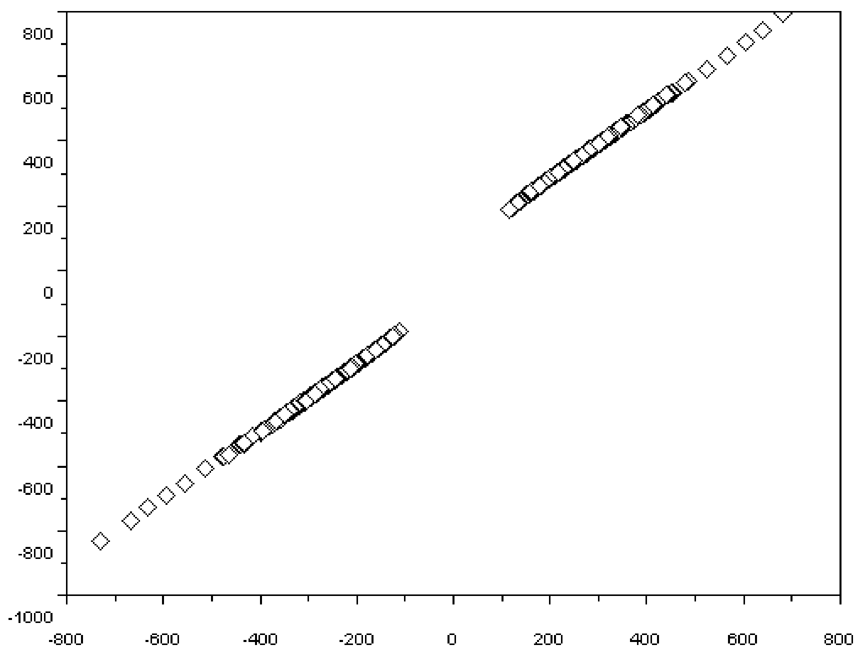
Plus généralement, une section de Poincaré se dessine dans un plan ayant pour abscisse la coordonnée généralisée q{i} et pour ordonnée la coordonnée généralisée p{i}, p{j} étant calculé pour que J=cste (on parle alors de variété d'énergie sur laquelle on se place), et q{j} étant libre. La section est alors généralement une surface de section (équation de plusieurs variables).

Dans notre cas, il est intéressant de tracer une section de Poincaré à q2=0.

Par ailleurs, on définit une trajectoire de Poincaré, les points de ce diagramme issus de mêmes conditions initiales q10, q20, p10, p20. On fixe généralement q20 une fois pour toute, et on calcule p20 en fonction de q10, p10 et J (qui doit rester constant sur toutes les trajectoires). Plus le nombre de points d'une trajectoire de Poincaré est élevé, plus la section de Poincaré est claire à l'interprétation.

On obtient alors des courbes fermées (si le nombre de trajectoires de Poincaré est suffisant) correspondant à l'ensemble des valeurs des couples (q1,p1) prises par la particule test quand elle suit une orbite non-chaotique, et des zones chaotiques caractérisées par une densité de points non ordonnés élevée, et prises entre deux courbes fermées.

Les zones chaotiques entourent généralement un ensemble de courbes fermées, appelé île. De même, les zones où l'on retrouve des courbes fermées à l'intérieur d'une zone chaotique entourant une île sont des zones de résonances (librations).



Plan de Poincaré pour le papillon de Lorenz

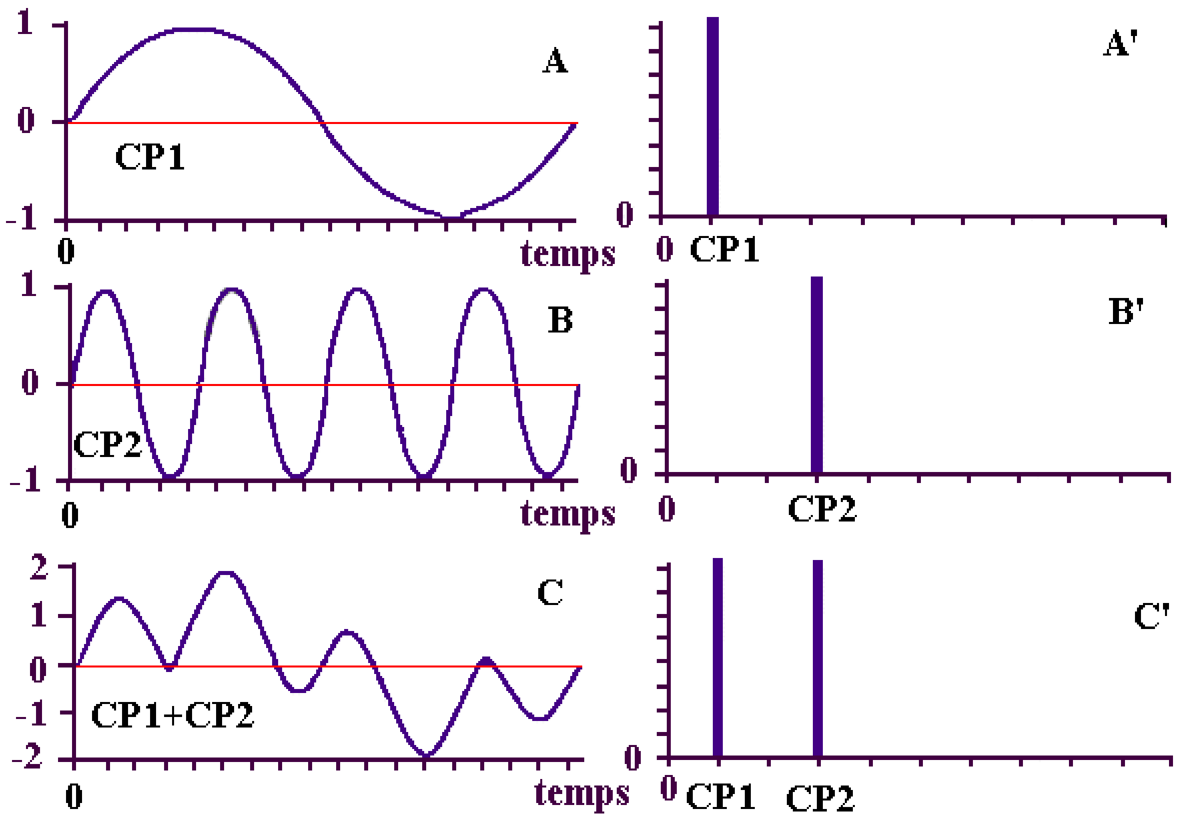
- Analyse spectrale :

L'analyse spectrale est une méthode utilisée en physique pour déterminer les caractéristiques d'un phénomène observé. L'intensité du phénomène en fonction du temps constitue un signal, et ce signal est traité par les mathématiques afin d'en extraire des caractéristiques, ces caractéristiques donnant des informations sur le phénomène.

Ici, on s'intéresse à une caractéristique du signal appelée spectre et que l'on peut observer avec un analyseur de spectre. La branche des mathématiques correspondante est traditionnellement appelée analyse harmonique (Dans plusieurs domaines, une harmonique est un élément constitutif d'un phénomène périodique ou vibratoire (par exemple...).

On désigne ainsi l'ensemble des méthodes que l'on utilise pour mettre en évidence les composantes périodiques (c'est à dire obéissant à des cycles) présentes dans une courbe. L'intérêt de cette analyse est donc d'éliminer les bruits qui perturbent la lecture du signal (climatique, par exemple) dont témoigne une courbe, et de distinguer les différents éléments qui interfèrent dans la composition de ce signal.

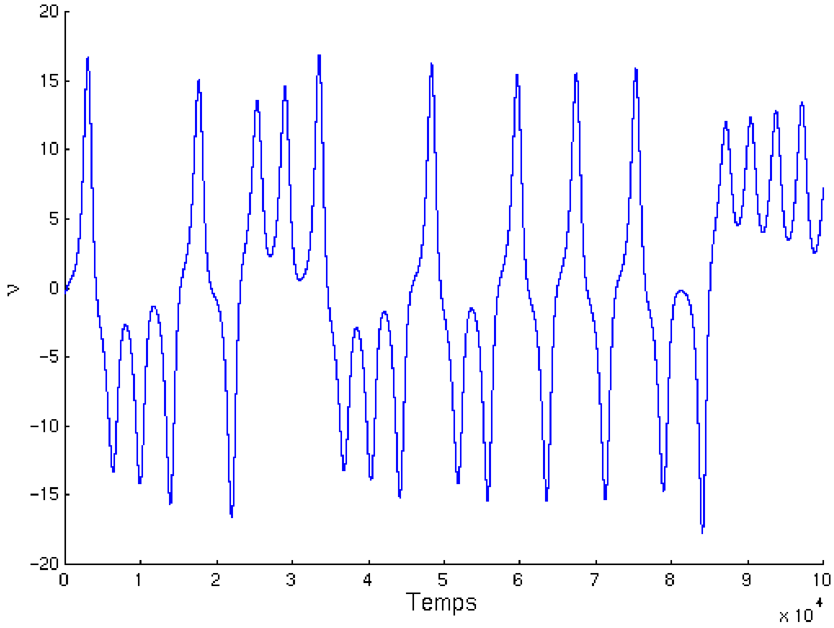
La transformation de Fourier est l'une des méthodes utilisées fréquemment en analyse spectrale



Elle permet de reconnaître toutes les composantes périodiques (CP) présentes dans une courbe. Dans l'exemple ci-dessus, les courbes A et B sont caractérisées chacune par une composante périodique de fréquence différente mais de même amplitude. La courbe C, qui résulte de la combinaison de deux cycles différents, est caractérisée par deux composantes périodiques. (D'après A. Foucault, 1993, modifié).

→ Evolution dans le temps du système de Lorenz :

L'évolution dans le temps d'un tel système est chaotique. On peut le "constater" intuitivement grâce à la courbe suivante.



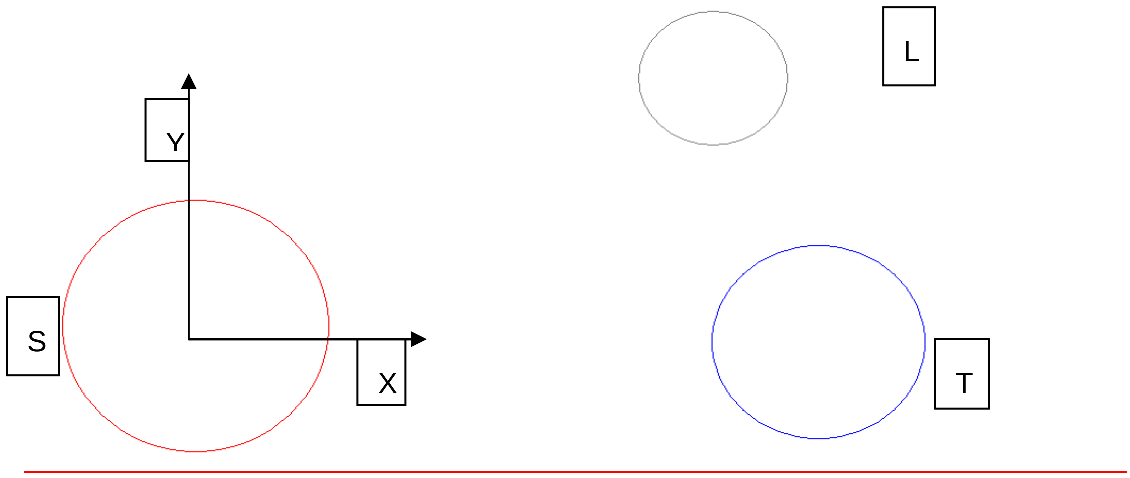
Evolution dans le temps de la première coordonnée du système.

1.3. Application de la théorie du chaos sur le système Soleil-Terre-Lune :

1.3.1. Mise en équation du système :

Suite à notre étude du système de Lorenz et la programmation sur Scilab du plan de Poincaré afin d'observer les points de passage par ce plan, ainsi que la technique du premier retour, nous avons décidé d'étudier le système Soleil-Terre-Lune.

Définition du système :



Nous avons placé notre système dans un espace de deux dimensions (X pour les abscisses et Y pour les ordonnées). Le centre de notre repère est placé au centre du Soleil plaçant ainsi le Soleil aux coordonnées Xs=0 et Ys=0 pour notre système. On détermine ensuite les coordonnées de la terre et de la lune dans ce repère.

Etude des interactions :

Les interactions entre ces trois objets sont des forces attractives. On applique le principe fondamental de la dynamique pour la Lune, la Terre et le Soleil. Dans tous les calculs qui suivront, m_t représente la masse de la terre, m_l celle de la lune, m_s du soleil et G la constante de gravitation.*

→ <u>*Cas de la Terre :*</u>

$$m_t \vec{a_t} = -(Gm_t m_s)\vec{TS}/TS^3 - (Gm_t m_l)\vec{TL}/TL^3$$

On transpose ensuite suivant X et suivant Y:

$$\ddot{x}_t = -Gm_s(x_s-x_t)\,/(x_t^2+y_t^2)^{3/2} - Gm_l(x_l-x_t)/[(x_l-x_t)^2+(y_l-y_t)^2]^{3/2}$$

$\ddot{y}_t = -Gm_s(y_s-y_t) /(x_t^2+y_t^2)^{3/2} - Gm_l(y_l-y_t)/[(x_l -x_t)^2+(y_l -y_t)^2]^{3/2}$

On note que x_s et y_s sont nulles puisque ces deux coordonnées correspondent aux coordonnées du soleil, centre du repère.

→ <u>*Cas de la Lune :*</u>

$m_l \, \vec{a}_l = - (Gm_l m_s)\vec{LS}/LS^3 \; - = - (Gm_l m_l)\vec{LT}/LT^3$

$\ddot{x}_l = -Gm_s(x_s-x_l) /(x_l^2+y_l^2)^{3/2} - Gm_t(x_t-x_l)/[(x_t-x_l)^2+(y_t-y_l)^2]^{3/2}$

$\ddot{Y}_l = -Gm_s(y_s-y_l) /(x_l^2+y_l^2)^{3/2} - Gm_t(y_t-y_l)/[(x_t-x_l)^2+(y_t-y_l)^2]^{3/2}$

Nous avons ensuite retranscrit ces équations dans la programmation de Scilab. Pour se faire, on utilise la méthode suivante :

On fixe un $\vec{X} = \left| \begin{array}{ll} x_l & (1) \\ y_l & (2) \\ x_t & (3) \\ y_t & (4) \\ \dot{x}_l & (5) \\ \dot{y}_l & (6) \\ \dot{x}_t & (7) \\ \dot{y}_t & (8) \end{array} \right.$ On pose ensuite $d\vec{X}/dt = f(t,\vec{X})$:

$$d\vec{X}/dt = \left| \begin{array}{l} \dot{x}_l = X(5) \\ \dot{y}_l = X(6) \\ \dot{x}_t = X(7) \\ \dot{y}_t = X(8) \\ \ddot{x}_l = Gm_s(-X(1)) /(X(1)^2+X(2)^2)^{3/2} \\ + Gm_t(X(3)-X(1))/[(X(3)-X(1))^2+(X(4)-X(2))^2]^{3/2} \\ \ddot{y}_l = Gm_s(-X(2)) /(X(1)^2+X(2)^2)^{3/2} \\ + Gm_t(X(4)-X(2))/[(X(4)-X(2))^2+(X(3)-X(1))^2]^{3/2} \\ \ddot{x}_t = Gm_s(-X(3)) /(X(3)^2+X(4)^2)^{3/2} \\ + Gm_l(X(1)-X(3))/[(X(1)-X(3))^2+(X(2)-X(4))^2]^{3/2} \\ \ddot{y}_t = Gm_s(-X(4)) /((3)^2+X(4)^2)^{3/2} \\ + Gm_l(X(2)-X(4))/[(X(1)-X(3))^2+(X(2)-X(4))^2]^{3/2} \end{array} \right.$$

Après cette programmation, les premiers problèmes se sont posés :

Quelles positions initiales faut-il prendre pour nos trois corps ?

Quelles vitesses initiales ?

Par cette étude, nos calculs s'étendent sur plusieurs années pouvant même aller jusqu'à des millions d'années. Il y a donc des soucis possibles de numérisation sur Scilab.

Pour résoudre ces problèmes, nous avons décidé de commencer notre étude par réduire notre système à 2 corps en posant $m_l = 0$. De plus, on a retiré les parties d'équations concernant les forces exercées par la lune, soit :

$$
d\vec{X}/dt = \left|\begin{array}{l}
\dot{x}_l = X(5) \\
\dot{y}_l = X(6) \\
\dot{x}_t = X(7) \\
\dot{y}_t = X(8) \\
\ddot{x}_t = Gm_s(-X(3)) /(X(3)^2+X(4)^2)^{3/2} \\
\ddot{y}_t = Gm_s(-X(4)) /((3)^2+X(4)^2)^{3/2}
\end{array}\right.
$$

Nous avons donc obtenu le programme suivant :

```
clear

function dz = derivation(t,z)
 dz=zeros(8,1);

dz(1)=z(5);
dz(2)=z(6);
dz(3)=z(7);
dz(4)=z(8);

dz(5)=((G*ms*z(1))/(z(1)^2+z(2)^2)^(3/2))-((G*mt*(z(3)-z(1)))/((z(3)-z(1))^2+(z(4)-z(2)^2)^(3/2)));
dz(6)=((G*ms*z(2))/(z(1)^2+z(2)^2)^(3/2))-((G*mt*(z(4)-z(2)))/((z(4)-z(2))^2+(z(3)-z(1)^2)^(3/2)));
dz(7)=((G*ms*z(3))/(z(3)^2+z(4)^2)^(3/2))-((G*ml*(z(1)-z(3)))/((z(1)-z(3))^2+(z(2)-z(4)^2)^(3/2)));
dz(8)=((G*ms*z(4))/(z(3)^2+z(4)^2)^(3/2))-((G*ml*(z(2)-z(4)))/((z(2)-z(4))^2+(z(1)-z(3)^2)^(3/2)));

endfunction

G=6,67428;
ms=1,9891x10^30;
mt=5,9736x10^24;
//ml=7,349x10^22;
ml=0;
z0=[152100000000+384000000,0,152100000000,0,0,0,0,29280]';

Duree=100;
Nbpoints=10000;
T0=0;
Temps=[0:Duree/(Nbpoints-1):Duree];


EvoZ=ode(z0,T0,Temps,derivation);


plot2d(EvoZ(3,:),EvoZ(4,:))
```

Note: $Z0=[\, x_l , y_l , x_t , y_t , \dot{x}_l , \dot{y}_l , \dot{x}_t , \dot{y}_t \,]$

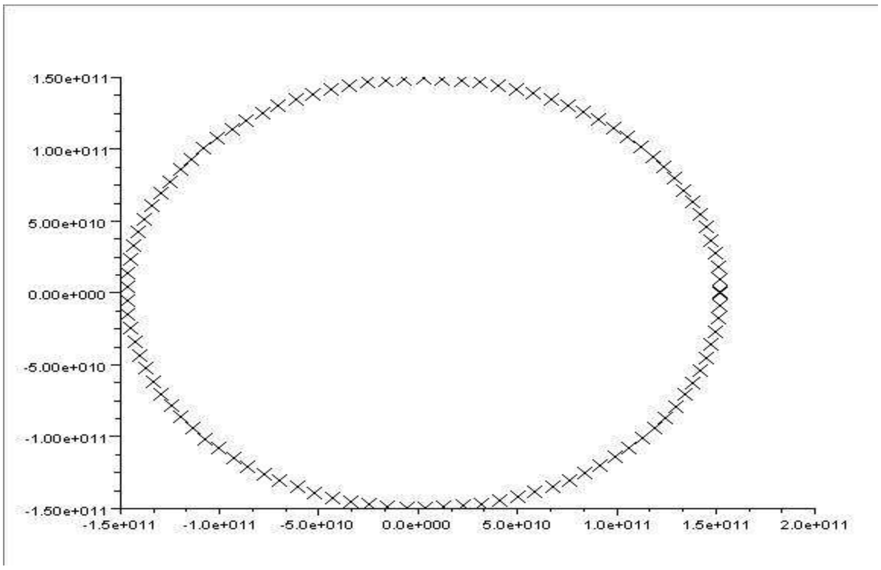
x_t = distance terre-soleil = 152 millions de km.

x_l = distance terre-soleil + distance terre-lune = 152 millions + 3.84 millions de km.

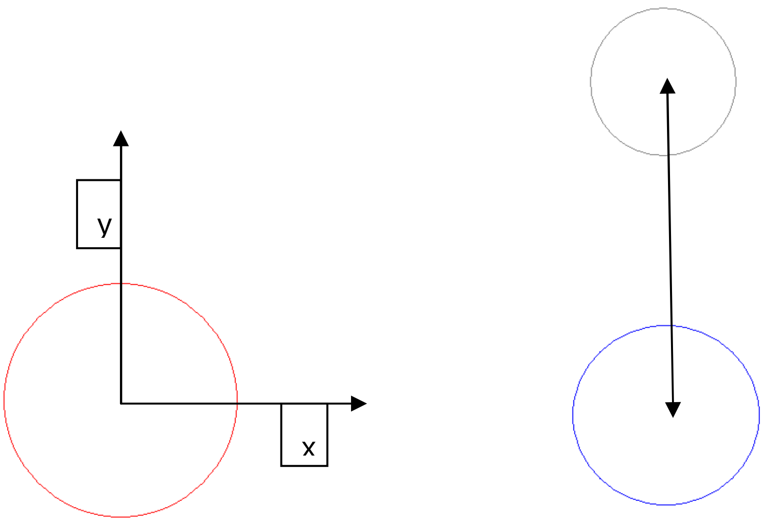
$y_t = y_l = 0$

$\dot{x}_t = \dot{x}_l = \dot{y}_l = 0$

$\dot{y}_t$= 2 x π x 150 000 000 /365 x 24 x 3600 = 29,280 km/s

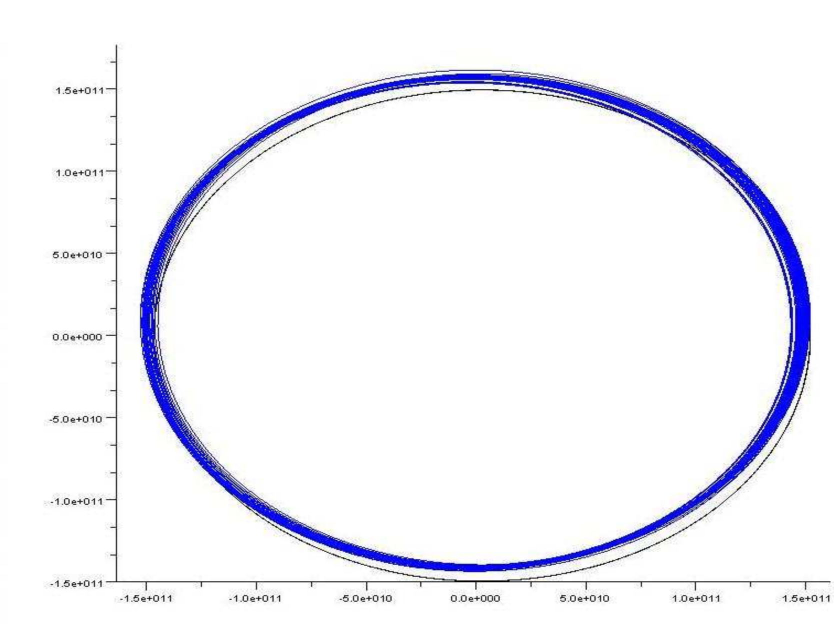


Après obtention des résultats, on a réinséré les données concernant la Lune. On a donc le soleil, la terre et la lune alignés sur l'axe des abscisses. Cependant, les résultats n'étaient pas satisfaisants. Monsieur Yon nous a donc proposé d'autres positionnements initiaux de nos 3 corps :



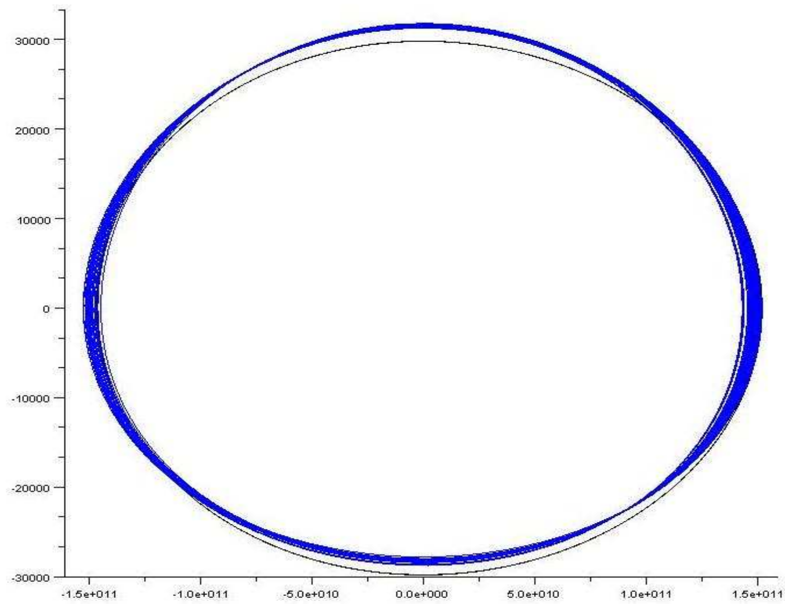
On a désormais, x_t = x_l = distance terre soleil, y_t = 0 et y_l = distance terre lune. Notre référentiel est toujours centré sur le centre de gravité du soleil. Cette fois-ci, nous avons obtenu les résultats suivants :

Trajectoire de la terre et la lune autour du soleil dans l'espace physique :

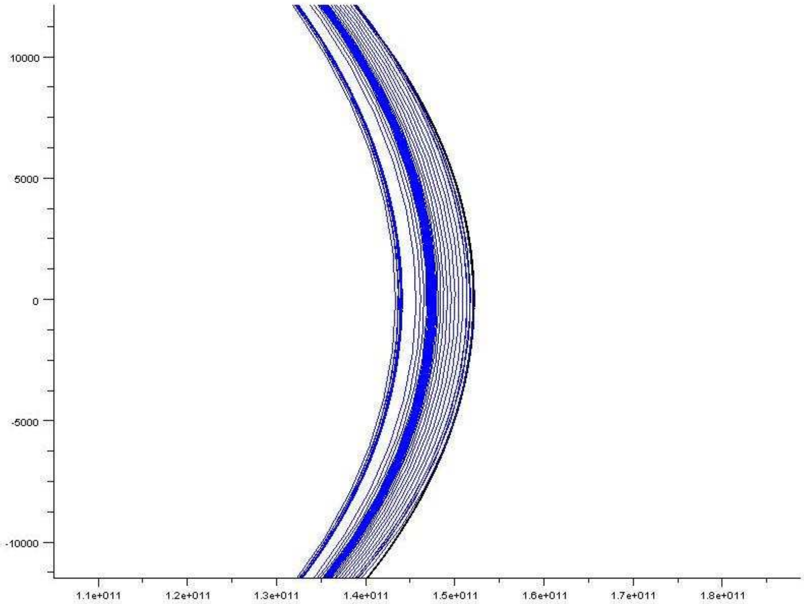


La trajectoire de la lune est ici modélisée en bleu. On remarque que les apogées et périgées de cette dernière et de la terre changent avec le temps.

Trajectoire de la terre et la lune autour du soleil dans l'espace des phases (vitesse en y) :

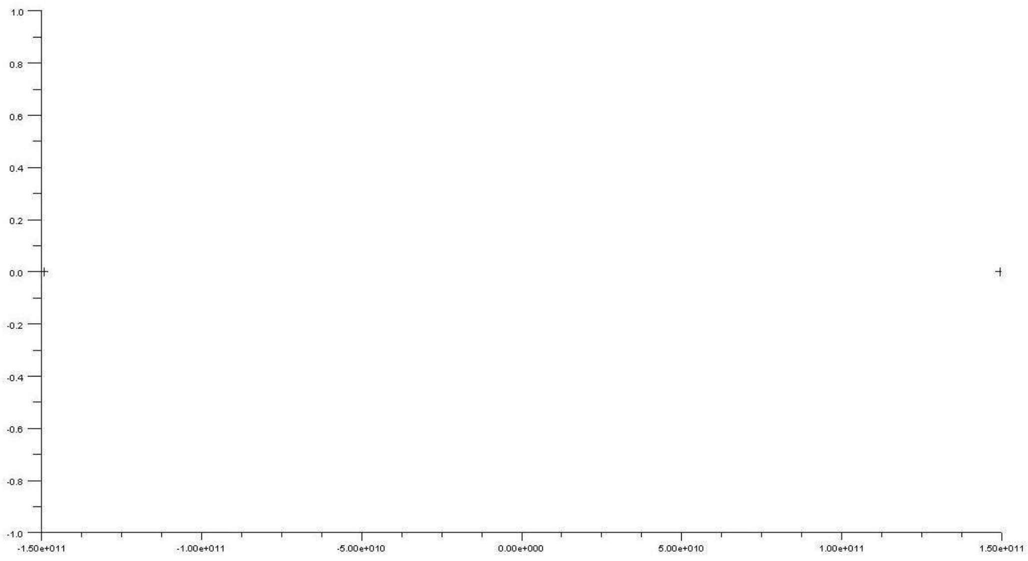


Zoom sur la courbe de la trajectoire de la Terre et de la Lune dans l'espace des phases:

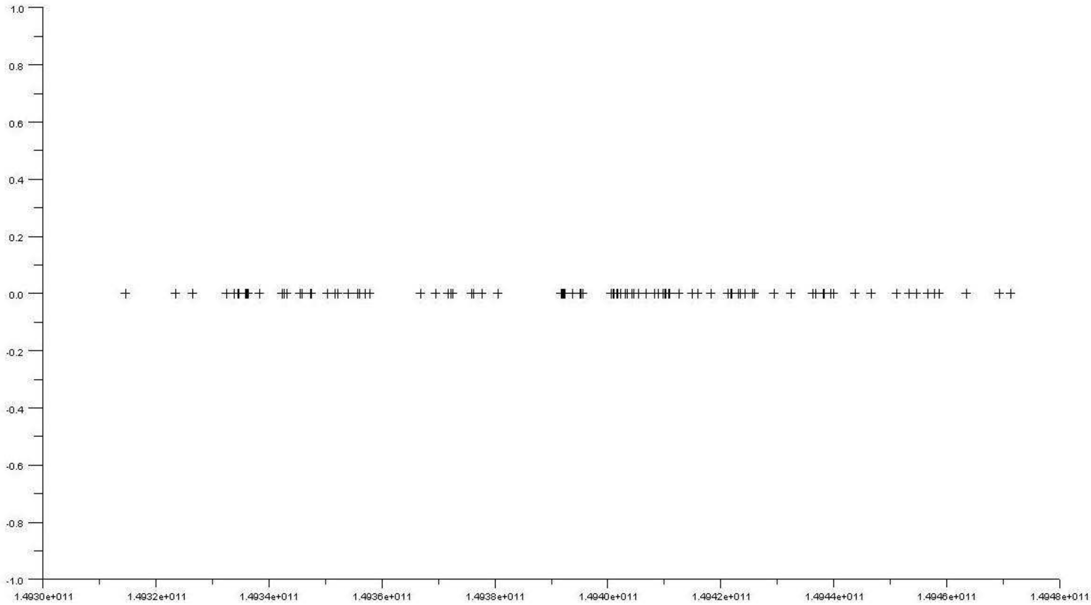


Grâce au zoom on voit plus nettement les variations

Plan de Poincaré pour la Terre :

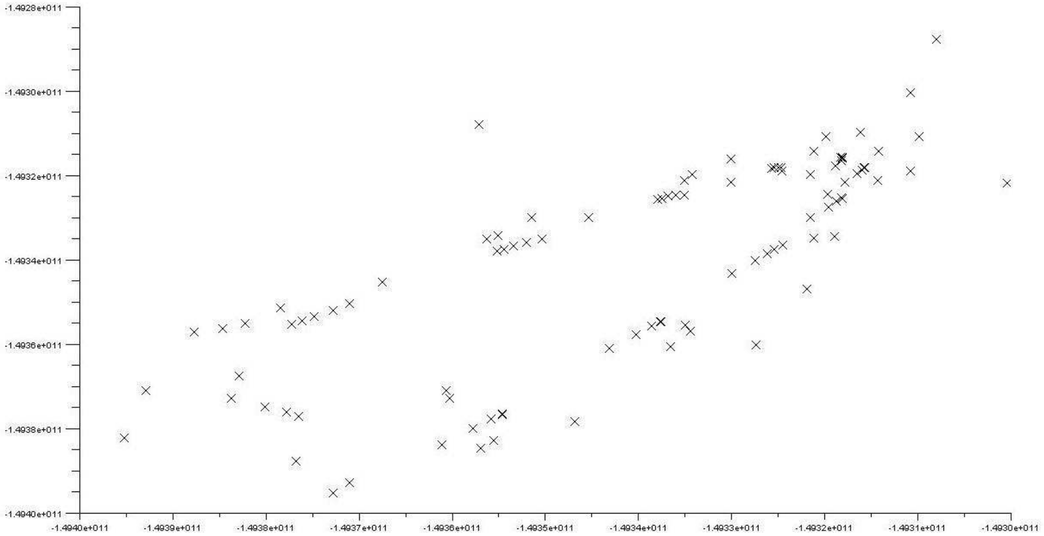


Zoom sur le plan de Poincaré (points positifs) :



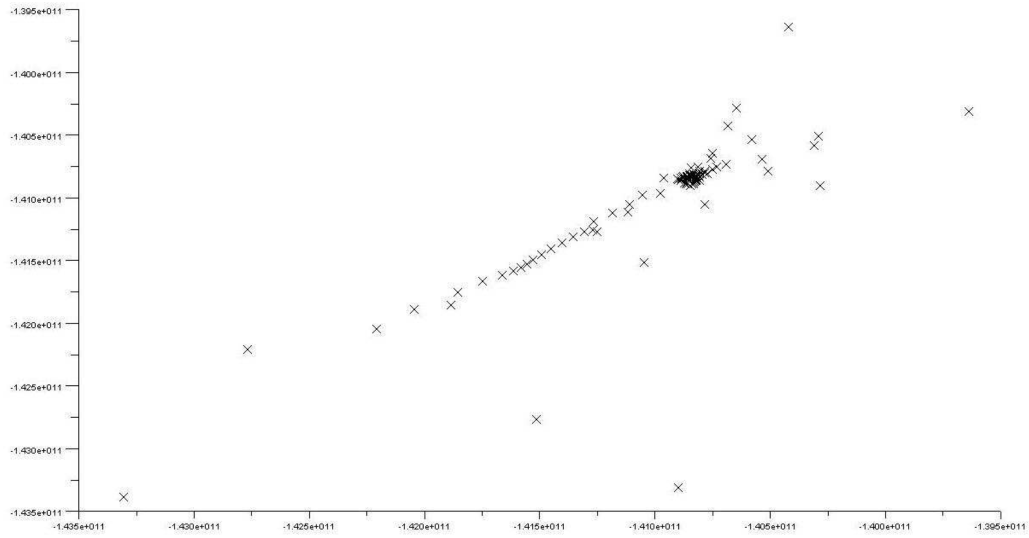
On voit bien ici les différentes positions que prend la terre au fil du temps et qui retranscrivent un certain caractère chaotique de sa rotation autour du soleil.

Application de premier retour pour la terre :



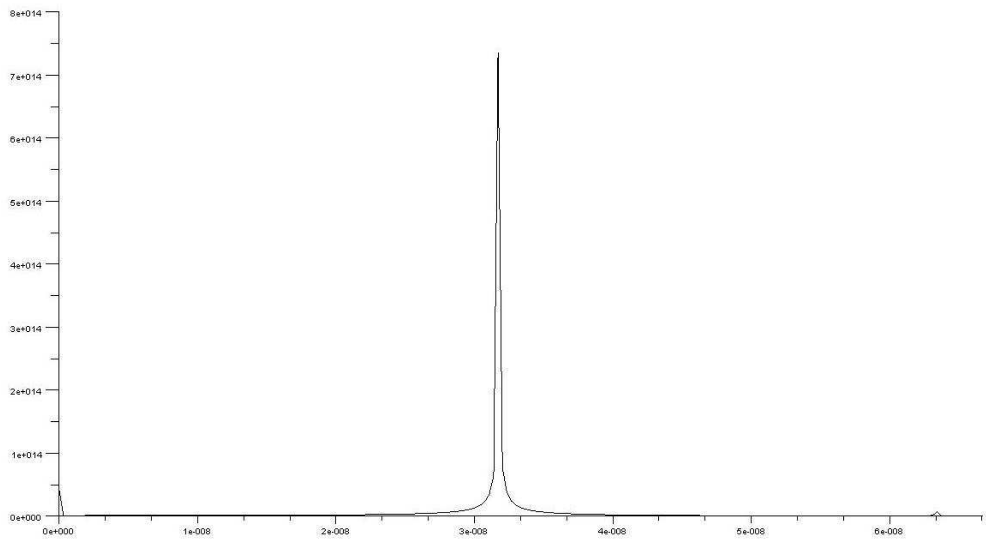
Cette figure retranscrit le chaos propre à la trajectoire de la terre autour du soleil

Application de premier retour pour la lune :



Ici, les points tendent à former une droite, ce qui montre que le chaos est toujours présent, mais moins exprimé.

Analyse de Fourier :



Cette figure est une autre preuve de l'existence de chaos. En cas d'inexistence de chaos, la courbe aurait la forme d'une droite, or on peut nettement voir à la base du pic la présence de chaos.

Ce résultat, néanmoins, a soulevé quelques doutes sur son authenticité. En effet, il nous a paru étrange que la lune, après une demi période, s'éloigne autant de la Terre (dans l'espace physique).

1.3.2. Les difficultés rencontrées :

A ce niveau du projet, nous commencions à rencontrer quelques difficultés liées au système des trois corps. Scilab nous retournait assez fréquemment des erreurs de programmation lorsque nous tentions d'appliquer au dit système le plan de Poincaré ou l'application de premier retour, et à cela s'ajoutait le problème de véracité de la trajectoire de la terre et de la lune autour du soleil. Après concertation du groupe, nous avons entrepris la révision de tout le programme, c'est-à-dire la vérification de chaque équation différentielle ainsi que l'exactitude de toutes les constantes (masse et rayon de la terre, de la lune et du soleil, la constante gravitationnelle, etc). Et effectivement, nous avions commis quelques erreurs concernant l'homogénéité des constantes utilisées, les équations étant toutes correctes. Cependant, après rectification, la lune n'avait toujours pas de trajectoire qui paraissait « réaliste ». Nous nous sommes alors demandé si le système que nous avions choisi d'étudier était bel et bien approprié. En effet, quand notre choix s'est porté sur ce système des trois corps, nous n'avions pas cherché à vérifier sa faisabilité, cette dernière nous paraissant tomber sous le sens, le programme Scilab gérant parfaitement le calcul des équations différentielles et l'affichage des courbes représentatives des solutions. Nous avons donc fait quelques recherches et nous est alors apparu toute la difficulté du problème auquel nous nous étions attaqués. En effet, bien que le système à deux corps soit entièrement soluble analytiquement, un système à N corps reste impossible à résoudre de façon aussi exacte, et seules des solutions approchées peuvent être trouvées. Il existe pourtant bien une solution analytique exacte au problème à trois corps, mais elle se présente sous la forme d'une série infinie qui converge très lentement, devenant ainsi inutile en pratique pour faire des prédictions en un temps raisonnable.

Cette découverte nous a autant déçus que réconfortés. Nous étions bien sûr quelque peu déçus d'apprendre que notre entreprise de représenter la réelle rotation de la terre et de la lune autour du soleil était vouée à l'échec, mais nous étions tout aussi ravis de réaliser que la principale raison des multiples problèmes que nous avions rencontrés était la nature même du phénomène auquel nous nous étions intéressés et que nous avions néanmoins réussi à obtenir des résultats satisfaisants.

2. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le semestre durant, la nature de notre travail n'a cessé d'évoluer. Ainsi, nous avons commencé par nous intéresser à la notion de chaos en général, avant de nous documenter de façon plus précise sur les différents éléments qui entrent dans son étude. Nous avons aussi eu la chance de pouvoir compter sur le précieux témoignage de deux des élèves ayant traité le même sujet que nous l'année dernière, Martin Rosalie et Selima Masmoudi, ainsi que leur tout aussi précieux soutien. Nous avons ensuite appris les bases de la programmation sur le logiciel Scilab, que nous avons progressivement maitrisé au fur et à mesure des séances. Nous avons donc étudié le chaos à travers un système connu, celui de Lorenz. Nous avons pu percevoir les subtilités qui s'en dégagent, et ce grâce à différents procédés tels que le plan de Poincaré, ou l'analyse de Fourier. Subtilités qui émergent spécialement dans l'espace des phases, et qui montrent bien que dans le chaos, on peut trouver un certain ordre. Nous avons cherché à appliquer ce que nous avions fraichement appris à un système original, celui des trois corps : Soleil-terre-lune. Bien que n'ayant pas réalisé notre objectif premier, nous sommes arrivés à des résultats tout à fait corrects et satisfaisants, compte tenu des conditions qui étaient les nôtres.

Ce projet nous a permis de nous accomplir, et ce sur différents niveaux. Le travail de groupe a constitué une réelle motivation et un réel moteur. Les rôles ont été définis dès le début, ce qui a permis à chacun de se concentrer sur le projet sous un angle qui lui était propre. Des réunions de groupe étaient effectuées régulièrement, ce qui nous permettait de partager nos points de vue et nos idées, mais aussi de mettre en commun nos travaux respectifs afin que chacun ait au final une même vison du projet. Le sujet choisi, les difficultés et les complications rencontrées pendant son étude ainsi que sa résolution finalement inapplicable car inadéquate et sortant du sujet nous ont permis entre autre d'apprendre à gérer les imprévus, à ne pas baisser les bras même si le problème parait insurmontable, et à savoir tirer profits des enseignements inculqués quand on sait le problème insurmontable.

3. BIBLIOGRAPHIE

[1] http://www.12manage.com/methods_lorenz_chaos_theory_fr.html (valide à la date du 10/06/2009).

[2] http://vivienmallet.net/chaos/lorenz.php (valide à la date du 10/06/2009).

[3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_du_chaos (valide à la date du 10/06/2009).

[4] MOON Francis C, “chaotic and fractal dynamics”, New York Wiley, 1992.