

Hauteur d'un panache dans un milieu stratifié



Étudiants :
Nathanaël COVIAUX
Sarah MAZZOUZ
Juliette PHILIPPE
Matthieu REVIL

Enseignant-responsable du projet :
Samuel PAILLAT

Date de remise du rapport : 15 juin 2020

Référence du projet : STPI/P6/2020 – 37

Intitulé du projet : Hauteur d'un panache dans un milieu stratifié

Type de projet : recherches, modélisation et calculs

Objectifs du projet :

- modéliser un milieu stratifié
- définir les équations régissant les mouvements d'un panache
- résoudre numériquement ces équations différentielles
- déterminer la hauteur d'un panache dans l'atmosphère

Mots-clés du projet : panache, atmosphère, masse volumique, stratification

Table des matières

Introduction	3
Organisation du travail	4
1 Qu'est-ce qu'un panache ?	5
1.1 Point historique	6
1.2 Modélisation d'un panache	6
1.3 Milieux stratifiés	7
1.3.1 Eau	7
1.3.2 Atmosphère	7
2 Équations de conservation dans un panache turbulent	10
2.1 Modélisation des différents transferts d'air dans un panache	10
2.2 Cas du milieu non stratifié	13
2.2.1 Cas d'une flottabilité initiale nulle : $F_0 = 0$	13
2.2.2 Cas d'une flottabilité initiale non nulle : $F_0 \neq 0$	14
2.2.3 Cas intermédiaires	15
3 Utilisation du code pour des panaches en milieu stratifié	17
Conclusion et perspectives	20
Annexes	21

Introduction

Effectuer une étude sur un projet dans le domaine de la physique a tout son intérêt dans une formation ingénieur. D'une part pour nous exercer à travailler en équipe, d'autre part pour nous apprendre à nous intéresser à des sujets inconnus.

Ce projet vise à déterminer la hauteur d'un panache dans un milieu stratifié. Nous allons commencer par décrire brièvement les termes de ce sujet.

Tout le monde a déjà vu d'impressionnantes photos de volcans qui, après leur éruption, dégagent un large panache de fumée s'élevant peu à peu dans le ciel. Un panache est défini comme une masse d'air ou une colonne de fluide différentiable du milieu ambiant qui peut être un milieu stratifié. Ce fluide se différencie par sa température, sa composition, sa densité. Cela peut-être un panache de fumée issu d'un incendie, d'une éruption volcanique mais aussi un flux d'humidité ou un courant marin. On caractérise cette masse d'air par sa quantité de mouvement et sa flottabilité.

Un milieu stratifié est un espace composé de couches distinctes. Souvent la transition d'une couche à une autre est continue et progressive. Elles se différencient par leur pression et leur température ainsi que par leur salinité pour les mers et océans. Dans notre environnement nous pouvons observer plusieurs milieux stratifiés : l'atmosphère, les mers et les océans en sont les principaux. Pour réaliser cette étude, nous avons utilisé un modèle simplifié que nous expliciterons dans la suite de ce rapport.

Lors de ce projet, nous nous sommes appuyés sur des travaux théoriques et expérimentaux sur les jets chauds et les panaches turbulents qui ont commencé au début des années 1940 et qui ont continué avec les recherches de MORTON et ses collègues au sujet des phénomènes d'entraînement et de mélanges générés par les panaches. Nous avons fait l'hypothèse que le panache ralentit quand sa densité est égale à celle du milieu qui l'entoure et s'arrête lorsque sa vitesse devient nulle. Nous allons modéliser numériquement le comportement d'un panache selon différents paramètres.

Dans un premier temps nous allons tenter de définir les panaches et les milieux stratifiés. Ensuite, nous déterminerons les équations de conservation dans un panache turbulent. Enfin, nous modéliserons numériquement le comportement d'un panache en milieu stratifié sous Python.

Toutes les variables et constantes ainsi que leur unité utilisées sont répertoriées dans le glossaire en annexe.

Organisation du travail

Tout au long de ce projet, nous avons été encadrés par M. PAILLAT, professeur et chercheur à l'INSA de Rouen.

Pour réaliser le travail nécessaire à ce projet, nous nous sommes répartis les objets d'étude. Dans un premier temps, nous avons tous effectué des recherches afin de nous approprier au mieux le sujet. Sarah et Matthieu se sont penchés sur la description physique d'un panache turbulent. Ils l'ont retravaillée ultérieurement avec le tuteur, M. PAILLAT. Ensuite, Sarah et Nathanaël se sont penchés sur les équations différentielles régissant le mouvement des panaches. Matthieu et Juliette ont fait des recherches plus approfondies sur les milieux stratifiés et la manière de les mettre en œuvre. Sarah et Nathanaël ont cherché à établir un code sur Python permettant de résoudre les équations de mouvement. Matthieu a travaillé sur l'évolution de la masse volumique dans un milieu stratifié. Juliette s'est occupée de mettre en forme le rapport du projet et le poster. Elle a aussi réalisé une expérience sur les milieux stratifiés que vous pourrez retrouver en annexe.

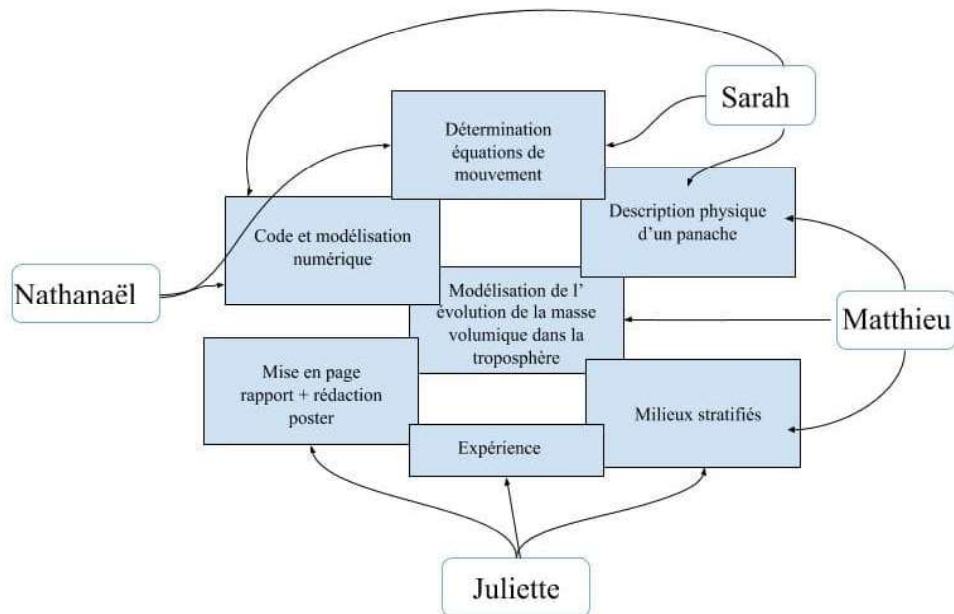


FIGURE 1 – Organisation du travail

Chapitre 1

Qu'est-ce qu'un panache ?



FIGURE 1.1 – Panache volcanique



FIGURE 1.2 – Panache d'incendie



FIGURE 1.3 – Panache d'explosion

1.1 Point historique

Comme énoncé dans l'introduction, dès le début des années 1940, des physiciens se sont penchés sur l'étude théorique et expérimentale des jets chauds et des panaches turbulents. En 1956, Morton et ses collègues étudient les phénomènes d'entraînement et de mélanges générés par les panaches, la notion d'entraînement est essentielle lorsque l'on étudie les panaches turbulents. De nombreux scientifiques ont repris ces travaux en apportant des améliorations au fur et à mesure des années. Si les études des panaches laminaires sont aujourd'hui nombreuses, celles sur les panaches turbulents sont plus rares. Bien souvent, les modélisations de ces panaches turbulents correspondent à celles de jets en milieu homogène auxquels on ajoute les contraintes liées aux effets de gravitation.

Remarque : Un panache est une masse d'air qui se différencie du milieu qui l'entoure par ses paramètres (sa masse volumique, sa température, etc.). Il évolue en fonction de sa quantité de mouvement et de sa flottabilité. On appelle jet un panache particulier dont la flottabilité est nulle.

Les panaches de fumée peuvent être d'origine diverse : naturelle ou induite par l'Homme. Les éruptions volcaniques, notamment explosives, sont très souvent accompagnées de panaches de fumée dits "panaches volcaniques". D'importants panaches de fumée peuvent aussi être observés au dessus des raffineries lorsque des problèmes techniques ponctuels obligent les techniciens à évacuer les gaz sous forme de "torche" provoquant ainsi l'apparition d'un panache de fumée. Nous pouvons citer l'exemple de la raffinerie de Total à Donges ou, plus proche encore de l'INSA, celle d'ExxonMobil à Notre-Dame-de-Gravenchon. Les feux de forêt sont aussi à l'origine d'importants panaches. Les "méga-feux" peuvent créer des panaches de fumée pouvant s'élever sur une dizaine de kilomètres d'altitude. En juillet 2017, au Canada, un "méga-incendie" s'est déclaré et a généré des fumées si importantes qu'elles s'élèvent jusque dans la stratosphère, éclipsant même la lumière du soleil. Il peut d'ailleurs y avoir des effets sur le climat avec une diminution des températures sur une période plus ou moins longue.

1.2 Modélisation d'un panache

Un panache est défini comme une masse d'air ou encore une colonne de fluide différentiable de l'air ambiant au niveau de sa température et de sa composition. Cette masse d'air évolue en fonction de sa quantité de mouvement et de la flottabilité.

Dans sa thèse, Antoine MOS définit le panache comme "[...] un écoulement instable généré par la présence d'une source de flottabilité [...] il peut s'agir de toute source de fluide de masse volumique différente de celle du fluide ambiant". La différence entre panache et jet provient de la différence du phénomène moteur de l'écoulement, soit par la flottabilité pour le panache ou par la quantité de mouvement pour le jet.

Lorsque l'on prend en compte la viscosité et les écoulements visqueux, nous sommes en présence d'un panache laminaire. Lorsque la vitesse du panache et le nombre de Reynolds augmentent, on assiste à l'apparition de nombreux tourbillons de toutes tailles. On passe alors d'un panache laminaire à un panache turbulent. Lors de notre étude nous nous pencherons sur le cas des panaches turbulents. Les tourbillons issus de ces panaches conditionnent la turbulence ou encore l'entraînement. La turbulence est modélisée au niveau macroscopique par le coefficient d'entraînement que nous noterons α dans la suite de ce rapport. Nous ne nous intéresserons pas à la modélisation microscopique de ce phénomène.

Remarque : La flottabilité est une force exercée par un fluide (ici, l'air) dans le sens opposé à la gravitation (vers le haut). La quantité de mouvement est une grandeur physique associée à la vitesse et à la masse d'un objet, ici le panache.

Il existe deux principaux types de panaches : les panaches "dynamiques" ou jets, initiés par la quantité de mouvement, présents après une explosion par exemple et les panaches dits "thermiques" qui s'observent lors de l'introduction, dans un environnement, d'un fluide plus chaud que cet environnement. Ces panaches évoluent notamment grâce à la flottabilité.

De manière générale, lorsque le panache s'éloigne de son origine, il va s'élargir grâce au phénomène d'entraînement. Ce phénomène s'explique par la "capture de la partie externe de colonne de fluide dans l'air environnant". Les mouvements atmosphériques verticaux ou horizontaux, autrement appelés "courants aériens", conditionnent également la forme du panache. Avec le rassemblement de ces effets extérieurs, un panache évoluant grâce à la flottabilité se transforme en un autre panache dominé par la quantité de mouvement. Cela peut être l'inverse dans certains cas comme les panaches volcaniques qui initialement ont une flottabilité négative et ont besoin d'une quantité de mouvement pour pouvoir s'élever. Ici, on s'intéressera aux panaches possédant une flottabilité nulle ou positive.

Afin de réaliser notre étude, nous avons choisi de modéliser le panache de manière simplifiée. Dans cette optique, plusieurs hypothèses ont été faites : l'air de l'atmosphère est considéré immobile, nous négligeons donc

les effets du vent. Nous considérerons l'air parfaitement sec, c'est-à-dire uniforme et sans variation d'humidité. L'air peut être assimilé à un gaz parfait.

1.3 Milieux stratifiés

Le mot stratification est issu de "strate" qui signifie couche. Ainsi un milieu stratifié est un milieu composé de différentes couches distinctes superposées. Il existe deux principaux milieux stratifiés : l'atmosphère et l'eau. Ces deux milieux sont stratifiés verticalement.

1.3.1 Eau

Dans le cas des mers et océans, les couches se différencient par leur salinité, leur température, leur pression et leur profondeur.

Vous pourrez retrouver une expérience dans l'eau en annexe.

Ici, nous allons particulièrement nous intéresser à l'atmosphère.

1.3.2 Atmosphère

Dans le cas de l'atmosphère, les couches se différencient par leur température, leur pression et leur altitude.

L'atmosphère est formée de plusieurs couches superposées que l'on distingue notamment par leur température. Mais, au sein de chaque couche, la température et la pression varient de manière progressive avec l'altitude comme nous le montre le schéma ci-dessous :

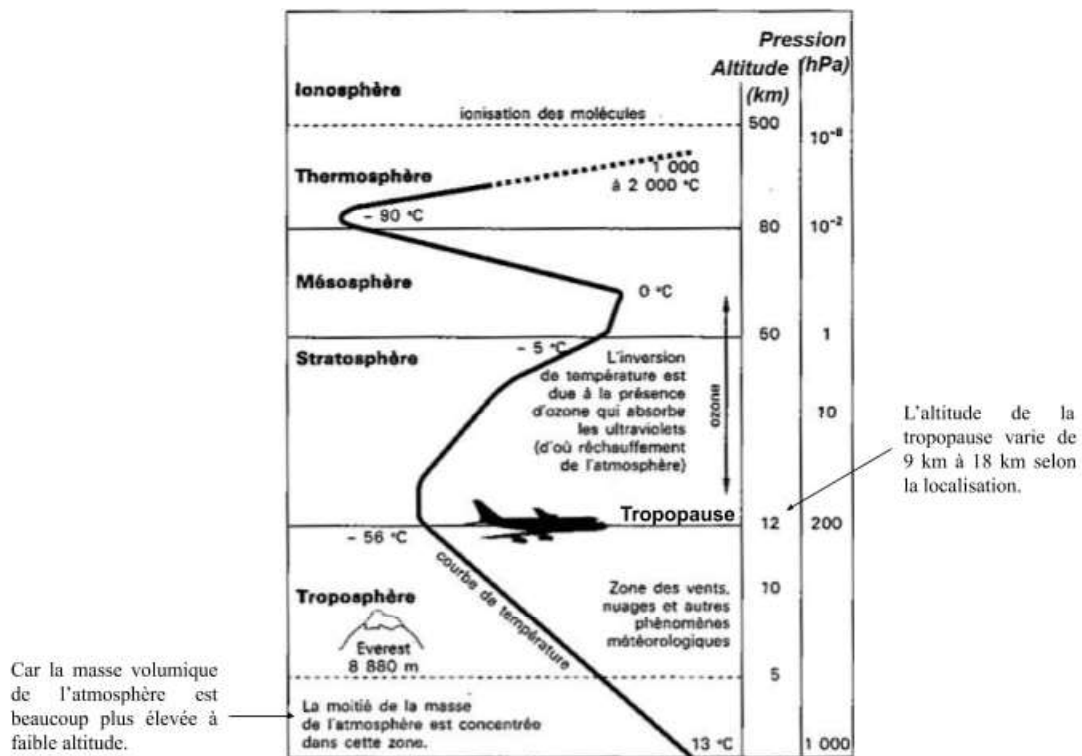


FIGURE 1.4 – Modélisation de l'atmosphère

Comme nous le voyons sur le document ci-dessus, l'atmosphère n'est pas isotherme, mais cela a-t-il réellement une incidence sur la masse volumique de cette dernière ? C'est ce à quoi nous allons répondre immédiatement.

Nous avons fait l'hypothèse que le panache atteignait sa hauteur maximale dans l'atmosphère puis ralentissait lorsque sa densité était égale à celle du milieu qui l'entoure, jusqu'à s'arrêter. Nous cherchons alors à calculer la densité de l'air dans l'atmosphère.

Exprimons la densité de l'air en fonction de son altitude dans l'atmosphère considérée isotherme. On considère que l'atmosphère se comporte comme un gaz parfait. Nous nous plaçons dans les conditions standards de

température et de pression définies par le National Institute of Standards and Technology (NIST) telles que $T(0) = 293,15 K$ et $P(0) = 1,01325 \times 10^5 Pa$.

Nous allons dans un premier temps considérer l'atmosphère comme isotherme puis dans un second temps comme non isotherme.

Si l'atmosphère est isotherme, nous partons de l'équation de la statistique des fluides $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g$ avec l'axe O_z verticalement ascendant. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\rho g = -\frac{1}{T} \times \frac{PM}{R} g = -\frac{Mg}{R} \times \frac{P}{T} \\ \Rightarrow P \times -\frac{Mg}{RT} - \frac{dP}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

Résolvons maintenant l'équation différentielle en découlant afin de trouver l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude z .

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} + \frac{MgP}{RT} &= 0 \\ \Rightarrow P(z) &= P(0) e^{-\frac{Mg}{RT}z} \end{aligned}$$

Or, on sait que $P(0) = 1,01325 \times 10^5 Pa$

Finalement, on a $P(z) = 1,01325 \times 10^5 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$, l'expression de P en fonction de z .

Exprimons maintenant la masse volumique de l'atmosphère en fonction de z en utilisant la loi des gaz parfaits.

On sait que : $\rho = \frac{1}{T} \times \frac{P(z)M}{R}$ et $P(z) = 1,01325 \times 10^5 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$

On obtient alors $\rho = \frac{1}{T} \times \frac{1,01325 \times 10^5 e^{-\frac{Mg}{RT}z} M}{R}$

Exprimons la densité de l'air en fonction de son altitude dans l'atmosphère considérée non isotherme. En réalité, dans l'atmosphère la température évolue selon la couche dans laquelle nous nous trouvons et l'altitude à l'intérieur de cette couche. La couche la plus basse de l'atmosphère est la troposphère qui s'étend jusqu'à environ $15 km$ d'altitude selon l'endroit. Étant donné que les panaches démarrent au sol alors nous allons effectuer nos calculs dans cette couche. Or, nous savons qu'à l'intérieur de la troposphère le gradient thermique est de $-6,5 K/km$. Nous allons donc considérer qu'à $0 m$ d'altitude on a $T(0) = 293,15 K$.

Si nous voulons étudier des couches supérieures de l'atmosphère alors il faudra changer l'expression de $T(z)$. En effet, si nous voulons étudier la stratosphère, intéressante de par ses propriétés liées au jet stream, qui est la couche directement supérieure à la troposphère, alors nous aurions $T_{stratosphère}(0) = T_{troposphère}(max)$ et un gradient thermique différent (*environ* $+2 K/km$).

Procédons comme précédemment pour déterminer l'expression de $P(z)$ au sein de la troposphère.

$$\frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT(z)}P = 0$$

On sait que l'on perd $6,5 K/km$ et que $T(0) = 293K$ donc $T(z) = 293 - 6,5 \times 10^{-3}z$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dP}{dz} &= -\frac{MPg}{R \times (293 - 6,5 \times 10^{-3}z)} \\ \Rightarrow \frac{\frac{dP}{dz}}{P} &= -\frac{Mg}{R \times (293 - 6,5 \times 10^{-3}z)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln(P(z)) - \ln(P(0)) = \frac{Mg}{R} \left(\frac{\ln(293 - 6,5 \times 10^{-3} z) - \ln(293)}{6,5 \times 10^{-3}} \right)$$

$$\Rightarrow P(z) = P(0) \times \left(1 - \frac{6,5 \times 10^{-3} z}{293} \right)^{\frac{Mg}{6,5 \times 10^{-3} R}}$$

Nous avons alors l'expression de P en fonction de z.

Exprimons la densité de l'atmosphère en fonction de z à l'aide de la loi des gaz parfaits et des calculs précédents.

$$\rho(z) = \frac{M P(z)}{R T(z)} = \frac{M_{air} P(0) \times \left(1 - \frac{6,5 \times 10^{-3} z}{293} \right)^{\frac{Mg}{6,5 \times 10^{-3} R}}}{R \times (293 - 6,5 \times 10^{-3} z)}$$

Comparons maintenant les résultats obtenus pour les modèles isotherme et non isotherme.

A l'aide d'un tableur nous pouvons comparer ces deux modèles au sein de la première couche de l'atmosphère qu'est la troposphère. La troposphère a une altitude maximale comprise entre 9 km aux pôles et 17 km à l'équateur. Nous étudions donc ces deux modèles entre 0 m et 18000 m d'altitude, une plage suffisamment grande pour encadrer la troposphère sur l'entièreté de la Terre. Nous obtenons donc le graphique suivant.

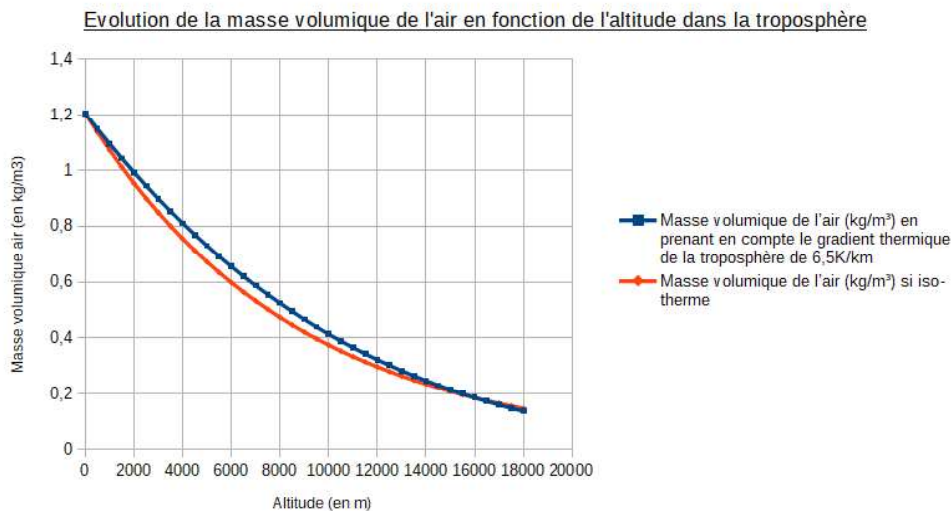


FIGURE 1.5 – Évolution de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude dans la troposphère

Ce graphique nous montre qu'il existe une réelle différence entre ces deux modèles. En utilisant ce même tableur nous pouvons en ressortir un écart absolu moyen de 6,1% entre ces modèles. Cet écart est au maximum de 9,7%. Ces niveaux d'écart ne sont donc en aucun cas négligeables. C'est pourquoi nous ne pouvons pas nous contenter du modèle isotherme et que nous privilégions le modèle non-isotherme qui est plus précis et que nous avons donc ultérieurement utilisé dans l'écriture de notre code.

Remarque : Les valeurs obtenues par ces calculs sont représentatives de l'état moyen de l'atmosphère. Les masses volumiques obtenues sont en effet amenées à varier selon les conditions météorologiques et la latitude du lieu étudié, ces derniers paramètres influençant la température et la pression de l'atmosphère.

Chapitre 2

Équations de conservation dans un panache turbulent

Afin de modéliser au mieux l'évolution d'un panache de fumée dans un milieu non stratifié puis stratifié, nous avons tout d'abord besoin de trouver les 3 équations de conservation nécessaires à la modélisation. Elles permettent de prévoir différents paramètres tels que les trajectoires, les concentrations, les vitesses ou encore le rayons en fonction de l'altitude du panache.

2.1 Modélisation des différents transferts d'air dans un panache

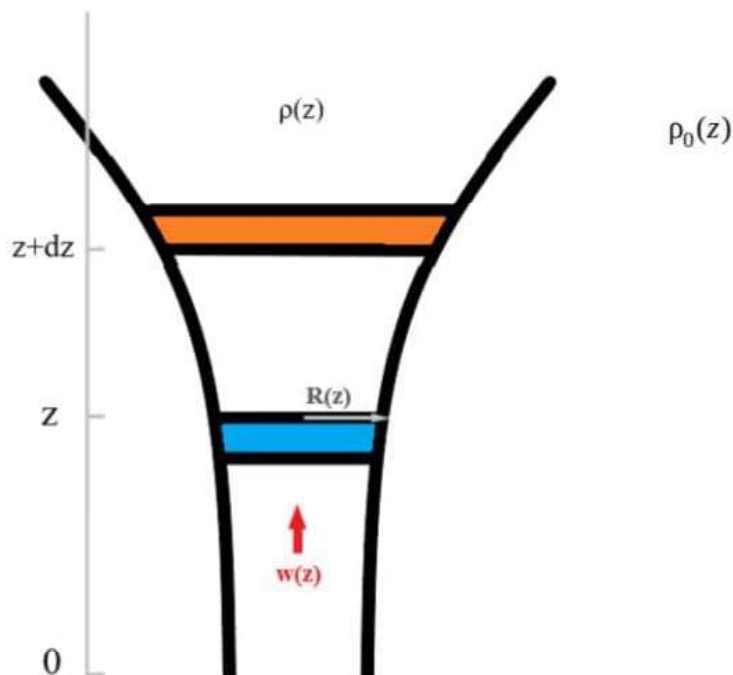


FIGURE 2.1 – Modélisation d'un panache

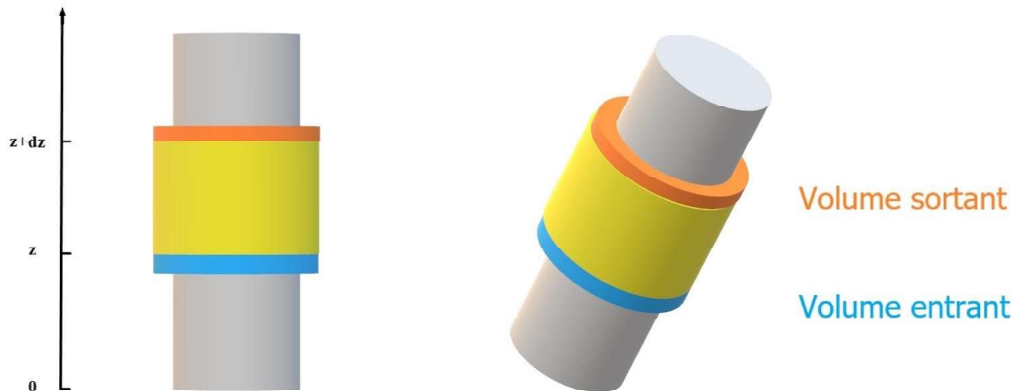


FIGURE 2.2 – Modélisation d'un panache

Dans la suite de notre démonstration mathématique, le panache est décrit par son altitude z , son rayon $R(z)$, sa vitesse $w(z)$ et sa masse volumique $\rho(z)$. Ces grandeurs sont fonctions de l'altitude et vont donc évoluer en fonction de l'élévation du panache dans le milieu considéré. Celui ci possède également une masse volumique, notée $\rho_0(z)$ dans la suite de notre raisonnement. Au fur et à mesure que le panache s'élève, il va ingérer une partie du milieu ambiant à une vitesse U_e appelée vitesse d'entraînement. On définit, dans la suite du rapport, cette vitesse telle que : $U_e(z) = \alpha w(z)$ avec α le coefficient d'entraînement.

Commençons par déterminer l'équation bilan de masse.

$$\text{Expression de la masse d'air entrante : } (\pi r^2 w dt \times \rho) \times z$$

$$\text{Expression de la masse d'air sortante : } (\pi r^2 w dt \times \rho) \times (z + dz)$$

$$\text{Masse du milieu ambiant entraîné par la turbulence du panache : } \underbrace{2\pi r dz}_{\text{surface d'entrée}} \times U_e dt \rho_0 \times z$$

$$\Rightarrow \pi r (z + dz)^2 w(z + dz) \rho(z + dz) dt = \pi r^2 (z) w(z) dt \rho(z) + 2\pi r (z) U_e dt dz \rho_0(z)$$

$$\text{On a donc } \frac{d(r^2 w \rho)}{dz} dz = 2r U_e \rho_0 dz \Rightarrow \boxed{\frac{d(r^2 w \rho)}{dz} = 2r U_e \rho_0}$$

Déterminons ensuite l'équation bilan de quantité de mouvement.

$$\text{Expression de la quantité de mouvement entrant : } \pi r^2 w dt \rho(z) w(z)$$

$$\text{Expression de la quantité de mouvement sortant : } \pi r^2 w dt \rho(z + dz) w(z + dz)$$

$$\text{Quantité de mouvement du milieu ambiant entraîné par la turbulence du panache : } 2\pi r dz U_e dt \rho_0(z) U_e$$

$$\text{Flottabilité : } -\rho V_g + \rho_0 V_g = \Delta \rho V_g = \Delta \rho_g \pi r^2 dz$$

$$\Rightarrow \pi r (z + dz) w^2(z + dz) \rho(z + dz) dt = \pi r^2 (z) w^2(z) dt \rho(z) + 2\pi r (z) U_e^2 dt dz \rho_0(z) + \Delta \rho_g \pi r^2 dz dt$$

$$\text{Finalement, } \frac{d(r^2 w^2 \rho)}{dz} = 2r U_e^2 \rho_0 + \Delta \rho_g r^2$$

Or, $\alpha^2 \ll 1 \Rightarrow U_e^2 \ll w$. On négligera donc par la suite $2r U_e^2 \rho_0$

$$\text{On a donc } \boxed{\frac{d(r^2 w^2 \rho)}{dz} = \Delta \rho g r^2}$$

Remarque : La flottabilité est une poussée verticale exercée vers le haut (si la flottabilité est positive) par un fluide (ici, l'air) sur un volume.

Intéressons-nous maintenant à l'équation bilan de flottabilité.

$$\text{Expression du volume d'air entrant : } \pi r^2 w dt(\rho_1 - \rho(z))$$

$$\text{Expression du volume d'air sortant : } \pi r^2 w dt(\rho_1 - \rho(z + dz))$$

$$\text{Volume d'air du milieu ambiant entraîné par la turbulence du panache : } 2\pi r dz U_e dt(\rho_1 - \rho_0(z))$$

$$\Rightarrow \pi r^2(z + dz) w(z + dz) dt(\rho_1 - \rho(z + dz)) = \pi r^2(z) w(z) dt(\rho_1 - \rho(z)) + 2\pi r dz U_e dt(\rho_1 - \rho_0(z))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}(r^2 w(\rho_1 - \rho)) = 2r U_e(\rho_1 - \rho_0)$$

$$\text{En reprenant l'équation de bilan de masse, on a : } \frac{d}{dz}(r^2 w \rho) = 2r U_e \rho_0$$

$$\text{En reprenant l'équation de bilan de quantité de mouvement, on a : } \frac{d}{dz}(r^2 w^2 \rho) = \Delta \rho g r^2$$

En combinant les trois équations précédentes, on trouve l'équation bilan de flottabilité : $\boxed{\frac{d(r^2 w(\rho_0 - \rho))}{dz} = r^2 w \frac{d\rho_0}{dz}}$

On a finalement les trois équations suivantes :

1. $\frac{d(r^2 w \rho)}{dz} = 2r U_e \rho_0$
2. $\frac{d(r^2 w^2 \rho)}{dz} = \Delta \rho g r^2$
3. $\frac{d(r^2 w(\rho_0 - \rho))}{dz} = r^2 w \frac{d\rho_0}{dz}$

On définit, le flux de masse $Q = r^2 w$, le flux de quantité de mouvement $M = r^2 w^2$ et le flux de flottabilité

$$F = r^2 w G' = Q G' = r^2 w \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_1} g$$

Exprimons alors les variables utilisées en fonction des flux précédents : $r = \sqrt{\frac{Q^2}{M}}$, $w = \frac{M}{Q}$ et $G' = \frac{F}{Q}$

Dans les équations précédentes, on remplace les variables r , w et G' par leur expression explicitée ci-dessus.

1. $\boxed{\frac{d}{dz} \left(\frac{Q^2}{M} \times \frac{M}{Q} \times \rho \right) = 2 \sqrt{\frac{Q^2}{M}} U_e \rho_0}$
2. $\boxed{\frac{d}{dz} \left(\frac{Q^2}{M} \times \frac{M^2}{Q} \times \rho \right) = \Delta \rho g \frac{Q^2}{M}}$
3. $\boxed{\frac{d}{dz} \left(\frac{Q^2}{M} \times \frac{M}{Q} (\rho_0 - \rho) \right) = \frac{Q^2}{M} \times \frac{M}{Q} \times \frac{d\rho_0}{dz}}$

Avec l'approximation de BOUSSINESQ, on fait l'hypothèse que $\rho \simeq \rho_0$ mais $\Delta \rho \neq 0$.

1. $\frac{d}{dz}(Q\rho) = 2\alpha\sqrt{M}\rho_0$

2. $\frac{d}{dz}(M\rho) = \Delta\rho g r^2$
3. $\frac{d}{dz}(Q(\rho_0 - \rho)) = Q\frac{d\rho_0}{dz}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{r^2 w(\rho_0 - \rho) g}{\rho_1}\right) = \frac{r^2 w g}{\rho_1} \times \frac{d\rho_0}{dz}$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{r^2 w g}{\rho_1} \times \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{Q g}{\rho_1} \times \frac{d\rho_0}{dz} = -N^2 Q$$

Remarque : Fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ

La fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ provient de l'application de la deuxième des trois lois de NEWTON dans un milieu verticalement stratifié. Pour expliquer la nature oscillatoire des fluides stratifiés, on peut assimiler ces différents fluides à une particule dont la densité augmente avec la profondeur. Lorsque cette particule se trouve déplacée verticalement en dehors de sa position d'équilibre, sa densité devient plus grande ou plus faible que le fluide environnant (l'air, l'eau...). Dès lors, une des deux forces suivantes : la pesanteur (vers le bas) ou la flottabilité (vers le haut), apparaît et tend à la ramener vers son point d'équilibre, induisant en même temps une accélération. De ce fait, généralement, la particule dépasse l'équilibre sur son chemin de retour. Ce phénomène déclenche une oscillation dont la fréquence est : $N \equiv \sqrt{-\frac{g}{\rho_1} \frac{d\rho_0}{dz}}$

Il est à noter que la valeur de N diffère lorsque le milieu est composé d'air et lorsque le milieu est composé d'eau.

Cette fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ a de nombreux domaines d'application. En effet, elle est utile pour expliquer des phénomènes comme le nôtre liés à l'atmosphère, mais elle sert aussi en océanographie, ainsi qu'en géophysique et en météorologie. Dans l'atmosphère terrestre, la fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ est de l'ordre de $0,012 \text{ s}^{-1}$.

2.2 Cas du milieu non stratifié

Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que le panache évolue dans un milieu non stratifié. Dans les cas suivants, on aura les conditions initiales suivantes : $r_0; w_0; G'_0; Q_0; M_0; F_0$

milieu non stratifié $\Rightarrow \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{dF}{dz} = 0 \Rightarrow F = F_0$ (constante)

2.2.1 Cas d'une flottabilité initiale nulle : $F_0 = 0$

Premièrement, nous avons cherché à définir les équations avec une méthode calculatoire manuelle.

$$\frac{dQ}{dz} = 2\alpha\sqrt{M} \text{ car } U_e = \alpha w = \alpha \frac{M}{Q}$$

$$\frac{dM}{dz} = \frac{\Delta\rho}{\rho_1} g \frac{Q^2}{M} = G' \frac{Q^2}{M} = \frac{FQ}{M}$$

$$\frac{dF}{dz} = Q \frac{g}{\rho_1} \times \frac{d\rho_0}{dz}$$

La flottabilité est nulle ($F=0$), il n'y a que la vitesse initiale qui compte, alors $\frac{dM}{dz} = \frac{FQ}{M} = 0 \Rightarrow M =$ constante et $\frac{dQ}{dz} = 2\alpha\sqrt{M} \Rightarrow Q = 2\alpha\sqrt{M}z + Q_0$

Nous avons ensuite vérifié ces calculs à l'aide du code suivant.

Lorsque nous avons travaillé sur nos équations de manière mathématique, nous avons vu que le rayon R du panache dépendait de la hauteur z , mais aussi des paramètres initiaux tels que la flottabilité F_0 et la vitesse initiale du panache w_0 . Nous avons déterminé que pour une vitesse initiale élevée et une flottabilité nulle, le coefficient directeur de la courbe obtenue devait valoir 2α . En rentrant les équations déterminées théoriquement dans notre code basé sur la méthode d'EULER, nous avons donc pu en vérifier la véracité.

Remarque : La méthode d'EULER est une méthode de résolution numérique d'équations différentielles d'ordre 1. Il s'agit d'une méthode itérative, qui fonctionne donc par répétition d'opération. La méthode permet d'obtenir une solution graphique à une équation différentielle. La solution trouvée n'est donc pas exacte. Elle est basée sur le fait qu'à une petite échelle, la dérivée d'une fonction est à peu près égale au coefficient directeur de sa courbe.

Cela nous permet donc, à partir de conditions initiales d'une fonction, d'approximer la courbe de la fonction jusqu'au point souhaité pour avoir une solution graphique.

Voir code en annexe

On obtient alors le graphe suivant :

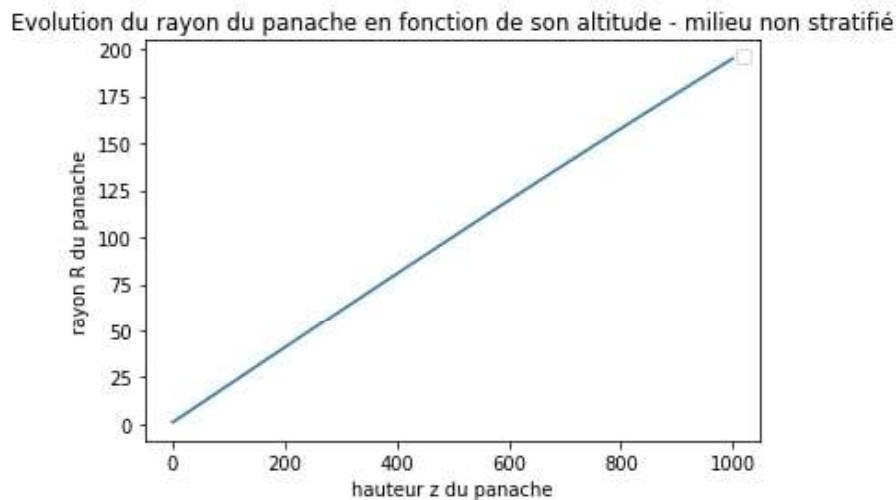


FIGURE 2.3 – Évolution du rayon du panache en fonction de son altitude en milieu non stratifié

Le calcul du coefficient directeur de ce graphe, tracé avec une valeur assez faible de $F_0 = 0$ et plus élevée de $w_0 = 10$, nous donne un coefficient directeur de 0,2, ce qui correspond bien à 2α pour $\alpha = 0,1$. Cela confirme donc bien partiellement la validité des équations obtenues précédemment.

2.2.2 Cas d'une flottabilité initiale non nulle : $F_0 \neq 0$

La flottabilité n'est pas nulle ($F \neq 0$), il y a peu de vitesse. Dans notre cas, la flottabilité sera positive, $F_0 > 0$. Dans ce cas, il faut retrouver les expressions de Q et de M. On procède par analyse dimensionnelle. On sait que $Q = K_1 F_0^\alpha z^\beta$ et $M = K_2 F_0^{\alpha'} z^{\beta'}$. On a F en $m^4 \cdot s^{-3}$, M en $m^4 \cdot s^{-2}$ et Q en $m^3 \cdot s^{-1}$

Nous avons effectué le raisonnement suivant :

$$[L^3 \cdot T^{-1}] = (L^4 \cdot T)(L)^\beta = (L^4 \cdot T)^{1/3} (L)^{5/3}$$

$$\text{Ainsi, } \alpha = 1/3 \text{ et } \beta = 5/3$$

$$[L^4 \cdot T] = (L^4 \cdot T^{-3})^{\alpha'} (L)^{\beta'} = (L^4 \cdot T^{-3})^{2/3} (L)^{4/3}$$

$$\text{Ainsi, } \alpha' = 2/3 \text{ et } \beta' = 4/3$$

$$\text{On a alors, } Q = K_1 F_0^{1/3} z^{5/3} \text{ et } M = K_2 F_0^{2/3} z^{4/3}.$$

On cherche ensuite les expressions des constantes K_1 et K_2 .

$$K_1 F_0^{1/3} \frac{5}{3} z^{2/3} = 2\alpha \sqrt{K_2 F_0^{2/3} z^{4/3}} \Rightarrow K_1 = \frac{6}{5} \alpha \sqrt{K_2}$$

$$\frac{dM}{dz} = \frac{FQ}{M} \Rightarrow \frac{d(K_2 F_0^{2/3} z^{4/3})}{dz} = \frac{F K_1 F_0^{1/3} z^{5/3}}{K_2 F_0^{2/3} z^{4/3}} \Rightarrow K_2 F_0^{2/3} \frac{4}{3} z^{1/3} = \frac{K_1 F_0^{4/3} z^{5/3}}{K_2 F_0^{2/3} z^{4/3}} \Rightarrow K_1 = \frac{4}{3} K_2^2 = \frac{6}{5} \alpha \sqrt{K_2}$$

$$\text{Donc } K_2 = (K_2^{3/2})^{2/3} = \frac{18}{20} \alpha = \left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{2/3} \Rightarrow \boxed{K_2 = \left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{2/3}}$$

$$\text{Or, } K_1 = \frac{4}{3} K_2^2 \Rightarrow K_1 = \left(\left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{2/3}\right)^2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{4/3} \Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{10} \alpha\right)^{4/3}}$$

Finalement, en remplaçant K_1 et K_2 dans les expressions de Q et M, on obtient :

$$Q = \left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{4/3} \times \frac{4}{3}F_0^{1/3}z^{5/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{4/3}F_0^{1/3}z^{5/3} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{4/3}F_0^{1/3}z^{5/3}}$$

$$M = \left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{2/3}F_0^{2/3}z^{4/3} = \left(\frac{9}{10}\alpha F_0\right)^{2/3}z^{4/3} \Rightarrow \boxed{M = \left(\frac{9}{10}\alpha F_0\right)^{2/3}z^{4/3}}$$

Il en découle de ces équations les expressions de R et w suivantes.

$$R = \sqrt{\frac{Q^2}{M}} = Q\sqrt{\frac{1}{M}} = \frac{6}{5}\alpha z \Rightarrow \boxed{R = \frac{6}{5}\alpha z}$$

$$w = \frac{M}{Q} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{-2/3}F_0^{1/3}z^{-1/3} \Rightarrow \boxed{w = \frac{3}{4} \times \left(\frac{9}{10}\alpha\right)^{-2/3}F_0^{1/3}z^{-1/3}}$$

Lorsque nous avons travaillé sur nos équations de manière mathématique, nous avons vu que le rayon R du panache dépendait de la hauteur z , mais aussi des paramètres initiaux tels que la flottabilité F_0 et la vitesse initiale du panache w_0 . Dans nos équations, il intervient aussi un paramètre noté α , qui n'a pas de grandeur, et nous avons déterminé mathématiquement que pour une flottabilité élevée, ainsi qu'une vitesse initiale faible, notre courbe devait atteindre un coefficient directeur de $\frac{6}{5}\alpha$.

Evolution du rayon du panache en fonction de son altitude - milieu non stratifié

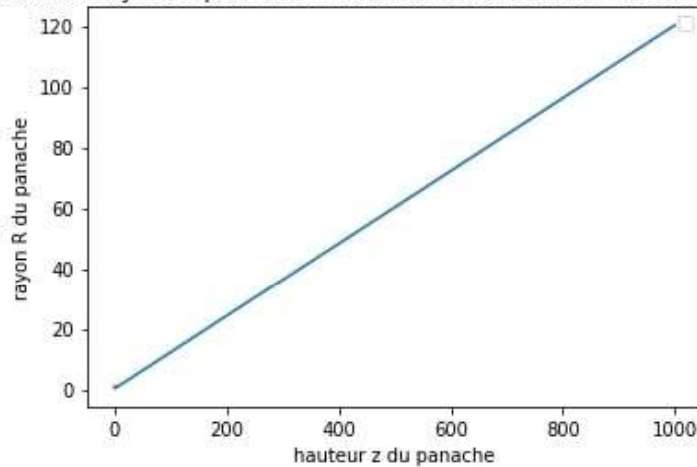


FIGURE 2.4 – Évolution du rayon du panache en fonction de son altitude en milieu non stratifié

Sur le graphe ci-dessus, on peut constater que pour une flottabilité plus élevée $F_0 = 100$ et une vitesse w_0 plus faible, la valeur du coefficient directeur est bien de $\frac{6}{5}\alpha$ pour $\alpha = 0,1$.

Afin de vérifier que nos calculs sont justes, en effet beaucoup d'étapes calculatoires et de risque de faire une erreur, nous allons coder, à l'aide de la méthode d'Euler dans un premier temps, un programme permettant de vérifier les précédents résultats.

2.2.3 Cas intermédiaires

Pour les cas intermédiaires, nous pourrions nous référer au graphique suivant.

Evolution du rayon du panache en fonction de son altitude - milieu non stratifié

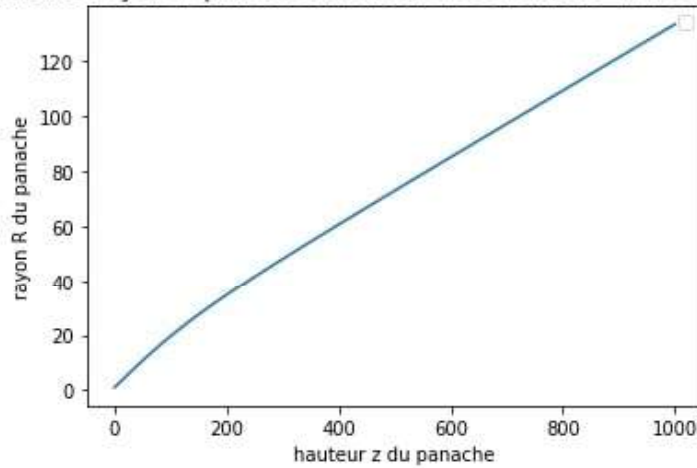


FIGURE 2.5 – Évolution du rayon du panache en fonction de son altitude en milieu non stratifié

En faisant varier certains paramètres initiaux, on regarde si on obtient les valeurs telles que Q ou M trouvées grâce à la méthode calculatoire. Puis, en changeant progressivement la valeur de F_0 , on cherche à savoir où se trouve la limite entre le moment où le panache est dominé par sa vitesse et le moment où celui-ci est dominé par la flottabilité.

Evolution du rayon du panache en fonction de son altitude - milieu non stratifié

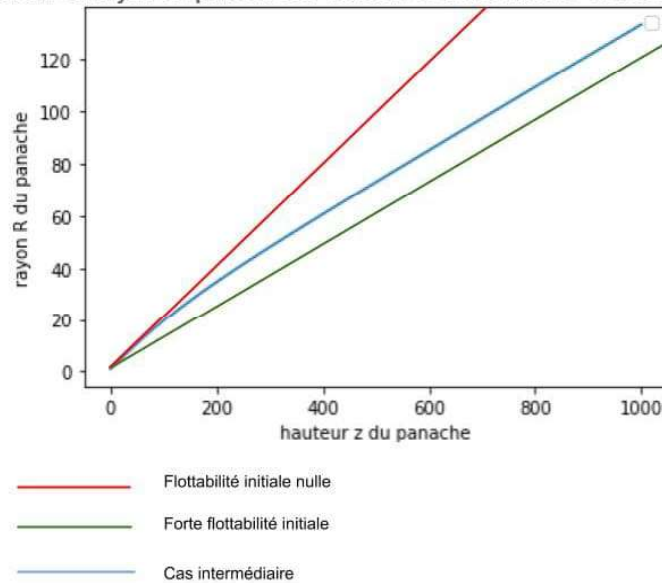


FIGURE 2.6 – Comparaison de l'évolution du rayon du panache en fonction de la flottabilité initiale

Chapitre 3

Utilisation du code pour des panaches en milieu stratifié

Nous avons pu vérifier ce code pour les cas des milieux non stratifiés dont nous avons obtenu les résultats analytiquement. Nous avons ensuite généralisé aux cas des milieux stratifiés. Dans cette partie du rapport, nous appellerons ρ_0 la masse volumique de l'air ambiant et ρ_1 la masse volumique de l'air ambiant à l'altitude $z = 0 \text{ m}$ (niveau de la mer).

Dans le cas d'un milieu non stratifié, nous avons pu calculer analytiquement les solutions théoriques et les vérifier grâce à la méthode d'Euler.

Pour le cas d'un milieu stratifié (apparition de la fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ comme paramètre initial), nous n'avons pas pu déterminer de solution analytique mais nous allons utiliser la méthode d'Euler pour déterminer la hauteur maximale que peut atteindre un panache en fonction des caractéristiques initiales qu'il possède (flottabilité initiale, rayon, vitesse initiale, etc.).

Nous avons dû introduire un nombre adimensionnel appelé nombre de RICHARDSON, directement relié à la flottabilité (c'est le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle du fluide et son énergie cinétique). Son expression est $Ri = \frac{r \times G'}{w^2}$. Ce paramètre est important car l'on considère que la vitesse domine l'évolution du panache lorsque $Ri < 1$ et que la flottabilité la domine lorsque $Ri > 1$.

Si on prend la définition du jet (panache où la flottabilité est nulle), alors on considèrera que pour un nombre de RICHARDSON très faible on sera en présence d'un jet pur.

Pour déterminer la hauteur maximale qu'un panache turbulent peut atteindre, nous nous sommes intéressés au tracé de la quantité de mouvement en fonction de la hauteur du panache et au tracé de la flottabilité en fonction de la hauteur du panache. Pour la suite de cette partie nous avons pris comme conditions initiales : un rayon R égal à 1 m , une vitesse initiale de 1 m/s et un nombre de RICHARDSON égal à $0,1$.

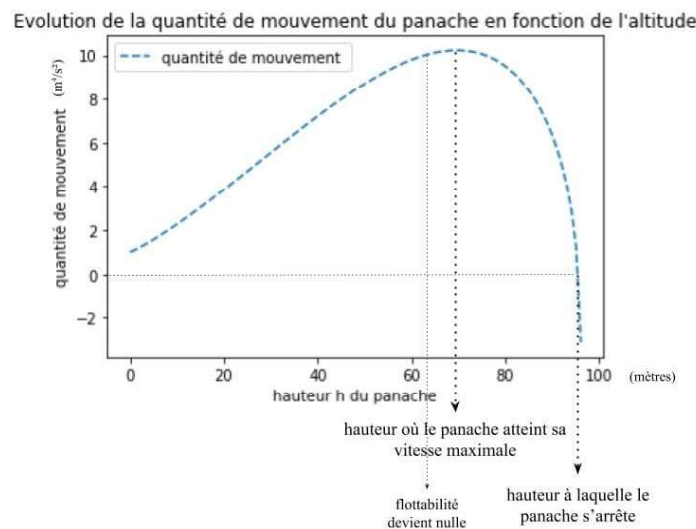


FIGURE 3.1 – Évolution de la quantité de mouvement du panache en fonction de l'altitude

M désigne la quantité de mouvement. Lorsque celle-ci devient nulle à une certaine hauteur, le panache s'arrête. La courbe de quantité de mouvement est directement liée à celle de G' (*proportionnel à $\Delta\rho$*), en effet lorsque la flottabilité G' est positive, la quantité de mouvement augmente, on observe une accélération du panache. En revanche, lorsque G' est négative, la quantité de mouvement diminue, on observe une décélération du panache. Pour G' nulle, la quantité de mouvement est maximale. Il y a cependant une marge de quelques mètres entre la hauteur à laquelle la flottabilité devient nulle et celle à laquelle le panache atteint sa quantité de mouvement maximale.

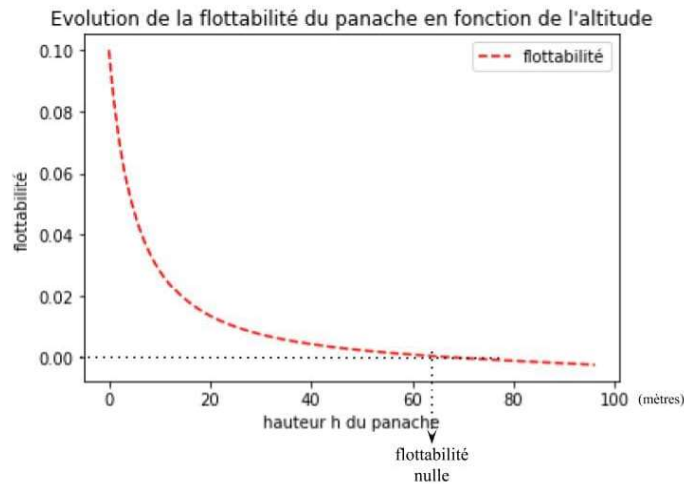


FIGURE 3.2 – Évolution de la flottabilité du panache en fonction de l'altitude

Nous pouvons expliquer le comportement de la courbe modélisant la flottabilité G' en comparant la courbe modélisant la masse volumique du panache en fonction de la hauteur et la courbe modélisant la masse volumique de l'air ambiant en fonction de la hauteur. On rappelle que $G' = \Delta\rho \times \frac{g}{\rho_1}$. Le panache est moins dense que l'air dans un premier temps, cela lui permet de s'élever et, au fur et à mesure qu'il ingurgite de l'air ambiant, la masse volumique du panache augmente puis diminue avant que le panache devienne plus dense que l'air ambiant.

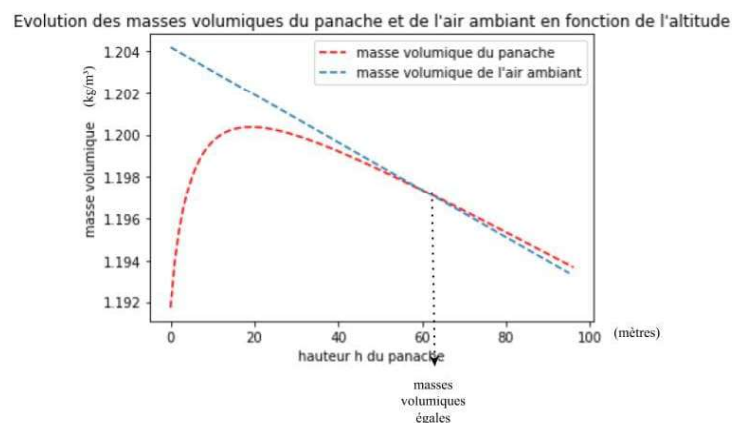


FIGURE 3.3 – Évolution des masses volumiques du panache et de l'air en fonction de l'altitude

Notre hypothèse initiale était de considérer que le panache commençait à décélérer lorsque $\rho_{air} = \rho_{panache}$. Nous avons pu tester cette hypothèse en repérant la hauteur à laquelle les deux masses volumiques se valent

(repérer sur le graphique par les lignes en pointillés). Celle-ci correspond bien à la hauteur à laquelle la quantité de mouvement est maximale. Notre hypothèse est donc validée.

Pour les conditions initiales appliquées, nous constatons que la vitesse maximale du panache est aux alentours de 65 – 70 m d'altitude, celui-ci s'arrête définitivement à 96 m.

Ces hauteurs sont relativement faibles. Nous pouvons alors discuter de la concordance physique entre ce code et la réalité. En effet, ces faibles hauteurs correspondent plutôt à la modélisation du comportement d'un panache issu d'un feu de cheminée ou d'une usine. Pour des panaches issus d'éruptions volcaniques, les hauteurs atteintes sont nettement plus élevées (de l'ordre de quelques kilomètres à plusieurs dizaines de kilomètres). Dans notre code, les paramètres initiaux ont des valeurs faibles (la vitesse initiale choisie n'est pas celle d'un panache volcanique). De plus la flottabilité initiale de ce type de panache (éruptif) est négative puisque le panache est originellement plus lourd que l'air ambiant du fait des particules contenues dans celui-ci.

Nous nous sommes également intéressés à la hauteur atteinte par un panache en fonction de la flottabilité de celui-ci. Nous avons obtenu le graphique suivant :

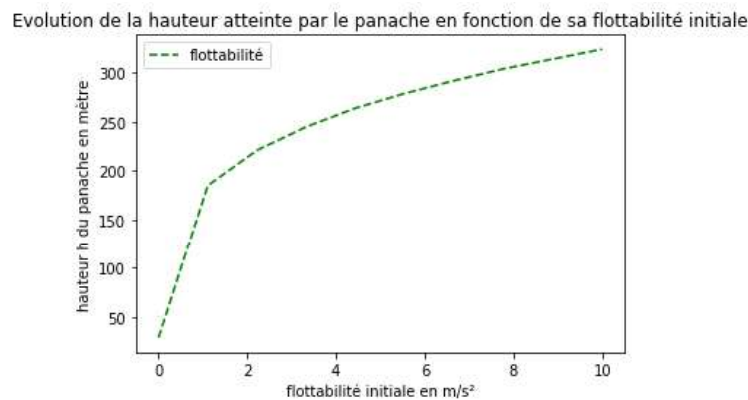


FIGURE 3.4 – Évolution de la hauteur atteinte par le panache en fonction de sa flottabilité

Pour une vitesse initiale et un rayon initial fixés, à mesure que la flottabilité initiale du panache étudié augmente, la hauteur maximale atteinte est plus grande. Nous pouvons alors affirmer que la flottabilité initiale est un paramètre important à prendre en compte et régit, en partie, le comportement du panache. Dans toute notre étude, nous nous sommes placés dans un régime où la flottabilité dominait jusqu'à ce que la quantité de mouvement devienne nulle. Pour des panaches d'éruptions volcaniques, il y a une étape où la quantité de mouvement domine (pour des altitudes faibles, où la flottabilité est négative).

Il est à noter que les graphes obtenus et reportés dans cette partie correspondent à des paramètres initiaux précis et fixés. Nous pourrions faire varier ces paramètres et obtenir des graphes différents.

Il est important de prendre du recul sur l'ensemble de ces résultats. Nous nous sommes appuyés tout le long de notre raisonnement sur le code. Celui-ci a été programmé pour modéliser le comportement de petits panaches turbulents et non pour des gros panaches qui s'élèvent très haut, dépassant parfois la troposphère et atteignant la stratosphère.

Conclusion et perspectives

Ce projet visait à déterminer la hauteur d'un panache dans un milieu stratifié.

Tout d'abord, nous avons défini les panaches et milieux stratifiés. Dans la première partie nous avons effectué des recherches et calculs afin de définir les différents modèles d'étude possibles et choisir le plus adapté, à savoir le modèle non isotherme. Nous avons finalement obtenu l'expression de la masse volumique de l'air au sein de la troposphère en fonction de l'altitude de manière précise. Pour cela, nous avons pris en compte de multiples paramètres tels que le gradient thermique qui s'est avéré être un paramètre non négligeable.

Ensuite, nous avons déterminé les équations de conservation dans un panache turbulent. Dans cette partie nous avons retranscrit en équations les différents transferts au sein d'un panache turbulent modélisés précédemment. Nous avons utilisé ces résultats pour développer le code sur Python.

La modélisation numérique nous a permis, dans un premier temps, de vérifier nos solutions théoriques pour un milieu non stratifié. Puis, de modéliser le comportement d'un panache turbulent dans un milieu stratifié en fonction des conditions initiales définissant ce panache. Nous nous sommes alors rendu compte qu'il y avait un lien entre la flottabilité et la quantité de mouvement régissant le panache. En effet, le panache accélère lorsque sa flottabilité est positive, ralentit lorsque sa flottabilité est négative et s'arrête quand sa quantité de mouvement devient nulle.

Finalement, nous avons obtenu des résultats nous permettant de déterminer la hauteur d'un panache dans l'atmosphère. Nous nous sommes rendus compte que la hauteur maximale atteinte par un panache turbulent variait beaucoup selon les valeurs et conditions initiales saisies en entrée. De plus, ces conditions initiales sont très différentes selon que l'on étudie un panache éruptif ou un panache issu d'un feu de cheminée par exemple.

Comprendre et développer le code permettant d'appliquer ces équations pour répondre au problème physique posé a été parfois difficile du fait de notre faible bagage technique autour du logiciel Python. Cette difficulté a été accentuée par les conditions particulières liées à la situation de crise sanitaire.

Ce projet nous a permis d'apprendre à rédiger sur LyX avec le langage LaTeX pour les équations.

Lors de ce projet, nous avons fait beaucoup d'hypothèses simplificatrices. Nous avons considéré que l'air de l'atmosphère était immobile, nous avons donc négligé les effets du vent. Nous avons considéré l'air parfaitement sec, c'est-à-dire uniforme et sans variation d'humidité et l'avons assimilé l'air à un gaz parfait. Ainsi, nous avons obtenu un modèle simplifié de la situation réelle. Pour avoir des résultats plus précis et concrets, il faudrait supprimer certaines et même la totalité de ces hypothèses.

Durant cette étude, nous avons considéré que les panaches s'arrêtaient dans la troposphère et n'atteignaient donc pas la stratosphère. Nous pourrions poursuivre nos recherches dans cette partie de l'atmosphère afin d'élargir le champ des possibilités. Nous pourrions développer un code où l'on prendrait en compte la variation de stratification en exprimant N , la fréquence de BRUNT-VÄISÄLÄ, comme une variable en fonction de l'altitude et non une constante. De plus, dans la troposphère, on observe des effets de jet stream qui transportent les gaz autour de la planète à une vitesse excessivement grande (environ 350 à 400 km/h).

Nous avons développé ce code en nous basant sur la méthode d'EULER. Cependant, celle-ci ne fonctionne plus à partir d'une certaine altitude. Nous aurions donc pu améliorer nos résultats en utilisant une méthode de résolution plus précise telle que la méthode de RUNGE-KUTTA.

Aussi, nous nous sommes intéressés à un unique milieu stratifié : l'air. Nous pourrions généraliser notre étude en l'étendant à d'autres milieux stratifiés comme l'eau.

Nous tenons à remercier grandement notre professeur encadrant pour ce projet, M. PAILLAT.

Annexes

Notations

Q : flux de masse (m^3/s)

r : rayon (m)

M : flux de quantité de mouvement (m^4/s^2) ou masse molaire (g/mol) ($M_{air} = 28,965 g/mol$)

g : constante gravitationnelle (m/s^2) ($g = 9,80665 m/s^2$)

z : altitude (m)

ρ : masse volumique du panache (kg/m^3)

ρ_0 : masse volumique de l'air ambiant (kg/m^3) (uniquement pour la partie code)

ρ_1 : masse volumique de l'air ambiant à l'altitude $z = 0 m$ (kg/m^3) (uniquement pour la partie code)

P : pression (Pa)

T : température (K)

w : vitesse verticale du panache (m/s)

U_e : vitesse d'entraînement du panache (m/s)

F : flux de flottabilité (m^4/s^3)

G' : flottabilité (m/s^2)

R : constante de Reynolds ($R = 8,31446262 J.mol^{-1}.K^{-1}$)

Masse volumique de l'air dans la troposphère

Altitude(m)	Masse volumique de l'air (kg/m³)	Masse volumique de l'air (kg/m³) si isotherme	Ecart	T0 (K)	Gradient(K/m)	g	Mair(kg/mol)	R	P0(Pa)
0	1,204	1,20417671915439	0,000%	293,15	0,0065	9,81	0,028965	8,314	101325
500	1,148	1,13598898082512	1,076%						
1000	1,095	1,072	2,089%						
1500	1,043	1,011	3,038%						
2000	0,993	0,954	3,924%						
2500	0,945	0,900	4,747%						
3000	0,898	0,849	5,508%						
3500	0,854	0,801	6,207%						
4000	0,811	0,755	6,843%						
4500	0,770	0,713	7,416%						
5000	0,730	0,672	7,927%						
5500	0,692	0,634	8,374%						
6000	0,656	0,598	8,757%						
6500	0,621	0,564	9,075%						
7000	0,587	0,532	9,327%						
7500	0,555	0,502	9,512%						
8000	0,524	0,474	9,629%						
8500	0,495	0,447	9,675%						
9000	0,467	0,422	9,650%						
9500	0,440	0,398	9,551%						
10000	0,414	0,375	9,376%						
10500	0,390	0,354	9,122%						
11000	0,366	0,334	8,787%						
11500	0,344	0,315	8,366%						
12000	0,323	0,297	7,856%						
12500	0,302	0,280	7,253%						
13000	0,283	0,265	6,553%						
13500	0,265	0,250	5,751%						
14000	0,247	0,235	4,840%						
14500	0,231	0,222	3,814%						
15000	0,215	0,210	2,667%						
15500	0,200	0,190	1,390%						
16000	0,186	0,186	0,025%						
16500	0,173	0,176	1,588%						
17000	0,161	0,166	3,310%						
17500	0,149	0,157	5,202%						
18000	0,138	0,148	7,280%						

Formule de calcul de l'écart :

$$Ecart(\%) = \frac{|\rho_{air} - \rho_{air\ isotherme}|}{\rho_{air}} \times 100$$

Ecart absolu moyen : 6,095%

FIGURE 3.5 – Masse volumique de l'air dans la troposphère

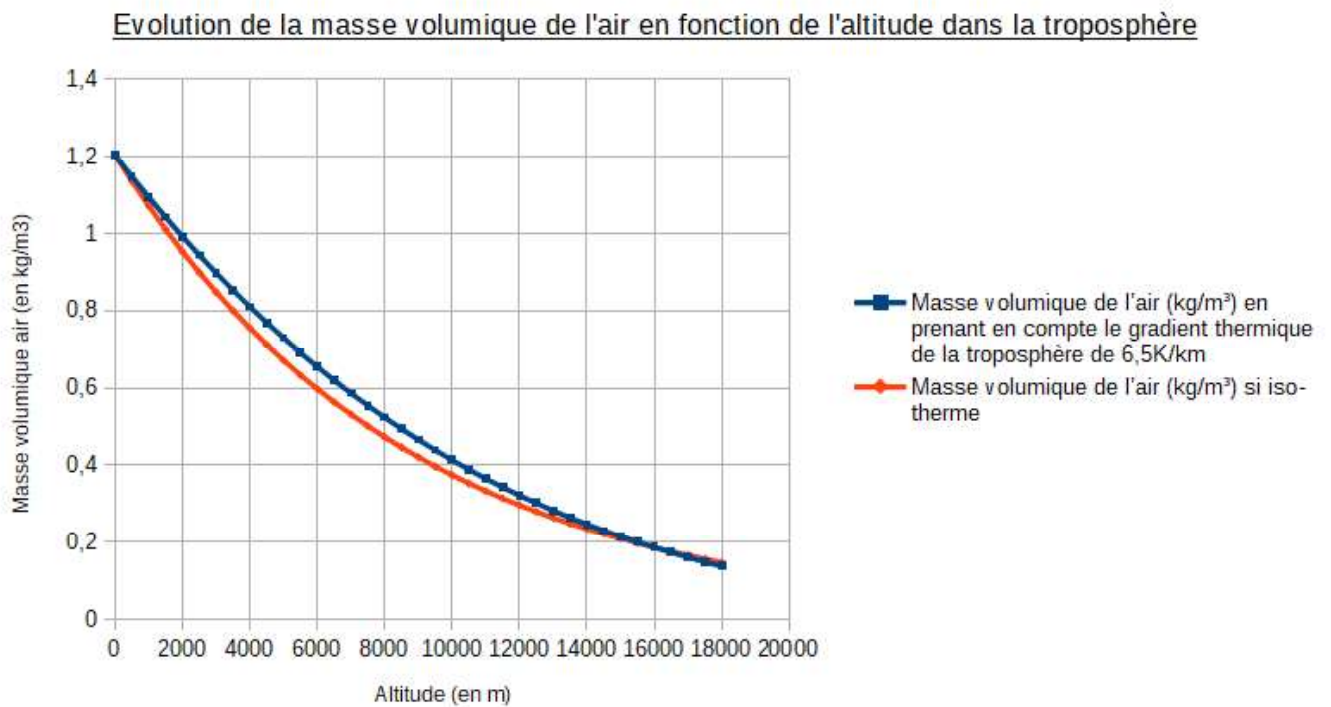


FIGURE 3.6 – Évolution de la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude dans la troposphère

Codes

Modélisation de l'évolution du rayon du panache en fonction de l'altitude en milieu non stratifié

```

6
7
8
9 #Librairies à importer
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 import numpy as np
12
13 H=1000
14 dz=0.01#Pas de calcul
15 z=np.linspace(0,H,int(H/dz))#variable d'intégration
16
17 #Conditions initiales
18 R0=1
19 w0=1
20
21 #paramètres
22 alpha=0.1
23 F0=100
24
25 #Déclaration des variables
26 Q=[]
27 R=[]
28 M=[]
29 W=[]
30 Q.append(R0**2*w0)
31 R.append(R0)
32 M.append(R0**2*w0**2)
33 w.append(w0)
34
35
36 for i in range(0,len(z)-1):
37     Q1=2*alpha*np.sqrt(M[i])
38     M1=F0*Q[i]/M[i]
39     Q.append(Q[i]+Q1*dz)
40     M.append(M[i]+M1*dz)
41     R.append(Q[i+1]/np.sqrt(M[i+1]))
42     W.append(M[i+1]/Q[i+1])
43
44
45 plt.plot(z,R)
46 plt.title("Evolution du rayon du panache en fonction de son altitude - milieu non stratifié")
47 plt.xlabel("hauteur z du panache")
48 plt.ylabel("rayon R du panache")
49 plt.legend()
50 plt.show()

```

FIGURE 3.7 – Code de modélisation de l'évolution du rayon du panache en fonction de l'altitude en milieu non stratifié

Modélisation de la hauteur maximale atteinte par un panache en fonction de sa flottabilité initiale en milieu stratifié

```
#Librairies à importer
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

H=10000
dz=1#Pas de calcul
z=np.linspace(0,H,int(H/dz))#variable d'intégration
G0=np.linspace(0,10,10)

#Conditions initiales
R0=1
W0=1
#G0=0.1
#paramètres
alpha=0.1
#F0=10000
N=10**2

L=[]
Ri0=[]
for g in range(0, len(G0)) :
    #Déclaration des variables
    h=0
    Q=[]
    R=[]
    M=[]
    W=[]
    G=[]
    F=[]
    Ri=[]
    Q.append(R0**2*W0)
    R.append(R0)
    M.append(R0**2*W0**2)
    W.append(W0)
    F.append(R0**2*W0*G0[g])
    G.append(G0[g])
    Ri0.append((R0*G0[g])/W0**2)
    Ri.append(Ri0[g])

    while M[h] > 0 :
        Q1=2*alpha*np.sqrt(M[h])
        M1=F[h]*Q[h]/M[h]
        F1=- (N)**2*Q[h]
        Q.append(Q[h]+Q1*dz)
        M.append(M[h]+M1*dz)
        F.append(F[h]+F1*dz)
        R.append(Q[h+1]/np.sqrt(M[h+1]))
        W.append(M[h+1]/Q[h+1])
        G.append(F[h+1]/Q[h+1])
        Ri.append(Q[h+1]**2*F[h+1]/M[h+1]**(5/2))
        h = h+1

    L.append(h)

plt.plot(G0,L,"g--", label="flottabilité")
plt.title("Evolution de la hauteur atteinte par le panache en fonction de sa flottabilité initiale")
plt.xlabel("flottabilité initiale en m/s²")
plt.ylabel("hauteur h du panache en mètre")
plt.legend()
plt.show()
```

FIGURE 3.8 – Code de modélisation de la hauteur maximale atteinte par un panache en fonction de sa flottabilité initiale en milieu stratifié

Modélisation de la quantité de mouvement, de la flottabilité, des masses volumiques du panache étudié et de l'air en fonction de l'altitude en milieu stratifié

```
#Librairies à importer
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

H=10000
dz=1#Pas de calcul
z=np.linspace(0,H,int(H/dz))#variable d'intégration

#Conditions initiales
R0=1
W0=1
Ri0= 0.1
#G0=100
#paramètres
alpha=0.1
#F0=10000
N=10**2
rho1 = 1.204
g= 9.81

#Déclaration des variables
Q=[]
R=[]
M=[]
W=[]
G=[]
F=[]
Ri=[]
L=[]
rho0=[]
rho=[]
Q.append(R0**2*W0)
R.append(R0)
M.append(R0**2*W0**2)
W.append(W0)
F.append(R0*(W0**3)*Ri0)
G.append((Ri0*W0**2)/R0)
Ri.append(Ri0)
rho.append((rho1-(Ri0*rho1)/g))
#rho0 = rho1*(1-(N**2/g)*z)
rho0=2934.878*((1-((0.0065*z)/(293.15))))**5.258/(0.314*(293.15-0.0065*z))

h=0
while M[h] > 0 :
    Q1=2*alpha*np.sqrt(M[h])
    M1=F[h]*Q[h]/M[h]
    F1=-(N)**2*Q[h]
    Q.append(Q[h]+Q1*dz)
    M.append(M[h]+M1*dz)
    F.append(F[h]+F1*dz)
    R.append(Q[h+1]/np.sqrt(M[h+1]))
    W.append(M[h+1]/Q[h+1])
    G.append(F[h+1]/Q[h+1])
    Ri.append(Q[h+1]**2*F[h+1]/M[h+1]**(5/2))
    rho.append((rho0[h]-(G[h+1]*rho1)/g))
    L.append(h)
    h = h+1

plt.plot(z[0:h+1],G, "r--", label="flottabilité")
#plt.plot(z[0:h+1],M,"--", label="quantité de mouvement ")
plt.title("Evolution de la flottabilité du panache en fonction de l'altitude")
plt.xlabel("hauteur h du panache")
plt.ylabel("flottabilité")
plt.legend()
plt.show()
```

FIGURE 3.9 – Code de modélisation de la quantité de mouvement, de la flottabilité, des masses volumiques du panache étudié et de l'air en fonction de l'altitude en milieu stratifié

Expérience

Lors de cette étude nous avons réalisé une expérience sur les milieux stratifiés dans l'eau.

Nous avons créé une stratification dans une bouteille à l'aide d'eau plus ou moins salée. Nous avons réalisé 7 couches en diluant différentes quantités de sel dans un même volume d'eau.

	1	2	3	4	5	panache	6	7
eau	150 mL	150 mL	150 mL	150 mL	150 mL	150 mL (colorant compris)	150 mL	150 mL
sel	26 g	22 g	18 g	14 g	10 g	10 g	6 g	2 g

Nous avons rempli la pipette d'eau colorée salée (couche « panache ») puis nous l'avons fixé hermétiquement sous la bouteille. Nous avons versé les couches 1 à 7, une par une, doucement dans la bouteille pour que les couches ne se mélangent pas. Nous avons appuyé sur le piston de la pipette pour créer un panache dans la bouteille. L'eau colorée devrait se stopper au niveau de la 5e couche. En effet, celle-ci a la même densité (car même salinité). On observe que l'eau colorée se stoppe entre la 4e et la 5e couche. Cela est dû au fait que le panache a absorbé de l'eau des couches inférieures en remontant. Elle s'est donc chargée en sel ce qui a augmenté sa salinité et donc sa densité. C'est pour cela que le panache s'est stabilisé plus bas que ce qui était attendu.



FIGURE 3.10 – Résultat de l'expérience

On peut rapporter ce comportement aux panaches de fumée dans l'atmosphère.

Vous pourrez retrouver la vidéo de l'expérience en suivant ce lien : <https://youtu.be/9I8chx4Mi1s>

Bibliographie et sitographie

- Frédéric Legrand, Milieu linéaire stratifié, disponible sur
<https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/electmag/stratifie/stratifie.html>
- ENSTA, Panache turbulent, Université Jussieu (Paris 5), publié le 05/12/2003, consulté en février 2020, disponible sur
<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/CPCR.panache.ENSTA.pdf>
- Anonyme, Panache (hydrodynamique), dernière modification le 20 mars 2020, consulté en février 2020, disponible sur
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Panache_\(hydrodynamique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Panache_(hydrodynamique))
- Leila Dehmani, Mohamed Maalej, Étude de l'affinité d'un panache turbulent évoluant en milieu stratifié, International Journal of Thermal Science, Volume 41, Issue 8, July 2002, Pages 773-785, disponible sur
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1290072902013716>
- ESPCI, Panache thermique, consulté en février 2020, disponible sur
<https://cours.espci.fr/site.php?id=341&fileid=1584>
- Pierre Carloti. Éléments de mécanique des fluides pour la modélisation des incendies, Mécanique des fluides [physics.class-ph], Ecole Centrale de Lyon ; Université Claude Bernard - Lyon I, publié en 2013, disponible sur
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00978098/document>
- Antoine Mos, Modèles phénoménologiques pour la simulation d'incendies en tunnel routier, Université Claude Bernard - Lyon I, publié en 2005, disponible sur
http://www.cetu.developpement-durable.gouv.fr/IMG/pdf/these_A_Mos_cle62e9da-2.pdf
- Caroline LUCCHESI, Etude du mouvement d'un fluide de faible masse volumique entre deux compartiments reliés par une ouverture de type porte : Application à la propagation de la fumée d'incendie, UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANEE- AIX MARSEILLE II Ecole doctorale «Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique» ED-353 , publié en 2009, disponible sur
https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/43/127/43127249.pdf
- G. MICHAUX , O. VAUQUELIN, Solutions analytiques du panache massique rond turbulent en champ libre, 19ème Congrès Français de Mécanique, à Marseille le 24-28 août 2009, disponible sur
<http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/36935/843.pdf?sequence=1>
- Anonyme, Panache volcanique, dernière modification le 3 juillet 2019, consulté en février 2020, disponible sur
https://fr.wikipedia.org/wiki/Panache_volcanique
- AW Woods, The fluid dynamics and thermodynamics of eruption columns, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver St., Cambridge, CB3 9EW, UK, Avril 1987, consulté en février 2020. B. R. Morton, Geoffrey Ingram Taylor, John Stewart Turner, Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, The Cavendish Laboratory, University of Cambridge, publié le 24 janvier 1956, consulté en Février 2020.