

Fontaine de Héron



[4]

Étudiants :
Anaïs COQUELLE
Alban KAMGA
Zinedine SAOUDI
Yaële VINCENT

Enseignant-responsable du projet :
Samuel PAILLAT

Date de remise du rapport : 10/06/2020

Référence du projet : STPI/P6/2020 – 35

Intitulé du projet : Fontaine de Héron

Type de projet : Expérimental puis bibliographique

Objectifs du projet :

- Savoir poser un questionnement en lien avec le sujet pour organiser le travail de groupe
- Proposer des solutions
- Savoir chercher les limites éventuelles
- Comparer théorie et expérience

Mots-clés du projet :

- Fontaine de Héron
- Hauteur du jet
- Durée
- Viscosité

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN
DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR
685 AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP 08 - 76801
SAINT-ÉTIENNE-DU-ROUVRAY
TÉL : +33 2 32 95 66 21 - FAX : +33 2 32 95 66 31

Table des matières

Notations et Acronymes	3
Introduction	4
Organisation du travail	5
I Présentation du dispositif	6
1 Montage	6
1.1 Matériel nécessaire	6
1.2 Description du montage	7
2 Schéma de la fontaine de Héron	9
II Etude théorique	10
3 Sans prendre en compte la viscosité	10
3.1 Hauteur du jet	10
3.2 Durée de la fontaine	12
3.3 Comparaison avec les résultats obtenus	13
4 En prenant en compte la viscosité	14
4.1 Hauteur du jet	14
4.2 Durée de la fontaine	15
4.3 Comparaison avec les résultats obtenus	16
Conclusion et perspectives	17

Notations et Acronymes

Dans l'ensemble de ce rapport, le terme « fontaine » désigne une fontaine de Héron. De plus, les abréviations R_1 , R_2 et R_3 désignent les trois récipients dans le montage. De même, T_1 , T_2 et T_3 désignent les tuyaux reliant les récipients les uns aux autres.

Introduction

Dans le cadre de notre formation à l'INSA Rouen Normandie, nous devons réaliser un projet de physique au cours de notre quatrième semestre. Parmi les nombreux sujets proposés, nous avons choisi de réaliser une fontaine de Héron, afin d'étudier son fonctionnement.

Lorsque la fontaine est en fonctionnement, des flux circulent à travers les différents tuyaux. La première étape du fonctionnement de cette fontaine est l'eau qui descend du récipient le plus haut à celui situé le plus bas. Ce mouvement a lieu simplement grâce à la gravité.

Une fois que cette eau arrive dans le récipient vide, elle « chasse » l'air qui s'y situe, qui va alors se déplacer vers le récipient central.

Enfin, lorsque l'air arrive dans le récipient plein, il prend la place de l'eau déjà présente, qui remonte donc à travers le dernier tuyau et crée un jet à la sortie. L'eau qui tombe alors du jet permet à la fontaine de continuer à fonctionner : c'est le principe de la fontaine auto-entretenu. On remarque quand même que lorsque le récipient central est vide, la fontaine s'arrête car il n'y a plus de jet et donc, plus d'eau pour « amorcer » la fontaine.

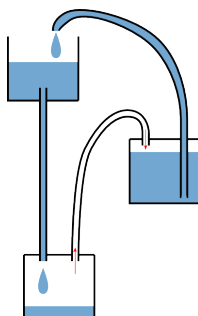


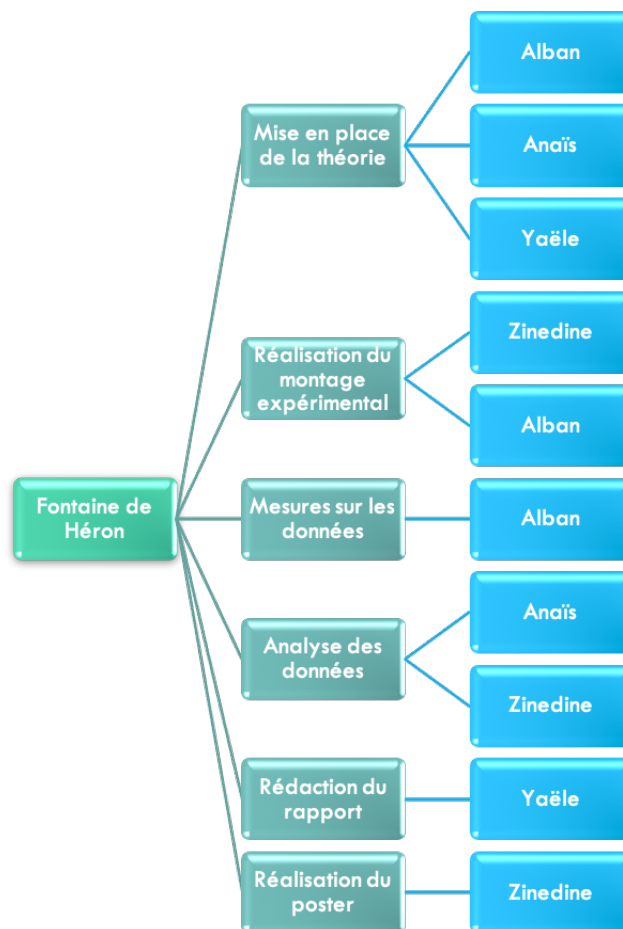
FIGURE 1 – Schéma simplifié du montage

Dans un premier temps, nous avons établi une théorie, c'est-à-dire réaliser des calculs afin d'obtenir la hauteur théorique du jet obtenu ainsi que la durée de la fontaine en fonction de différents paramètres. Dans un second temps, nous devons réaliser des expériences dans le but d'obtenir des données expérimentales. En raison de la fermeture de l'INSA, nous n'avons pas pu obtenir nos propres données, c'est pourquoi, nous avons utilisé des données bibliographiques. De plus, il nous fallait des données quantitatives précises, c'est pour cette raison que nous n'avons pas réalisé de dispositif chez nous. Enfin, il nous fallait comparer ces deux parties, dans le but de confirmer ou non l'étude théorique.

Organisation du travail

Lors des quatre premières semaines de projet, nous avons commencé par mettre en oeuvre notre propre fontaine de Héron afin de comprendre son fonctionnement. En parallèle, nous avons étudié la partie théorique de la fontaine, c'est-à-dire que nous avons réalisé les calculs afin de déterminer la formule théorique qui permet de calculer la hauteur du jet et la durée de la fontaine en fonction de différents paramètres.

Durant la période de fermeture de l'INSA, nous nous sommes penchés sur la corrélation entre la théorie et la pratique. Comme nous n'avions pas le matériel requis pour réaliser nos propres expériences, nous avons fait des recherches afin de trouver des données exploitables, notamment des résultats obtenus par de tierces personnes lors de leur réalisation de l'expérience.



Première partie

Présentation du dispositif

Avant d'établir une étude théorique de la fontaine de Héron, nous en avons réalisé une afin de visualiser comment celle-ci fonctionne.

1 Montage

1.1 Matériel nécessaire

Lors de notre première expérience, nous avons voulu réaliser une fontaine de Héron à l'aide de bouteilles plastiques et de tuyaux en plastique. Nous voulions tout d'abord percer les bouteilles afin d'y faire entrer et sortir les différents tuyaux, puis de combler les espaces avec de la pâte à modeler dans le but que le montage soit hermétique. Nous nous sommes très vite rendu compte que ce montage ne fonctionnerait pas puisque la pâte à modeler ne tenait pas et qu'il était très compliqué de percer des trous de la taille exacte des tuyaux dans des bouteilles en plastique. Nous avons alors décidé de réaliser notre montage avec du matériel de laboratoire.



FIGURE 2 – Montage que nous voulions réaliser

[3]
[2]

Pour ce second montage, nous avons eu besoin de trois récipients de même taille, fermés hermétiquement avec des bouchons. Dans chacun de ces bouchons se trouvaient deux trous dans lesquels nous avons fait passer les tuyaux afin de relier les récipients entre eux. Un récipient doit être vide (R_1), un second rempli d'eau (R_2) et le dernier (R_3) doit contenir un fond d'eau pour pouvoir mettre en fonctionnement la fontaine. Nous avons réussi à obtenir un montage fonctionnel mais en raison de la fermeture de l'INSA, nous n'avons pas pu prendre de photographie, c'est pourquoi nous avons utilisé les photographies trouvées sur Internet dont nous nous étions inspirés.



FIGURE 3 – Montage dont nous nous sommes inspirés

[1]

1.2 Description du montage

Maintenant que nous avons fait la liste du matériel que nous avons utilisé, voici comment nous avons monté les différents récipients pour faire fonctionner la fontaine.

Dans R_1 , l'extrémité du tuyau (T_3) le reliant à R_2 doit être placée en haut du récipient. Le placement du second tuyau (T_1), quant à lui n'a pas d'importance, c'est pourquoi nous avons choisi de le placer au fond du récipient.

Dans R_2 , l'extrémité du tuyau provenant de R_1 (T_3) doit être placée près du bouchon et ne doit pas être immergée, tandis que l'extrémité du deuxième tuyau (T_2) doit être immergée, au fond du récipient.

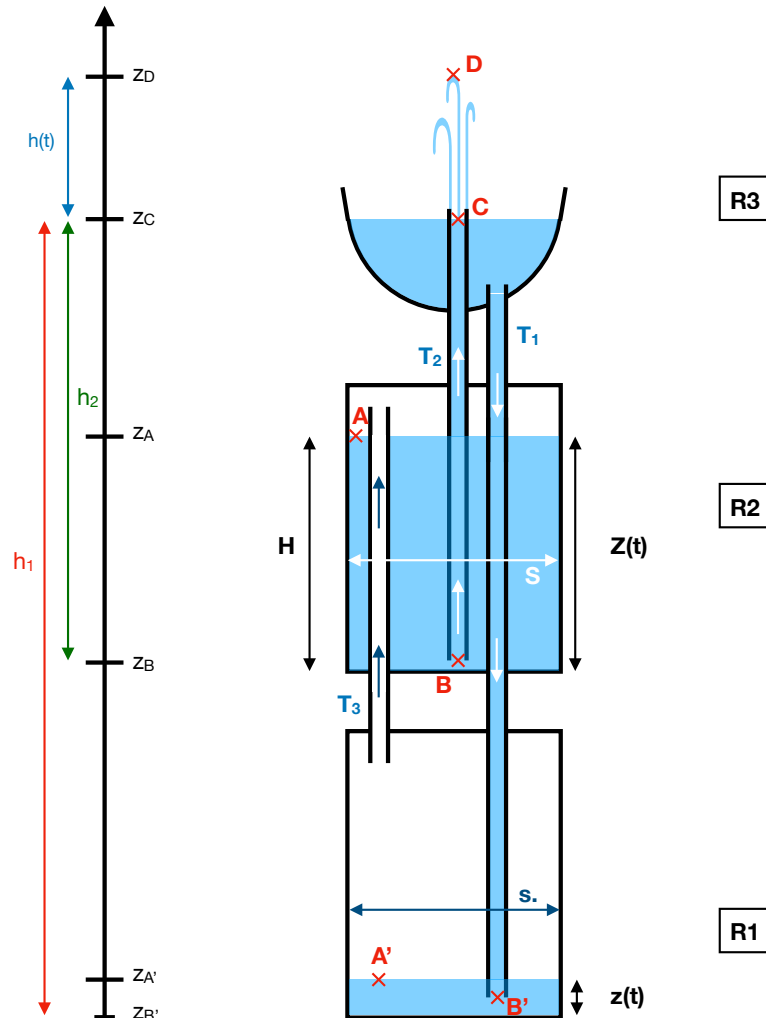
Dans R_3 , l'extrémité du tuyau le reliant à R_2 (T_2) doit être placée près du bouchon, soit en haut de la bouteille, tandis que le second tuyau (T_1) doit arriver au fond de ce récipient.

Afin que notre montage fonctionne, la disposition des récipients est très importante. Il faut que R_1 soit placé plus bas que R_2 , lui même plus bas que

R_3 , dans le but de créer des différences d'altitude. C'est pourquoi, nous avons placé le récipient R_1 sur le sol. Le récipient R_2 étant quant à lui placé sur une chaise. Enfin, nous avons maintenu R_3 afin qu'il soit plus haut que les deux autres. De plus, il devait être placé à l'envers, afin que son bouchon soit en bas. Ainsi, l'eau du récipient R_3 pouvait couler vers R_1 , à travers T_2 , simplement grâce à la gravité.

2 Schéma de la fontaine de Héron

Afin de mieux visualiser le fonctionnement de la fontaine de Héron, nous avons réalisé un schéma de celle-ci, en nommant les différents récipients et tuyaux, ainsi que les points importants. Ainsi, $h(t)$ est la hauteur du jet de la fontaine. On a aussi $h_1 = z_C - z_{B'}$, c'est-à-dire, la distance entre le fond du récipient le plus bas et le point de sortie du jet, et $h_2 = z_C - z_B$, c'est-à-dire la distance entre le fond du récipient du milieu et le point de sortie du jet. Enfin, on a $Z(t)$, qui est le niveau d'eau du récipient du milieu, et $z(t)$, le niveau d'eau du récipient du bas. On a donc $Z(0) = H$ et $Z(t)$ décroissante et $z(0) = 0$ et $z(t)$ croissante.



Deuxième partie

Etude théorique

Une fois que nous avons compris comment fonctionne une fontaine de Héron, nous avons établi une théorie, dans le but de la comparer avec les résultats obtenus par d'autres, lorsqu'ils avaient réalisé l'expérience.

3 Sans prendre en compte la viscosité

Dans un premier temps, nous avons établi une formule théorique pour la hauteur du jet et la durée de la fontaine, sans prendre en compte la viscosité.

3.1 Hauteur du jet

On applique le théorème de Bernoulli entre les points C et D :

$$\frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C = \frac{P_D}{\rho} + \frac{1}{2}v_D^2 + gz_D$$

Or, $P_C = P_D = P_0$ car les deux points sont en contact avec l'atmosphère et $v_D = 0$ car D est le sommet du jet, sa vitesse est donc nulle. On a alors :

$$\frac{1}{2}v_C^2 = g(z_D - z_C)$$

On a posé précédemment $h = z_D - z_C$. D'où,

$$h = \frac{1}{2g}v_C^2$$

Détermination de v_C :

On applique le théorème de Bernoulli entre A et C :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C$$

et la loi de l'hydrostatique entre A et C :

$$P_A + \rho gz_A = P_C + \rho gz_C$$

Or, C est au contact de l'atmosphère donc $P_C = P_0$. On a :

$$P_A = P_0 + \rho g(z_C - z_A)$$

On applique la loi de l'hydrostatique entre B' et C :

$$P_{B'} = P_0 + \rho g(z_C - z_{B'})$$

$$P_{B'} = P_0 + \rho gh_1$$

puis entre A' et B' :

$$\begin{aligned} P_{A'} &= P_{B'} + \rho g z_{A'} \\ P_{A'} &= P_0 + \rho g (h_1 - z_{A'}) \\ P_{A'} &= P_0 + \rho g (h_1 - z) \end{aligned}$$

On néglige v_A devant v_C car la vitesse aux surfaces est très basse.

$$P_A = P_{A'} = P_0 + \rho g (h_1 - z)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{P_0 + \rho g (h_1 - z)}{\rho} + g z_A &= \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_C^2 + g z_C \\ v_C^2 &= 2g (h_1 - z + z_A - z_C) \end{aligned}$$

Or, $z_C - z_A = z_C - z_B + z_B - z_A = Z - h_2$ donc

$$v_C = \sqrt{2g (h_1 - h_2 + Z - z)}$$

et donc

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2g} v_C^2 \\ h &= h_1 - h_2 + Z - z \end{aligned}$$

Limite de la fontaine :

Le volume d'eau total se conserve :

$$Z(t) + z(t) = H$$

A $t = 0$: $z(0) = 0$ et $Z(0) = H$ donc

$$v_C(t=0) = \sqrt{2g (h_1 - h_2 + H)}$$

A t_{max} : $z(t_{max}) = H$ et $Z(t_{max}) = 0$ donc

$$v_C(t_{max}) = \sqrt{2g (h_1 - h_2 - H)}$$

avec

$$h_1 - h_2 \geq H$$

La limite se trouve donc quand $h_1 - h_2 = H$.

On a donc :

$$\begin{aligned} h(0) &= h_1 - h_2 + H \\ h(t_{max}) &= h_1 - h_2 - H \end{aligned}$$

On pose alors

$$h_{moy} = h_1 - h_2$$

3.2 Durée de la fontaine

Entre t et $t + dt$, R_2 se vide de

$$dV = S |dZ|$$

$$dV = S \left| \frac{dZ}{dt} \right| dt$$

et R_1 se remplit de

$$dV' = sv_B dt$$

De plus, on a un écoulement stationnaire donc

$$dV = dV'$$

$$v_B = v_C$$

et $Z(t)$ diminue donc

$$dV = -S \left| \frac{dZ}{dt} \right| dt$$

on obtient alors

$$-S \frac{dZ}{dt} dt = sv_C dt$$

$$-S \frac{dZ}{dt} = s \sqrt{2g(h_1 - h_2 + Z - z)}$$

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g(h_1 - h_2 + Z - z)} = 0$$

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g} \sqrt{(h_1 - h_2 + Z - z)} = 0$$

$$\int_H^0 \frac{dZ}{\sqrt{(h_1 - h_2 + Z - z)}} = - \int_0^T \frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$$

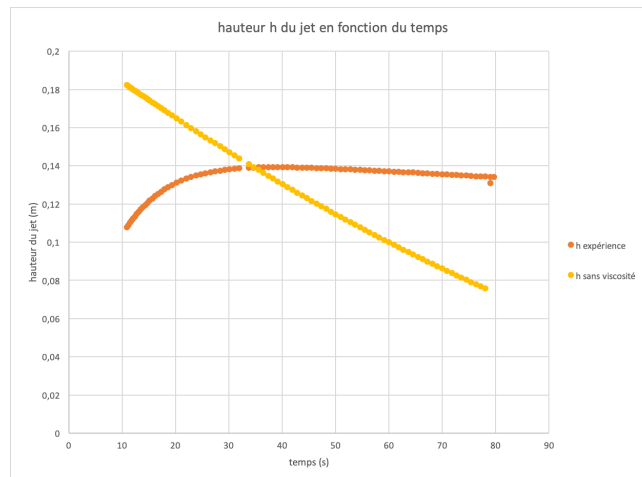
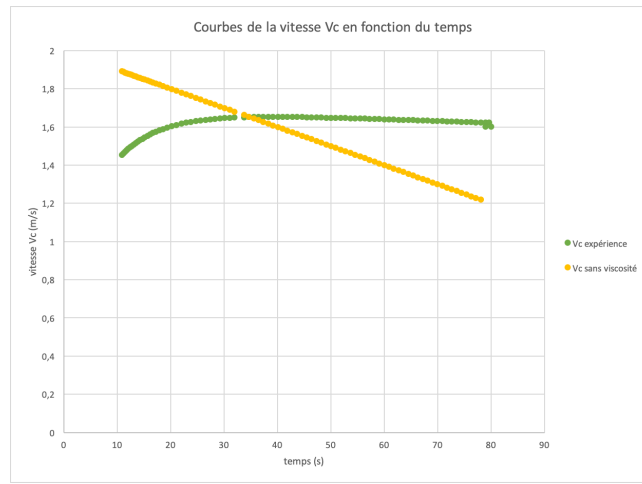
$$\left[\sqrt{h_1 - h_2 - H + 2Z} \right]_{Z=H}^0 = - \frac{s}{S} \sqrt{2g} T$$

On obtient finalement :

$$T = \frac{S}{s\sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_1 - h_2 + H} - \sqrt{h_1 - h_2 - H} \right)$$

3.3 Comparaison avec les résultats obtenus

Une fois que nous avons trouvé ces deux formules, nous avons tracé la courbe représentative de la formule obtenue pour la vitesse en C et la hauteur du jet, ainsi que la courbe expérimentale obtenue par des mesures sur les données que nous avons trouvées.



On remarque que la courbe théorique et la courbe pratique ne sont pas cohérentes, puisque l'une est croissante et l'autre décroissante. C'est pourquoi nous avons fait une autre étude en prenant en compte la viscosité.

4 En prenant en compte la viscosité

Afin d'obtenir une théorie plus proche de la pratique, nous avons, dans cette deuxième partie, pris en compte la viscosité de l'eau qui circule dans les tuyaux, et établi de nouvelles formules pour la hauteur du jet et la durée de la fontaine. La viscosité de l'eau à 20° C est de $1,00 \times 10^{-3}$ Pa.s

4.1 Hauteur du jet

En utilisant la loi de Darcy-Weisbach, on a :

$$\Delta P = \frac{Lv^2}{2d} f$$

avec f le coefficient de frottements, égal à $64 \times \frac{1}{Re}$, Re étant le nombre de Reynolds, tel que $Re = \frac{vd}{\text{viscosité}}$. Plus f est grand, plus les effets de la viscosité sont importants. Avec les données utilisées, on a $f = 0,064$. L est la longueur du tuyau et d son diamètre. Cette formule représente les pertes par viscosité dans le tuyau T_2 .

$$\begin{aligned} (\rho g z_C + P_C) - (\rho g z_A + P_A) &= \frac{\rho(z_B - z_C)v_C^2}{2d} f = \frac{-\rho h_2 v_C^2}{2d} f \\ \Rightarrow \rho g(z_C - z_A) + \frac{\rho h_2 f}{2d} v_C^2 &= P_A - P_C \end{aligned}$$

D'après le principe de l'hydrostatique entre B' et C , puis entre A' et B' , on a

$$\begin{aligned} P_{B'} &= P_0 + \rho g h_1 \\ P_{A'} &= P_0 + \rho g(h_1 - z) \end{aligned}$$

et $P_A = P_{A'}$. D'où

$$\begin{aligned} \rho g(z_C - z_A) + \frac{\rho h_2 f}{2d} v_C^2 &= P_0 + \rho g(h_1 - z) - P_0 = \rho g(h_1 - z) \\ \frac{\rho h_2 f}{2d} v_C^2 &= \rho g(h_1 - z - h_2 + Z) \\ v_C^2 &= \frac{2dg}{h_2 f} (h_1 - h_2 + Z - z) \\ v_C &= \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f} (h_1 - h_2 + Z - z)} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2g} v_C^2 \\ &= \frac{1}{2g} \frac{2dg}{h_2 f} (h_1 - h_2 + Z - z) \\ &= \frac{d}{h_2 f} (h_1 - h_2 + Z - z) \end{aligned}$$

On remarque que la vitesse et la hauteur sont proportionnelles à celles trouvées sans viscosité. De plus, on remarque que plus le liquide est visqueux, moins la hauteur est grande.

4.2 Durée de la fontaine

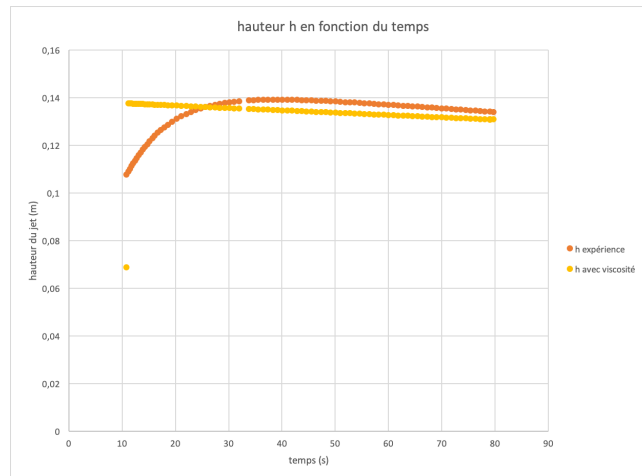
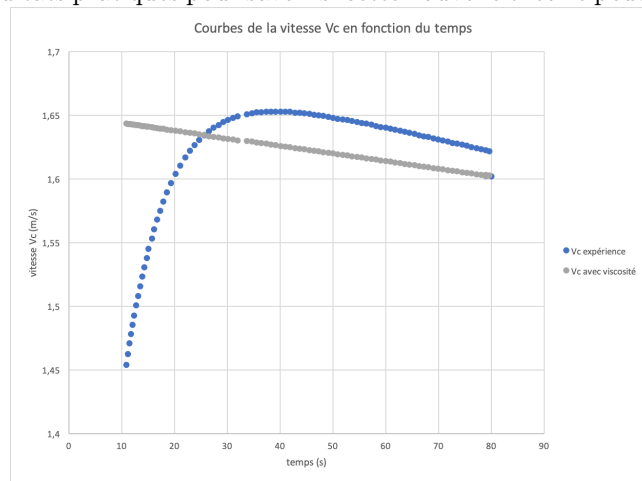
On part de la formule trouvée précédemment :

$$\begin{aligned}
 -S \frac{dZ}{dt} &= sv_C \\
 -S \frac{dZ}{dt} &= s \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f} (h_1 - h_2 + Z - z)} \\
 \frac{dZ}{\sqrt{h_1 - h_2 + Z - \underbrace{z}_{H-Z}}} &= -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f}} dt \\
 \int_H^0 \frac{dZ}{\sqrt{h_1 - h_2 + 2Z - H}} &= -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f}} \int_0^T dt \\
 \left[\sqrt{h_1 - h_2 + 2Z - H} \right]_{Z=H}^0 &= -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f}} [t]_0^T \\
 \sqrt{h_1 - h_2 - H} - \sqrt{h_1 - h_2 + H} &= -\frac{s}{S} \sqrt{\frac{2dg}{h_2 f}} T \\
 T &= \frac{S}{s} \sqrt{\frac{h_2 f}{2dg}} \left(\sqrt{h_1 - h_2 + H} - \sqrt{h_1 - h_2 - H} \right)
 \end{aligned}$$

On remarque ici, que plus le liquide est visqueux, plus la fontaine dure longtemps.

4.3 Comparaison avec les résultats obtenus

Maintenant que nous avons obtenu de nouvelles formules, nous les comparons avec les résultats pratiques pour savoir si cette nouvelle théorie peut être validée.



Cette fois-ci, les résultats obtenus par la théorie et la pratique sont plus cohérents que la première fois. On remarque néanmoins que le début des courbes sont différents. Cela est dû au fait que la fontaine prend quelques secondes à se mettre en route. Malgré cela, nous pouvons valider cette théorie.

Conclusion et perspectives

Pour conclure, nous avons mené une étude sur la fontaine de Héron. Nous avons remarqué que dans un premier temps, pour expliquer simplement le fonctionnement de cette fontaine, nous avons utilisé une théorie simple, sans prendre en compte la viscosité. En revanche, lorsque nous avons voulu exploiter des données, cette première théorie n'était pas valide, c'est pourquoi, nous avons du modifier notre première théorie en intégrant la viscosité dans l'étude.

L'E.C. P6 nous a permis de découvrir les fontaines de Héron et mettre en place une étude dans le but de comprendre son fonctionnement. Cela nous a donc permis de progresser en physique de manière ludique.

Enfin, on pourrait faire des mesures sur une fontaine de Héron, que nous aurions mis en place, chose que nous n'avons pas pu faire en raison de la fermeture de l'INSA et modifier encore une fois notre théorie dans le but d'expliquer le démarrage de la fontaine. De plus, on pourrait étudier une autre fontaine auto-entretenu, telle que la fontaine gravitationnelle, utilisée dans les jardins de Versailles.

Références

- [1] Les fontaines auto-entretenu. <https://montpe1.weebly.com/la-fontaine-de-heron.html>.
- [2] Mr Ayaz. Faire fontaine de non stop heron avec la bouteille en plastique. <https://www.youtube.com/watch?v=igMIOGxATUI>, 2017.
- [3] David. Exp@rience @ la maison : la fontaine de heron. <https://kidiscience.cafe-sciences.org/articles/experience-a-la-maison-la-fontaine-de-heron/>, 2013.
- [4] Didier N@br@da. Fontaine de heron en cuivre. <https://www.youtube.com/watch?v=euoDsKPwhXs>, 2015.