

## Projet Pendule



**Étudiants :**

Minh Triet TO  
Qi LI

Wei WANG  
Qixiao CHEN

**Enseignant-responsable du projet :**  
Bernard Gleyse



**Date de remise du rapport :**

15/06/2020

**Référence du projet :**

STPI/P6/2020 – 07

**Intitulé du projet :**

Étude d'un oscillateur (cas du pendule)

**Type de projet :**

Etude théorique, Expérimental, simulation, comparaison

**Objectifs du projet :**

Étudier les oscillations du pendule simple dans des différents cas de mouvement. Étudier l'équation différentielle non linéaire décrivant le mouvement du pendule. Avancer un calcul exact de la période du mouvement et proposer des méthodes de résolution numérique par programmation. Comparer enfin les résultats obtenus entre les méthodes numériques.

**Mots-clefs du projet :**

Oscillation, Méthode numérique, Mouvement

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Méthodologie, organisation du travail</b>	<b>5</b>
<b>2 Travail réalisé et résultats</b>	<b>6</b>
2.1 Généralités . . . . .	6
2.1.1 Étude du mouvement . . . . .	6
2.1.2 Résolution mathématique de l'équation différentielle en 3 cas . . . . .	8
2.2 Méthode numérique . . . . .	10
2.2.1 Présentation de la méthode RK4 . . . . .	10
2.2.2 Utilisation de la méthode RK4 en résolvant l'équation . . . . .	11
2.3 Simulation Informatique . . . . .	13
2.3.1 Interprétation graphique via code Pascal et Maple . . . . .	13
2.3.2 Comparaison des résultats obtenus . . . . .	19
<b>3 Conclusion et perspectives</b>	<b>20</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>21</b>
<b>Annexe</b>	<b>22</b>

# Introduction

## **Contexte du travail :**

En physique, un pendule est un corps solide pouvant osciller autour d'un point ou d'un axe fixe et qui, écarté de sa position d'équilibre, y retourne en oscillant sous l'effet d'une force, par exemple la gravité. Le mot pendule donné par Huygens (1629-1695) vient du latin *pendere*, qui signifie "pendre".

L'étude d'un oscillateur est un projet relativement complet, qui rassemble de la programmation, de l'analyse numérique, de la mécanique mais aussi des mathématiques.

## **Objectifs à atteindre pour le projet :**

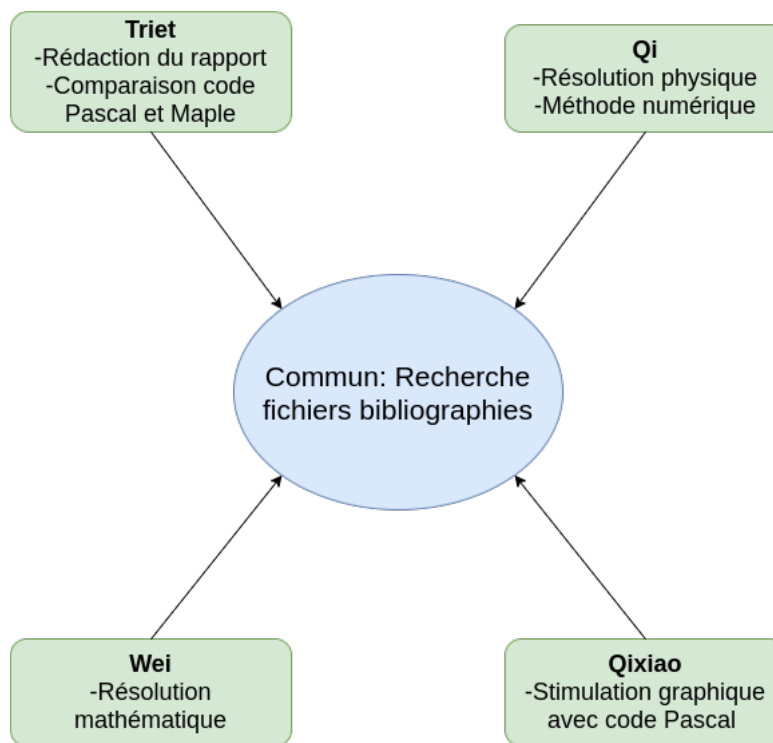
Les années précédentes s'étaient concentrées sur l'aspect expérimental ou sur le mouvement avec frottements. Cette année nous travaillons sur la résolution de la période du pendule en 3 cas : mouvement périodique, mouvement critique et mouvement circulaire.

Nous allons dans un premier temps, à travers ce dossier, vous présenter les méthodes et l'organisation du groupe dans le suivi du travail. Ensuite nous expliquerons notre étude mathématique du pendule simple, ainsi que celle effectuée à l'aide de différents outils informatiques et aussi de nombreuses méthodes numériques. Enfin, nous appliquons les résultats obtenus en programmation Pascal et Maple, puis visualiser avec Excel Numbers (logiciel de tableur, développé par Apple).

# Chapitre 1

## Méthodologie, organisation du travail

La répartition des tâches s'est effectuée de la manière suivante :



Nous avons discuté avant des points forts et points faibles de chacun afin de choisir la tâche appropriée. Nous travaillons donc chacun sur notre partie, tout en ayant le soutien du groupe en cas de problèmes, de questions ou simplement pour partager ses idées. Les fichiers bibliographies sont aussi mises à jour chaque semaine. A cause du maladie, nous avons dû travailler à distance à partir de la 4e séance. Nous avons donc créé un groupe sur un réseau social où nous pouvions partager quasiment en temps réel nos travaux. Des réunions sont effectuées toutes les semaines pour discuter de l'avancement du projet.

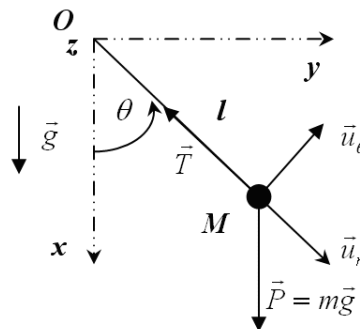
# Chapitre 2

## Travail réalisé et résultats

### 2.1 Généralités

#### 2.1.1 Étude du mouvement

Le système est étudié dans un référentiel R supposé Galiléen.  
Le système est constitué d'un fil inextensible de longueur  $l$ , d'une bille de masse  $m$ , et la position du pendule est repérée par l'angle orienté ou l'écart à l'équilibre entre la verticale et la direction du fil.



Soit  $(O, \vec{U}_x, \vec{U}_y)$  un repère orthonormal,  $(O, \vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$  un repère orthonormal polaire.  
De l'image, nous pouvons obtenir

$$\vec{U}_r = \cos\theta \vec{U}_x + \sin\theta \vec{U}_y$$

$$\vec{U}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{U}_x + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{U}_y = \sin\theta \vec{U}_x + \cos\theta \vec{U}_y$$

$$\vec{U}_x = \cos\theta \vec{U}_r + \sin\theta \vec{U}_\theta$$

— Vecteur position (avec  $\theta$  la vitesse angulaire) :

$$\vec{OM} = l \vec{U}_r$$

— Vecteur vitesse :

On peut dériver Vecteur vitesse de Vecteur position

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = l \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \vec{U}_r \frac{dl}{dt}$$

Or  $l$  ne varie pas, donc on obtient

$$\vec{v} = l \frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_r}{dt} &= \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} * \frac{d\theta}{dt} = \frac{-d\theta}{dt} \sin\theta \vec{U}_x + \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \vec{U}_y = \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta \\ \Rightarrow \frac{d\vec{U}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta \end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons obtenir le vecteur de vitesse angulaire

$$\vec{v} = l \frac{d\vec{U}_r}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta$$

— Vecteur accélération :

on a  $O\vec{M} = l\vec{U}_r$ , et puis  $\vec{v} = \frac{dO\vec{M}}{dt} = l \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \vec{U}_r \frac{dl}{dt}$  :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2 O\vec{M}}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{dt} \vec{U}_r + l \frac{d\vec{U}_r}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 l}{dt^2} \vec{U}_r + \frac{dl}{dt} \frac{d\vec{U}_r}{dt} + \frac{dl}{dt} \frac{d\vec{U}_r}{dt} + l \frac{d^2 \vec{U}_r}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 l}{dt^2} \vec{U}_r + \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta + l \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \vec{U}_\theta \right) \\ &= -l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{U}_r + l \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{U}_\theta \end{aligned}$$

donc on a :

$$\vec{a} = -l(\dot{\theta})^2 \vec{U}_r + l\ddot{\theta} \vec{U}_\theta$$

Grâce à cette équation, nous pouvons décomposer  $\vec{a}$  en deux parties :

$$\begin{aligned} \vec{a}_r &= -l(\dot{\theta})^2 \\ &\text{et} \\ \vec{a}_\theta &= l\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} U_\theta &= ml\ddot{\theta} = -mgsin\theta \\ ml\ddot{\theta} + mgsin\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

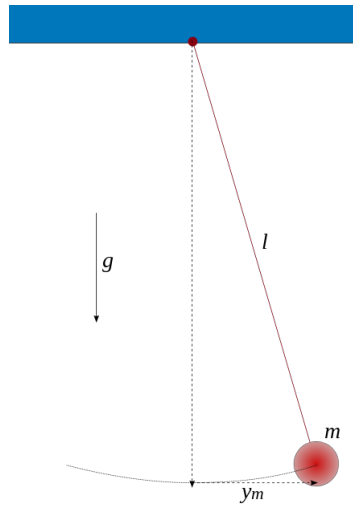
Lorsque l'amplitude d'oscillation est faible (c'est-à-dire lorsque la valeur de  $\theta$  est très petite), nous sommes  $sin\theta \approx \theta$ .

Donc on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$



## 2.1.2 Résolution mathématique de l'équation différentielle en 3 cas



On considère le problème de Cauchy :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Avec les conditions initiales :  $t = 0, \theta(0) = \theta_0 = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$

Posons  $a = l - \frac{l^2(\dot{\theta}_0)^2}{2g}$

Le bilan énergétique donne :

$$\begin{aligned} \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{2} - gl \cos \theta &= -ga = -gl + \frac{l^2(\dot{\theta}_0)^2}{2} \\ \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{2} + gl(1 - \cos \theta) &= \frac{l^2(\dot{\theta}_0)^2}{2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{l} \sqrt{2g(l \cos \theta - a)} \\ dt &= \frac{l d\theta}{\sqrt{2g(l \cos \theta - a)}} \\ t &= \frac{l}{\sqrt{2g}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{l \cos \theta - a}} \end{aligned}$$

### Cas 1 : Mouvement périodique $a > -l$

Autrement dit,  $l\dot{\theta}_0 < 2\sqrt{gl}$ , en prenant  $l = 1$ , on a  $\dot{\theta}_0 < 6.27$

Posons  $a = l \cos \alpha$ , ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\alpha = \theta_m$  l'amplitude maximale

$$\text{Posons } \begin{cases} k^2 = \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ \sin \frac{\Psi}{2} = x \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

D'Où :

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\cos \Psi - \cos \alpha}}$$

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\Psi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$u = \operatorname{sn}\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t\right)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sn}(\omega t)$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

De période  $T = 4 \left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right) K(k)$  avec  $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ , l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Pour calculer  $k$ , il suffit de faire :

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{2l} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l\dot{\theta}_0^2}{2g}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 = \frac{\dot{\theta}_0^2}{4\omega^2}$$

Nous avons donc  $\theta = \alpha$  après  $\frac{1}{4}$  de période, puis  $\theta = 0$  après  $\frac{1}{4}$  de période en plus (soit  $\frac{T}{2}$ ), puis  $\theta = -\alpha$  après  $\frac{3}{4}T, \dots$  Donc  $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!}\right)^2 k^{2n}$  où  $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \end{cases}$

( $n \geq 1$ ). Remarquons que  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , on a au final

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \left(\frac{1 \times 3}{4 \times 2}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{8 \times 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \dots$$

### Cas 2 : Mouvement critique $a = -l$

$$l\dot{\theta}_0 = 2\sqrt{gl} \text{ d'où } \alpha = \pi \text{ et } \dot{\theta}_0 = 2\omega$$

$$\text{Posons } \sin \frac{\theta}{2} = u$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{th}\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t\right) = \operatorname{th}(\omega t)$$

Remarque : quand  $t$  passe de 0 à  $\infty$ ,  $\theta$  va de 0 à  $\pi$ .

### Cas 3 : Mouvement circulaire

$$a < -l \quad (l\dot{\theta}_0 > 2\sqrt{gl})$$

$$\text{Posons } \begin{cases} k^2 = \frac{2l}{l-a} & (0 < k^2 < 1) \\ \sin \frac{\Psi}{2} = x \\ \sin \frac{\theta}{2} = u \end{cases}$$

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\Psi}{\sqrt{l(1 - 2\sin^2(\frac{\Psi}{2})) - a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{l-a}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$u = \text{sn} \left( \left( \sqrt{\frac{l-a}{2l}} \sqrt{\frac{g}{l}} \right) t \right)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \text{sn} \left( \left( \sqrt{\frac{l-a}{2l}} \sqrt{\frac{g}{l}} \right) t \right)$$

On a  $\theta = \pi$  pour  $t = \left( \sqrt{\frac{2}{g(l-a)}} l \right) \text{IK}(k)$ , avec  $\dot{\theta} \neq 0$ . D'où le mouvement sur un cercle dans une seule direction.

$$\text{Pour calculer } k \text{ il suffit de faire } \begin{cases} \frac{l-a}{l} = \frac{l\dot{\theta}_0^2}{2g} = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega^2} \\ k^2 = \frac{2l}{l-a} = \frac{4\omega^2}{\dot{\theta}_0^2} \end{cases}$$

## 2.2 Méthode numérique

### 2.2.1 Présentation de la méthode RK4

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901. Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite. la méthode RK4 est un cas particulier d'usage très fréquent. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$Y' = F(t, Y) \text{ et } Y(t_0) = Y_0 \text{ avec } t \in \{t_0, \dots, T\}$$

La méthode RK4 est la suivante :

Choisissons une subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, \dots, T]$

On a  $t_n = t_0 + nh$  pour  $n \in \{0, \dots, N + 1\}$  avec  $h = \frac{T - T_0}{N + 1}$ . On pose aussi :

$$Y_n = Y(t_n)$$

Une approximation de solution  $Y$  en  $t_n$  du problème de Cauchy.

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

d'où :

$$K_1 = f(t_n, Y_n)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(t_n + h, Y_n + hK_3)$$

L'idée est que la valeur suivante ( $y_{n+1}$ ) est approchée par la somme de la valeur actuelle ( $y_n$ ) et du produit de la taille de l'intervalle ( $h$ ) par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes :

- $K_1$  est la pente au début de l'intervalle .
- $K_2$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $K_1$  pour calculer la valeur de  $y$  au point  $t_n + \frac{h}{2}$  par le biais de la méthode d'Euler .
- $K_3$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente  $K_2$  pour calculer  $y$  .
- $K_4$  est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de  $y$  calculée en utilisant  $K_3$ .

## 2.2.2 Utilisation de la méthode RK4 en résolvant l'équation

Dans cette partie, on va s'intéresser à la résolution numérique de l'équation différentielle non linéaire, en utilisant méthode numérique RK4 :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

Conditions initiales :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$  et  $z(0) = z_0$

Prenons  $z = \dot{\theta}$ .

Nous avons un problème de Cauchy avec  $Y' = F(t, Y)$  et  $Y(t_0) = Y_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  (avec  $t \in [t_0, T]$ ).

En prenant  $Y = (\theta, z)^t$  et  $F(t, Y) = F(t, \theta, z) = (z, -\omega^2 \sin \theta)^t$  (car  $Y' = (z, z')^t$  et  $z' = \ddot{\theta}$ )

Nous pouvons écrire sous la forme scalaire :

$$F(t, \theta, z) = \begin{pmatrix} f_1(t, \theta, z) \\ f_2(t, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\omega^2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Choisissons une subdivision de l'intervalle de temps  $[t_0, \dots, T]$

Par exemple si  $t_0 = 0$ , nous prenons un pas constant  $h = t_{i+1} - t_i$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  et  $t_i = ih$  pour  $i \in \{0, \dots, N + 1\}$  avec  $h = \frac{T}{N + 1}$  et nous obtenons l'équation récurrente vectorielle dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$Y_n = (\theta_n, z_n)^t \in \mathbb{R}^2$$

ce qui donne :

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Avec  $K_i = (k_{i1}, k_{i2})^t, i = \{1, \dots, 4\}$  et  $Y_0$  donné.

et donc

$$\begin{aligned} K_1 &= F(t_n, Y_n) \\ K_2 &= F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= F\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 &= F(t_n + h, Y_n + hK_3) \end{aligned}$$

En utilisant les fonctions scalaires  $f_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} k_{11} &= f_1(t_n, \theta_n, z_n) = z_n \\ k_{12} &= f_2(t_n, \theta_n, z_n) = -\omega^2 \sin(\theta_n) \\ k_{21} &= f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{11}, z_n + \frac{h}{2}k_{12}\right) = z_n + \frac{h}{2}k_{12} = z_n - \omega^2 \frac{h}{2} \sin(\theta_n) \\ k_{22} &= f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{11}, z_n + \frac{h}{2}k_{12}\right) = -\omega^2 \sin\left(\theta_n + \frac{h}{2}k_{11}\right) = -\omega^2 \sin\left(\theta_n + \frac{h}{2}z_n\right) \\ k_{31} &= f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{21}, z_n + \frac{h}{2}k_{22}\right) = z_n + \frac{h}{2}k_{22} \\ k_{32} &= f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \theta_n + \frac{h}{2}k_{21}, z_n + \frac{h}{2}k_{22}\right) = -\omega^2 \sin\left(z_n + \frac{h}{2}k_{21}\right) \\ k_{41} &= f_1(t_n + h, \theta_n + hk_{31}, z_n + hk_{32}) = z_n + hk_{32} \\ k_{42} &= f_2(t_n + h, \theta_n + hk_{31}, z_n + hk_{32}) = -\omega^2 \sin(\theta_n + hk_{31}) \end{aligned}$$

Nous obtenons les 2 équations récurrentes scalaires suivantes :

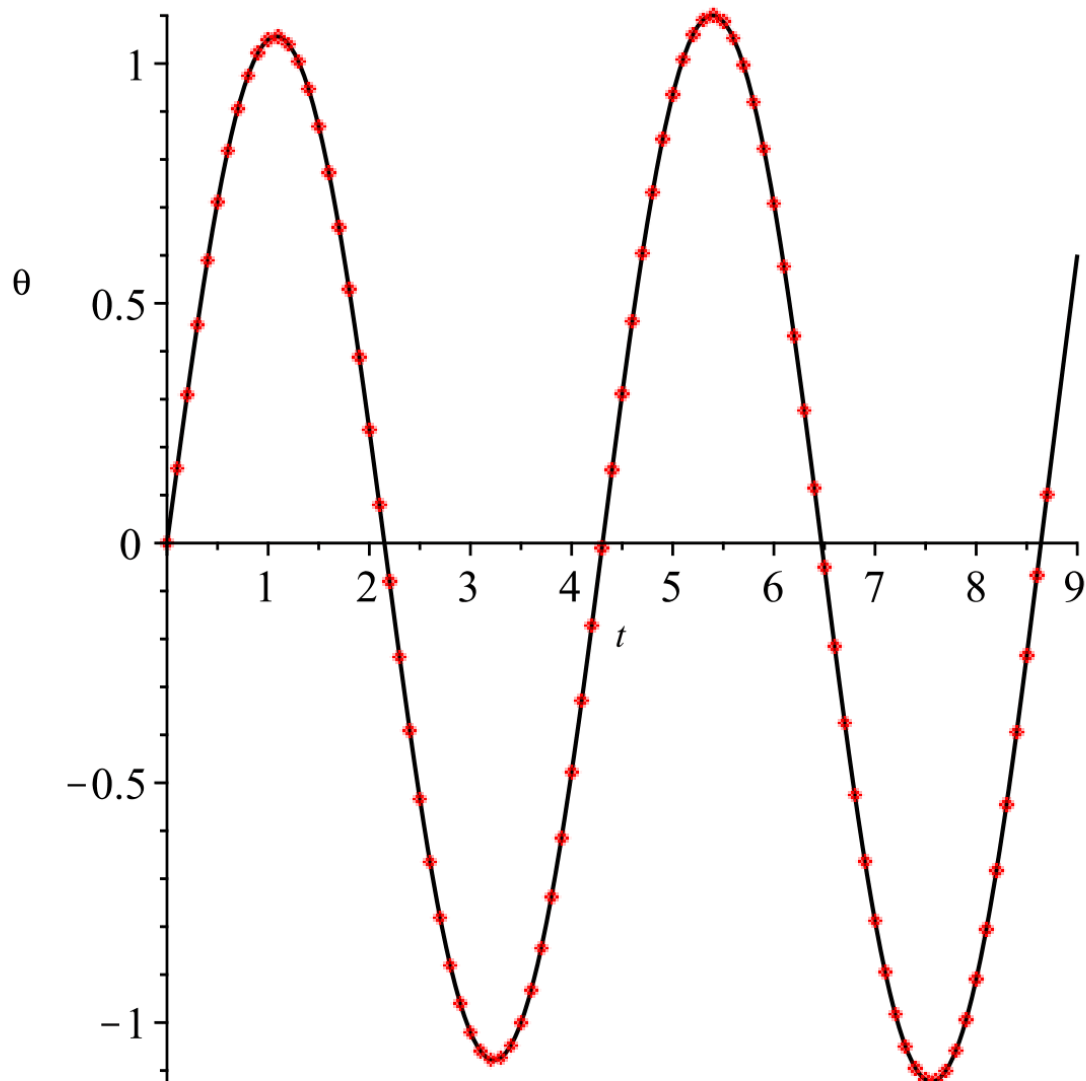
$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \end{aligned}$$

## 2.3 Simulation Informatique

### 2.3.1 Interprétation graphique via code Pascal et Maple

Dans les premiers temps, nous avons fait une simulation numérique par un programme Pascal qui nous permet de trouver une solution approchée du problème de Cauchy du Pendule simple sans frottement selon la méthode de RK4. Puis nous comparons les résultats obtenus avec ceux du système de calcul formel Maple (Le code est en annexe) :

Voici le graphique de la position angulaire  $\theta$  en radian en fonction du temps  $t$  pour la solution approchée  $\theta_n$  avec les conditions initiales  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = \frac{\pi}{2}$  et le pas  $h = 0.1$ . n



Nous obtenons le tableau ( $T, p_i$  positions angulaires ,  $v_i$  vitesses angulaires) et les graphiques suivants :

En prenant :

—  $V_{1_0} = \frac{\pi}{2}$  , Couleur Bleue.

—  $V_{2_0} = \frac{\pi}{4}$  , Couleur Verte.

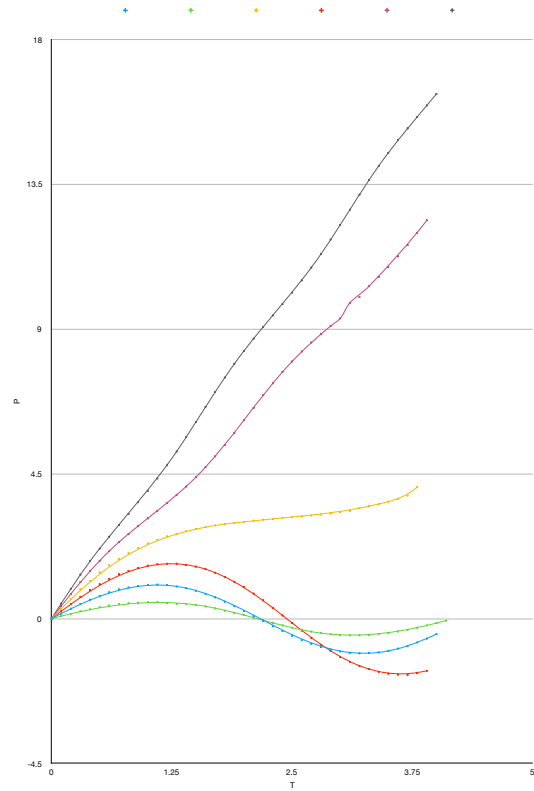
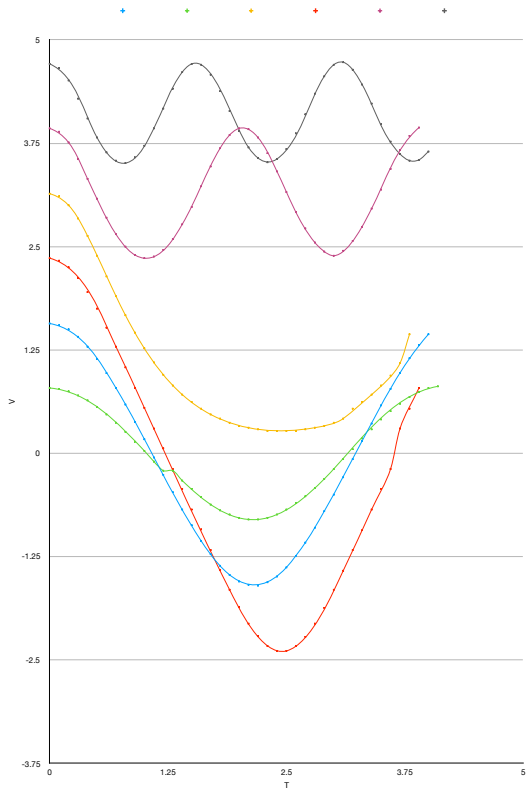
—  $V_{3_0} = \pi$  , Couleur Jaune.

—  $V_{4_0} = \frac{3\pi}{4}$  , Couleur Rouge.

—  $V_{5_0} = \frac{5\pi}{4}$  , Couleur Rose.

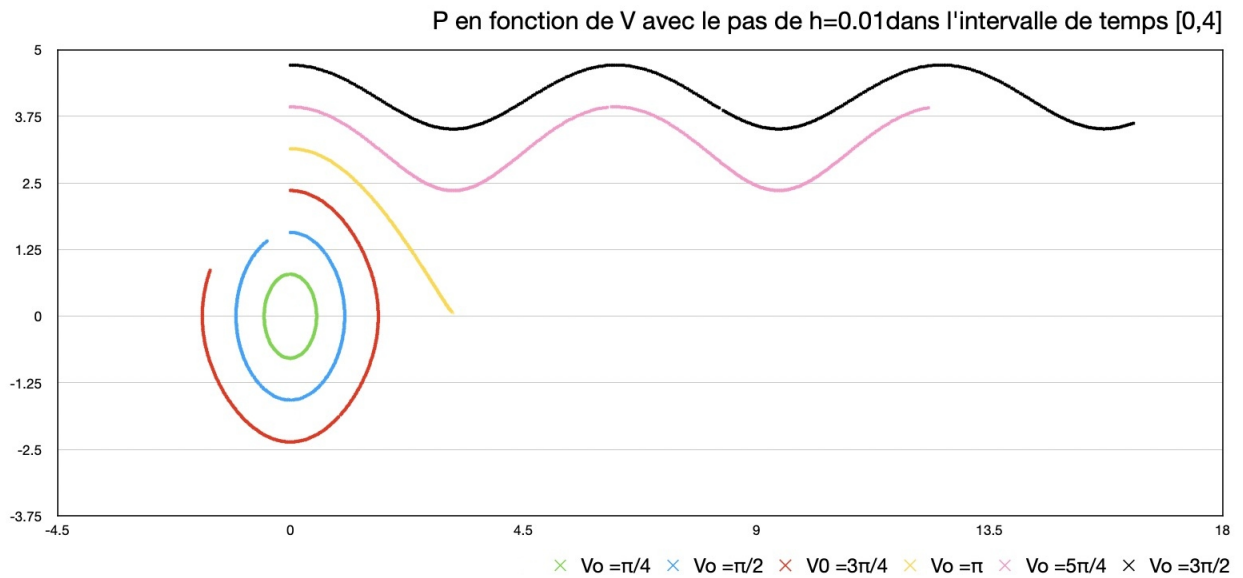
—  $V_{6_0} = \frac{3\pi}{2}$  , Couleur Noire.

T	P1	V1	P2	V2	P3	V3	P4	V4	P5	V5	P6	V6
0.0	0.00	1.57	0.00	0.79	0.00	3.14	0.00	2.36	0.00	3.93	0.00	4.71
0.1	0.16	1.55	0.08	0.78	0.31	3.11	0.23	2.33	0.39	3.89	0.47	4.66
0.2	0.31	1.50	0.15	0.75	0.62	3.00	0.46	2.25	0.77	3.76	0.93	4.51
0.3	0.46	1.41	0.23	0.70	0.91	2.84	0.68	2.12	1.14	3.56	1.37	4.29
0.4	0.59	1.29	0.29	0.64	1.18	2.63	0.89	1.95	1.48	3.32	1.79	4.05
0.5	0.71	1.14	0.36	0.56	1.44	2.39	1.07	1.75	1.80	3.08	2.18	3.82
0.6	0.82	0.97	0.41	0.47	1.66	2.14	1.24	1.52	2.10	2.85	2.55	3.64
0.7	0.91	0.79	0.45	0.37	1.86	1.90	1.38	1.29	2.38	2.65	2.91	3.54
0.8	0.97	0.59	0.48	0.26	2.04	1.67	1.49	1.04	2.63	2.50	3.26	3.51
0.9	1.02	0.38	0.50	0.14	2.20	1.46	1.58	0.79	2.88	2.40	3.62	3.58
1.0	1.05	0.17	0.51	0.03	2.34	1.27	1.65	0.55	3.12	2.36	3.98	3.72
1.1	1.06	-0.05	0.51	-0.10	2.45	1.10	1.69	0.30	3.35	2.38	4.36	3.93
1.2	1.04	-0.26	0.49	-0.21	2.56	0.95	1.71	0.06	3.59	2.46	4.77	4.17
1.3	1.00	-0.47	0.46	-0.21	2.64	0.82	1.71	-0.19	3.85	2.59	5.20	4.41
1.4	0.95	-0.68	0.46	-0.33	2.72	0.71	1.67	-0.43	4.11	2.77	5.65	4.61
1.5	0.87	-0.87	0.43	-0.43	2.79	0.62	1.62	-0.68	4.40	2.98	6.12	4.71
1.6	0.77	-1.06	0.38	-0.53	2.85	0.54	1.54	-0.92	4.71	3.23	6.59	4.70
1.7	0.66	-1.22	0.32	-0.62	2.90	0.47	1.43	-1.17	5.05	3.47	7.05	4.58
1.8	0.53	-1.36	0.25	-0.69	2.94	0.42	1.30	-1.41	5.40	3.69	7.50	4.38
1.9	0.39	-1.47	0.18	-0.74	2.98	0.37	1.15	-1.65	5.78	3.85	7.93	4.14
2.0	0.24	-1.55	0.11	-0.78	3.01	0.33	0.98	-1.86	6.17	3.93	8.33	3.90
2.1	0.08	-1.59	0.03	-0.80	3.05	0.31	0.78	-2.06	6.56	3.92	8.71	3.70
2.2	-0.08	-1.60	-0.05	-0.80	3.08	0.29	0.57	-2.21	6.95	3.82	9.07	3.57
2.3	-0.24	-1.56	-0.13	-0.78	3.10	0.27	0.34	-2.33	7.32	3.63	9.43	3.52
2.4	-0.39	-1.49	-0.21	-0.74	3.13	0.27	0.10	-2.39	7.68	3.41	9.78	3.56
2.5	-0.53	-1.38	-0.28	-0.68	3.16	0.27	-0.14	-2.39	8.00	3.16	10.14	3.68
2.6	-0.67	-1.24	-0.34	-0.60	3.18	0.27	-0.37	-2.33	8.31	2.92	10.52	3.87
2.7	-0.78	-1.08	-0.40	-0.52	3.21	0.29	-0.60	-2.22	8.59	2.72	10.92	4.10
2.8	-0.88	-0.90	-0.45	-0.42	3.24	0.31	-0.81	-2.06	8.85	2.55	11.34	4.35
2.9	-0.96	-0.70	-0.48	-0.31	3.27	0.33	-1.01	-1.87	9.10	2.44	11.79	4.56
3.0	-1.02	-0.50	-0.51	-0.19	3.31	0.37	-1.19	-1.65	9.34	2.39	12.25	4.70
3.1	-1.06	-0.29	-0.52	-0.07	3.35	0.42	-1.34	-1.42	9.82	2.45	12.72	4.73
3.2	-1.08	-0.07	-0.52	0.05	3.44	0.54	-1.47	-1.17	10.00	2.57	13.19	4.64
3.3	-1.07	0.15	-0.51	0.18	3.50	0.62	-1.57	-0.93	10.34	2.74	13.64	4.46
3.4	-1.05	0.36	-0.48	0.29	3.57	0.71	-1.65	-0.68	10.63	2.96	14.08	4.23
3.5	-1.00	0.58	-0.45	0.41	3.64	0.82	-1.71	-0.43	10.93	3.19	14.49	3.98
3.6	-0.93	0.78	-0.40	0.51	3.73	0.94	-1.74	-0.19	11.27	3.44	14.88	3.77
3.7	-0.85	0.97	-0.35	0.60	3.83	1.09	-1.75	0.30	11.62	3.67	15.25	3.62
3.8	-0.74	1.15	-0.28	0.68	4.09	1.44	-1.69	0.54	12.00	3.84	15.60	3.54
3.9	-0.62	1.31	-0.21	0.74			-1.62	0.79	12.39	3.94	15.96	3.55
4.0	-0.48	1.44	-0.14	0.79							16.32	3.65
4.1			-0.06	0.81								





Essayons de dessiner le portrait de phase :



On peut remarquer que :

- $v < \pi$  : mouvement périodique
- $v = \pi$  : mouvement critique
- $v > \pi$  : mouvement circulaire

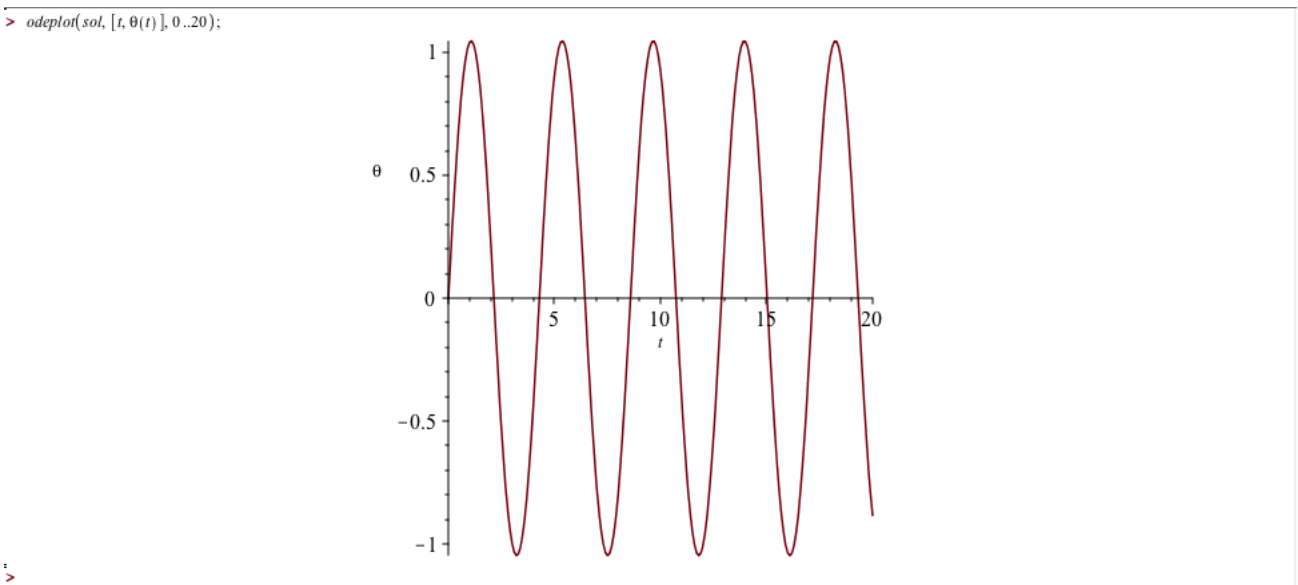
Maintenant on va essayer de trouver les solutions du problème de Cauchy à l'aide de Maple. Le logiciel couvre un large domaine mathématique : avec ce logiciel on peut travailler sur des quantités numériques, des polynômes, des fonctions, réaliser des dérivations, des intégrations, des calculs sur les matrices, résoudre des systèmes d'équations linéaires, des équations différentielles etc.

```

> eq := diff(θ(t), t, t) +  $\frac{\pi^2}{4}$  · sin(θ(t)) = 0;
                                     eq :=  $\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + \frac{\pi^2 \sin(\theta(t))}{4} = 0$  (1)
> ini := θ(0) = 0, D(θ)(0) =  $\frac{\pi}{2}$ ;
                                     ini := θ(0) = 0, D(θ)(0) =  $\frac{\pi}{2}$  (2)
> sol := dsolve({eq, ini}, {θ(t)}, numeric);
                                     sol := proc(x_rkf45) ... end proc (3)
> sol(1);
                                     [t = 1., θ(t) = 1.04147878320020,  $\frac{d}{dt} \theta(t) = 0.156205077796176$ ] (4)
> sol(0);
                                     [t = 0., θ(t) = 0.,  $\frac{d}{dt} \theta(t) = 1.57079632679490$ ] (5)
> eval(θ(t), sol(1));
                                     1.04147878320020 (6)
> eval([t, θ(t)], sol(0));
                                     [0., 0.] (7)
>
> with(plots);
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display,
dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot,
listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supporte, polyhedraplot,
rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, texplot, texplot3d, tubeplot] (8)

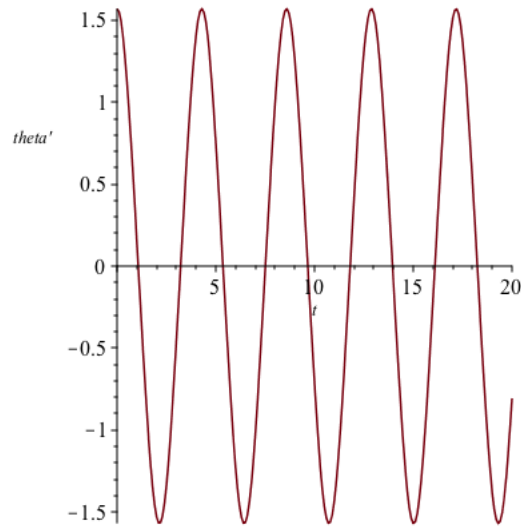
```

### Résolution numérique du problème de Cauchy



Visualisation de la résolution numérique : Position en fonction du temps

> odeplot(sol, [t, diff(theta(t), t)], 0..20)



f := t -> 2 \* arcsin(1/2 \* JacobiSN(Pi/2 \* t, 1/2));

$$f := t \mapsto 2 \arcsin\left(\frac{\text{JacobiSN}\left(\frac{t\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)}{2}\right)$$

(9)

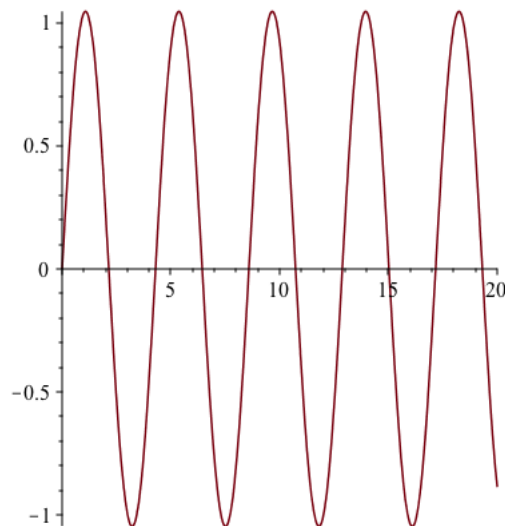
> f(0); evalf(%); simplify(D(f)(0)); evalf(%);

0  
0.  
 $\frac{\pi}{2}$   
1.570796327

(10)

Visualisation de la résolution numérique : Vitesse en fonction du temps  
f : solution exacte (theta fonction du temps)

> plot(f, 0..20)



T := 4 \* (2/Pi) \* EllipticK(1/2); evalf(%);

$$T := \frac{8 \text{EllipticK}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}$$

4.292728028

(11)

> with(DEtools):

Visualisation de la solution exacte  
et T : période exacte et valeur numérique

```

=> with(DEtools):
> sys := D(y1)(t) = y2(t), D(y2)(t) = - $\frac{\pi^2}{4} \cdot \sin(y1(t));$ 
sys := D(y1)(t) = y2(t), D(y2)(t) = - $\frac{\pi^2 \sin(y1(t))}{4}$ 

```

```

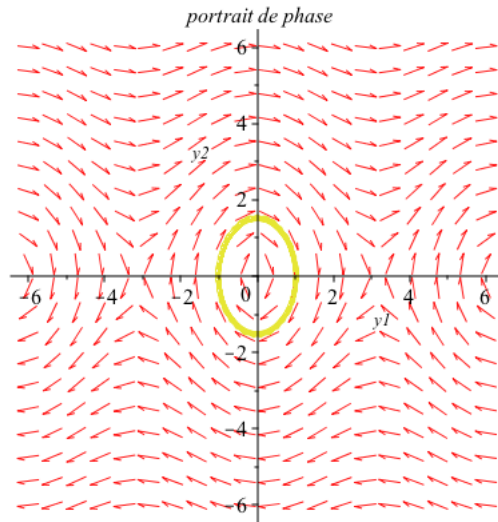
=> inits := [0, 0,  $\frac{\pi}{2}$ ];
inits := [0, 0,  $\frac{\pi}{2}$ ]

```

```

=> DEplot([sys[1], sys[2]], [y1(t), y2(t)], t = -10..10, y1 = -6..6, y2 = -6..6, [inits], scaling=constrained, title='portrait de phase');

```



Portrait de phase (Vitesse en fonction de la position)

### 2.3.2 Comparaison des résultats obtenus

On remarque qu'il y a une ressemblance entre les graphiques. D'abord, le graph de la position angulaire en fonction du temps d'après le code Pascal est identique que celui tracé par Maple. Plus précisément, la courbe démarre à 0 et on peut lire la valeur de la période  $T$  la période  $T$  qui est très proche de la valeur numérique de  $T$  calculée par Maple. Ensuite le portrait de phase (couleur bleue) tracé en partant du code Pascal est aussi pareil que celui du Maple. Ceci montre que les résultats obtenus sont homogènes et sont corrects. Pourtant il y a une grande différence de manière de calcul entre Pascal et Maple. Pascal nous permet de résoudre une système différentielle par une méthode numérique. Maple non seulement peut faire ce travail, ce système de calcul est capable d'utiliser la solution exacte de l'équation différentielle du pendule simple avec des fonctions elliptiques. Par exemple pour trouver la valeur de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , Pascal nous donne 1,57 alors qu'on obtient, grâce à Maple,  $\frac{\pi}{2}$  ce qui est plus précis.

## Chapitre 3

# Conclusion et perspectives

Pour conclure, le travail fourni sur le projet est décomposé en 2 parties. Nous avons cherché dans un premier temps toutes les informations sur chaque problème. Ensuite nous avons filtré les connaissances qui sont nécessaires pour rédiger un rapport complet.

Réaliser ce projet fut très enrichissant pour tout le groupe. Premièrement, il nous a obligé à nous organiser de manière cohérente et efficace en fonction des qualités et des connaissances de chacun. Le projet a également joué un rôle social car aucun des membres du groupe ne se connaissait et il nous a rassemblés autour d'un but commun. Cela nous a permis de développer des qualités très importantes pour notre futur dans le monde de l'entreprise.

De plus, la réalisation de ce projet fut très formateur car il nous a permis d'étendre nos connaissances dans plusieurs domaines comme l'informatique et les mathématiques à partir d'un problème de physique. L'étude d'un tel système en détail peut se révéler très diversifié et complexe, ce qui rendit le projet très intéressant.

# Bibliographie

[https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation\\_diff%C3%A9rentielle\\_lin%C3%A9aire\\_d%27ordre\\_deux](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_diff%C3%A9rentielle_lin%C3%A9aire_d%27ordre_deux)  
<https://www.mathenvideo.fr/wp-content/uploads/2016/04/cadeau-equa-diff-second-ordre.pdf>  
<https://www.khanacademy.org/math/differential-equations/second-order-differential-equations/linear-homogeneous-2nd-order/v/2nd-order-linear-homogeneous-differential-equations-1>  
<https://www.youphysics.education/fr/travail-et-energie/problemes-travail-energie/travail-et-energie-probleme-6/>  
<https://femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php>  
[https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace\\_des\\_phases](https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_des_phases)  
<https://femto-physique.fr/omp/euler.php>  
[http://uel.unisciel.fr/physique/vibrapropa/vibrapropa\\_ch01/co/apprendre\\_ch1\\_05.html](http://uel.unisciel.fr/physique/vibrapropa/vibrapropa_ch01/co/apprendre_ch1_05.html)  
<https://www.bing.com/videos/search?q=systeme+dynamique+du+pendule+simple&&view=detail&mid=46A4A0491656778F0BCC46A4A0491656778F0BCC&&FORM=VRDGAR&ru=%2Fvideos%2Fsearch%3Fq%3Dsysteme%2520dynamique%2520du%2520pendule%2520simple%26qs%3Dn%26form%3DQBVR%26sp%3D-1%26pq%3Dsysteme%2520dynamique%2520du%2520pendule%2520simple%26sc%3D0-35%26sk%3D%26cvid%3D08B5BF9FF3D94FC4947EE15433607E34>  
[dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/methodes%20de%20runge-kutta/fr-fr/](http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/methodes%20de%20runge-kutta/fr-fr/)

# Annexe

## Code Pascal

```

program P6_pendule_1;

var n:Integer;
h,t,x,v,xn1,vn1: Real; fichier:Text;

function f(xn,vn : Real):Real;
begin
f:=- (sin(xn)*((3.142*3.142)/4))
end;

procedure RK1D(xn,vn : Real);
var k1,k2,k3,k4,L1,L2,L3,L4 : Real;
begin
k1:=h*vn; L1:=h*f(xn,vn);

k2:=h*(vn+L1/2); L2:=h*f(xn+k1/2,vn+L1/2);

k3:=h*(vn+L2/2); L3:=h*f(xn+k2/2,vn+L2/2);

k4:=h*(vn+L3); L4:=h*f(xn+k3/2,vn+L3);

xn1 := xn+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
vn1 := vn+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
end;

begin

x:=0;{teta0}
v:=1.57079632679490;{teta0point}
h:=0.0001;{pas de temps}
Assign(fichier,'RK4Periodique10^-4.txt');
rewrite(fichier);
append(fichier);

```

```
for n:=1 to 2000 do
begin
t:=n*h;
write(fichier,t:0:12);
write(fichier,' ');
RK1D(x,v);
write(fichier,xn1:3:12);
writeln(fichier,' ');
writeln('position:',x:2:2);
writeln('vitesse: ',v:2:2);
x:=xn1;
v:=vn1;
end;
close(fichier);
writeln('fin')
end.
```