

Oscillateur masses-ressorts en 2D.



Étudiants :

Louise FOURNIER
Jérémy BRANDS
Mathilde MERCIER
Abdullah ALHABAL

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : 15/06/2020

Référence du projet : STPI/P6/2020 – 07

Intitulé du projet : Oscillateur masses-ressorts

Type de projet : rapport-bibliographie.

Objectifs du projet :

- Généraliser les systèmes masses-ressorts à n masses et $n + 1$ ressorts.
- Etudier un cas particulier de ces systèmes avec $n = 2$
- Etudier le cas avec des forces d'amortissements dans le mouvement.
- Etudier le cas avec force extérieure.
- Comparer ces résultats entre eux et avec le cas $1D$ des rapports précédents.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 3 |
| Organisation du travail | 4 |
| 1 Un cas particulier : 2 masses, 3 ressorts [1]. | 5 |
| 1.1 Mise en situation | 5 |
| 1.2 Écriture matricielle du problème | 5 |
| 1.3 résolution et conclusion de l'introduction | 6 |
| 2 Etude d'un système N masses N+1 ressorts avec force extérieure en 2D [3]. | 7 |
| 2.1 Mise en équation du problème. | 7 |
| 2.2 Un peu de maths pour l'explicitation des valeurs propres [4] | 7 |
| 2.3 Fin de la résolution et conclusion | 8 |
| 2.4 Une petite simulation sur Géogébra avec notre cas particulier. | 9 |
| 3 Etude d'un système N masses N+1 ressorts avec forces d'ammortissements [2]. | 11 |
| 3.1 Mise en équation du problème | 11 |
| 3.2 Résolution mathématique | 11 |
| 3.3 Conditions initiales et conclusion | 12 |
| 4 Comparaison avec le cas 1D. | 14 |
| Conclusion et perspectives | 15 |

Introduction

Ce projet physique P6 consiste en un travail de résolution mathématique et une généralisation des systèmes masses-ressorts en $2D$. Grâce à l'EC P2 (mécanique du point) suivi lors de notre première année de cursus, nous avons pu mieux appréhender les notions avancées dans ce projet. Cependant, durant toute la durée du projet, nous avons dû étoffer nos connaissances mathématiques afin de mieux comprendre le sujet et les équations mises en jeu.

Pour ce projet, nous nous sommes fixés un certain nombre d'objectifs. En effet, nous voulions par dessus tout comprendre le fonctionnement d'un système général masses-ressorts pour mieux en comprendre la théorie et pouvoir appréhender un cas particulier sans problème. Une simulation sur Geogebra nous paraissait aussi indispensable tant pour expliquer les mathématiques que pour les représenter.

Organisation du travail

Comme ce n'était pas notre premier projet, nous avons su nous répartir les tâches astucieusement. En effet, nous nous sommes répartis le travail de la façon suivante : Jérémy et Abdullah ont traité la partie de résolution mathématique tandis que Mathilde s'est occupé de gérer la partie bibliographique et documentaire. Louise s'est quant à elle chargée de faire les comparaisons avec le cas 1D et d'apporter son aide dans les tâches des autres. Nous nous sommes donc tous rendus utiles en se servant des qualités de chacun pour parvenir au bout du projet.

Pour ce qui est de la répartition du travail dans le temps, nous consacrons la grande majorité des cours à prendre des notes sur ce que Mr Gleyse nous disait puis essayions par la suite de reproduire ses raisonnements. La grande majorité du rapport et du travail réalisé s'est donc passée en dehors de l'INSA et encore plus à cause de la situation actuelle dans laquelle nous rédigeons ce rapport.

A ce niveau là, il a été difficile de trouver un bon rythme de travail et cela nous a ralenti dans la progression du projet. En effet, nous avons dû nous aider de logiciels tels que Discord et Zoom afin de faire des réunions et nous aider les uns les autres.

Pour rédiger ce rapport, nous avons choisi d'expérimenter le programme Latex car il est facile d'écrire des mathématiques et encore plus avec Lyx, un éditeur de texte Latex facile de prise en main.

Chapitre 1

Un cas particulier : 2 masses, 3 ressorts [1].

1.1 Mise en situation

Remarque. On supposera les constantes de raideur des ressorts toutes égales, on la notera k . Les masses sont également supposées égales, on la notera m . On note z_1 la position de la première masse et z_2 la position de la deuxième. Les constantes z_3 et z_4 sont les positions d'accroche au mur des ressorts. On se propose donc de retrouver l'équation du mouvement du système.

Définition. Dans R^2 , on peut écrire la coordonnée d'un point $z_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ avec $j \in \{1, 2\}$.

On va donc appliquer le PFD aux deux masses qui dit que : $\sum_i \vec{F}_i = m \times \vec{a}$. On obtient donc le système d'équations :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 &= k(z_4 - z_1) + k(z_2 - z_1) - mg \\ m_2 \ddot{z}_2 &= k(z_1 - z_2) + k(z_3 - z_2) - mg \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut passer du plan cartésien au plan complexe de la manière suivante, pour que chaque point du plan soit représenté par une affixe et non un vecteur en tant que tel. Cela simplifie grandement les calculs ainsi que la manière de voir le problème. On note ainsi

$$w_j = x_j + iy_j = \underline{z}_j$$

1.2 Écriture matricielle du problème

Définition. On va donc pouvoir réécrire le système (0.1) sous forme matricielle, on pose alors $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m.\ddot{w}_1 \\ m.\ddot{w}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -k - k & k \\ k & -k - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k.w_4 \\ k.w_3 \end{pmatrix} . mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \\ &= -k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \\ &= -K . \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + k . \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose l'origine à l'équilibre, on note alors : $\underline{w} = w - w_{eq}$ et $m \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{pmatrix} = 0$.

On va ensuite chercher à déterminer la position d'équilibre w_{eq} :

$$Kw_{eq} = k \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{i} \end{pmatrix}$$

On obtient en isolant w_{eq} l'équation suivante :

$$w_{eq} = K^{-1} [k \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{i} \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} w_{eq1} \\ w_{eq2} \end{pmatrix}$$

avec $K^{-1} = \frac{1}{3k} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Après résolution on obtient : $\ddot{w} = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} w = Mw$.

1.3 résolution et conclusion de l'introduction

Définition. On pourra ensuite réaliser une étude de la matrice M afin de trouver l'équation finale de la trajectoire.

Déterminons si la matrice M est diagonalisable :

Si on calcule $\chi_M = \det(M - \lambda I_2)$, on trouve : $\chi_M = [(2 - \lambda)^2 - 1]$.

Ce polynôme admet deux racines : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ et donc il y a autant de valeurs propres que la dimension de R^2 ($\dim(R^2) = 2$).

La matrice M est donc diagonalisable et on peut donc faire un changement de base en posant : $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

En trouvant les sous espaces propres associés aux deux valeurs propres, on obtient de bases de vecteurs propres et on peut exprimer les vecteurs de la base canonique dans notre nouvelle base orthogonale.

On trouve $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

En posant $K = \frac{k}{m}$, on obtient l'équation :

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\sqrt{3K}t) + \mu \sin(-\sqrt{3K}t) \\ \lambda' \cos(\sqrt{K}t) + \mu' \sin(-\sqrt{K}t) \end{pmatrix}$$

puis en exploitant le rapport 2017-2018, on obtient avec les conditions initiales, on obtient une solution générale comme somme de sinus et cosinus.

Mais cela n'est pas notre sujet, nous voulions juste poser des bases et introduire le lecteur à la résolution d'un système $2D$, car en mathématiques on dit souvent que pour trouver des généralités, on exploite d'abord des cas particuliers.

Chapitre 2

Etude d'un système N masses $N+1$ ressorts avec force extérieure en 2D [3].

2.1 Mise en équation du problème.

On suppose qu'on dispose de n masses telles que $m_i = m$.
On prend $w \in C^n$. On pose l'équation suivante :

$$m\ddot{w} = -Kw + F_{ext}$$

avec K la matrice des raideurs de ressorts et on prendra tous les constantes de raideurs k indentiques.

On pose $w_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$.

On pose également $w_{eq} = K^{-1}F_{ext}$ où $F_{ext} = -img$.

On peut donc réécrire l'équation de mouvement sous la forme :

$$\ddot{w} + \tilde{K}w = 0$$

et on considère v un vecteur propre de \tilde{K} associé à la valeur propre λ . On obtient donc :

$$\ddot{w} + \lambda w = 0.$$

On prend alors $w = \theta(t)v$ avec $\theta(t) \in C$ et on écrit que :

$$\ddot{w} + \lambda w = (\ddot{\theta} + \lambda\theta)v = 0$$

Or, \tilde{K} est symétrique définie positive donc les valeurs propres sont strictement positives. On obtient alors comme solutions de cette équation :

$$\theta = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t)$$

et $\dot{\theta} = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}t)$.

et donc On a $V = (v_1, \dots, v_n)$ une b.o.n de vecteurs propres de \tilde{K} associés aux valeurs propres $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$.

On prend $w = V \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$, $\tilde{K} = VDV^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_i)$ et donc $\tilde{K}V = VD$.

2.2 Un peu de maths pour l'explicitation des valeurs propres [4]

On souhaite ici expliciter les valeurs propres de la matrice \tilde{K} .

On sait déjà que par définition, $\tilde{K} = \frac{1}{m}K$. Or, on sait également que la matrice K s'écrit $K = kA$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

une matrice qui est constante.

On a donc :

$$\tilde{K} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs et vecteurs propres de \tilde{K} , on va donc calculer les valeurs propres de A qui est donc une matrice avec des 2 sur la diagonale et des -1 sur la sous et sur-diagonale. C'est donc une matrice tridiagonale symétrique .

Théorème 1. *Pour toute matrice réelle symétrique d'ordre n tridiagonale (diagonalisable) D , c'est-à-dire le même α sur la diagonale et le même β sur la surdiagonale et la sous-diagonale, les valeurs propres de D sont données par : $\lambda_k = \alpha + 2\beta \cos(\frac{k\pi}{n+1})$ pour $k \in \{1..n\}$.*

On va donc appliquer ce théorème à la matrice A puisque les valeurs propres de \tilde{K} sont les $\frac{k}{m}v_p(A)$ où $v_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A : $v_p(A) = \{\lambda \in R, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$.

Ici, on note $\alpha = 2$ et $\beta = -1$.

Il vient donc naturellement ici que les valeurs propres de \tilde{K} s'écrivent sous la forme : $\lambda_j = 4 \sin^2(\frac{j\pi}{2(n+1)})$ et les vecteurs propres sont de la forme $V_j = \sin(\frac{l_j\pi}{2(n+1)})$ pour $l = 1 \dots n$.

Pour construire la matrice V formée des vecteurs propres orthonormés il faut normaliser les vecteurs V_j . La norme euclidienne notée $N_2 = V_{j2}$ est égale à $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

On divise donc V_j par $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ pour avoir des vecteurs normés pour N_2 .

Pour conclure, les valeurs propres de \tilde{K} sont $\frac{k}{m}v_p(A)$ et les vecteurs propres orthonormés de \tilde{K} sont ceux de A .

2.3 Fin de la résolution et conclusion

On trouve donc grâce à l'explicitation des valeurs propres de \tilde{K} la solution :

$$w_j(t) = \sum_{l=1}^n \theta_l(t)v_l = \sum_{l=1}^n \theta_l(t) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l_j\pi}{2(n+1)})$$

donc :

$$w_j(t) = \sum_{l=1}^n [(c_{1j} \cos(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t) + c_{2j} \sin(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t)] \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l_j\pi}{2(n+1)}).$$

Pour trouver C_1 et C_2 , on observe les conditions initiales, avec $w_* = w - w_{eq}$ et en posant $\phi(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix}$:

$w_\star = V\phi$ et $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = V^{-1}w_\star = V^t w_\star = V w_\star$ car V est orthogonale symétrique et donc $V^t V = I_n$.

en $t = 0$, on trouve :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \vdots \\ \theta_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} = V w_\star(0)$$

on dérive w :

$$\dot{w}_\star = V \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} = V \dot{w}_\star$$

Et de même pour C_2 ,

$$C_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n(0) \end{pmatrix}}_{\dot{\phi}(0)} = \begin{pmatrix} c_{21} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} = V \dot{w}_\star(0); \implies V \dot{w}_\star(0) = (c_{21}\sqrt{\lambda_1}, \dots, c_{2n}\sqrt{\lambda_n})^t$$

donc on aura $\begin{pmatrix} c_{21} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1 \dot{w}_\star(0)}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \vdots \\ \frac{v_n \dot{w}_\star(0)}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} = V w_\star(0)$.

On obtient donc :

$$c_{1l} = \sum_{q=1}^n \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{\star q}(0) \text{ et } c_{2l} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{\star q}(0)$$

on a donc au final :

$$\begin{aligned} w_{\star j}(t) &= \sum_{l=1}^n \theta_l(t) v_l \\ &= \sum_{l=1}^n [(c_{1l} \cos(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t) + c_{2l} \sin(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t)) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l j \pi}{n+1})] \\ w_{\star j}(t) &= \sum_{l=1}^n [\sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{\star q}(0) (\cos(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{\star q}(0) \sin(\sqrt{\frac{k}{m} 4 \sin^2(\frac{l\pi}{2(n+1)})} t)) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l j \pi}{n+1})] \end{aligned}$$

2.4 Une petite simulation sur Géogebra avec notre cas particulier.

Pour cette simulation, on prend :

- $k = 19 N.m^{-1}$
- $m = 37 g$
- $n = 2$
- $w_{q\star}(0) = \begin{pmatrix} 20 - i \\ 50 - i \end{pmatrix}$ et la vitesse initiale nulle.

Et on va tracer sur le même graphe les courbes C_1 et C_2 avec des couleurs différentes pour les deux masses : $m_1, C_1 = (x_1(t), y_1(t))$; $m_2, C_2 = (x_2(t), y_2(t))$ en rappelant au préalable que :

$$w_\star(t) = (x_1(t) + iy_1(t), x_2(t) + iy_2(t))$$

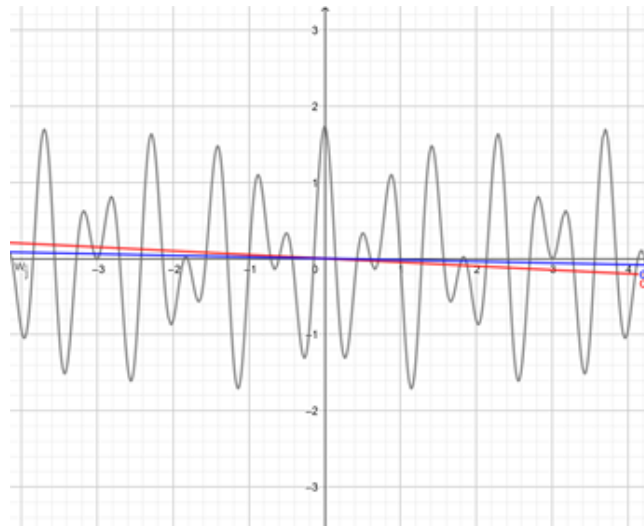
on a donc :

$$\begin{aligned}
 w_*(t) &= \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} (20-i) \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \\
 &= \left(\sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} (20-i) \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \right) \\
 &\quad - \left(\sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} (50-i) \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \right) \\
 &= \left(20 \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \right) - i \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \\
 &\quad - \left(50 \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right] \right) + i \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

On va donc dessiner $C_1 = (20 \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{l\pi}{3}\right) \right) \right])$, $-\sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{l\pi}{3}\right) \right) \right]$

et $C_2 = (50 \sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{l\pi}{3}\right) \right) \right])$, $-\sum_{l=1}^2 \left[\sum_{q=1}^2 \sin\left(\frac{ql\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{6}\right)t\right) \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{l\pi}{3}\right) \right) \right]$

Et on obtient le graphe suivant :



Chapitre 3

Etude d'un système N masses N+1 ressorts avec forces d'ammortissements [2].

3.1 Mise en équation du problème

On dispose de n masses identiques telles que $m_i \in \{1..n\}$ et $m_i = m$. On considère une force de frottement du type $-m_j\gamma\dot{w}_j$ avec $\gamma > 0$ et petit.

On a donc l'équation de mouvement suivante :

$$m\ddot{w} = -m\gamma\dot{w} - Kw + F_{ext}$$

avec $w_{eq} = K^{-1}F_{ext}$ et on pose $\tilde{K} = \frac{1}{m}K$.

On considère donc le changement de base suivant : $\tilde{K} = VDV^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_i)$, les λ_i étant les valeurs propres de \tilde{K} .

On prend :

$$w = w_{eq} + V \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \in C^n$$

Récrivons donc l'équation de mouvement en considérant tous ces changements, on obtient

$$m \times V \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{pmatrix} = -m\gamma V \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} - K(w_{eq} + V \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix})$$

avec $K = m\tilde{K}$ et $\tilde{K}V = VD$. En simplifiant par $m \times V$ et en prenant les valeurs propres de \tilde{K} λ_i on arrive à :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{pmatrix} = -\gamma \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1\theta_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\theta_n \end{pmatrix}$$

3.2 Résolution mathématique

Pour résoudre cette équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre homogène, on va écrire le polynôme caractéristique en t puis appliquer les règles de calculs classiques sur les EDO. Le polynôme caractéristique s'écrit alors :

$$P(t) = t^2 + \gamma t + \lambda_j = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = \gamma^2 - 4\lambda$. Or, on a fixé γ petit donc on peut supposer $\Delta < 0$. On obtient des solutions t_j de la forme :

$$t_j = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4\lambda_j - \gamma^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2} \pm iw_j.$$

La solution de l'équation s'écrit, d'après les règles sur les EDO :

$$\begin{aligned} \theta_j(t) &= a_j \exp\left(\frac{-\gamma}{2}t + iw_j\right)t + b_j \exp\left(\frac{-\gamma}{2}t - iw_j\right)t \\ &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(C_{1j} \cos(w_j t) + C_{2j} \sin(w_j t)) \end{aligned}$$

avec $\exp(-\frac{\gamma}{2})$ le coefficient d'amortissement.

3.3 Conditions initiales et conclusion

Maintenant, on s'intéresse aux conditions initiales du problème.

En prenant la solution générale $w(t)$, on obtient : $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = mV^{-1}(w - w_{eq})$.

en $t = 0$: $\begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \vdots \\ \theta_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} \\ \vdots \\ C_{1n} \end{pmatrix} = mV^{-1}(w(0) - w_{eq})$. On dérive la solution générale : $\dot{w} = \frac{1}{m}V \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{pmatrix}$ et encore en $t = 0$:

$$\dot{\theta}_j(t) = \frac{-\gamma}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(C_{1j} \cos(w_j t) + C_{2j} \sin(w_j t)) + \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(-C_{1j}w_j \sin(w_j t) + C_{2j}w_j \cos(w_j t))$$

$$\dot{\theta}_j(0) = \frac{-\gamma}{2}C_{1j} + C_{2j}w_j$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2}(C_{11} + C_{21}w_1(0)) \\ \vdots \\ -\frac{\gamma}{2}(C_{1j} + C_{2n}w_n(0)) \end{pmatrix} = V^{-1}\dot{w}(0)$$

On obtient donc :

$$w_j(t) = \sum_{l=1}^n \theta_l(t)v_l = \sum_{l=1}^n \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(C_{1l} \cos(w_j t) + C_{2l} \sin(w_j t))\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{lj\pi}{2(n+1)}\right)$$

On détermine C_{1j} et C_{2j} :

donc on aura :

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{2}\dot{w} \star (0)V$$

et :

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix} = V w_*(0)$$

Donc on a $C_{1l} = \sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{*q}(0)$ et $C_{2l} = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{*q}(0)$

on a donc au final :

$$\begin{aligned} w_{j*}(t) &= \sum_{l=1}^n \theta_l(t) v_l \\ &= \sum_{l=1}^n \exp(-\frac{\gamma}{2}t) (C_{1l} \cos(w_j t) + C_{2l} \sin(w_j t)) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l j \pi}{n+1}) \\ &= \sum_{l=1}^n \exp(-\frac{\gamma}{2}t) \left(\sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{*q}(0) \cos(w_j t) + \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{*q}(0) \sin(w_j t) \right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l j \pi}{n+1}) \\ w_{j*}(t) &= \exp(-\frac{\gamma}{2}t) \sum_{l=1}^n \left[\left(\sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{*q}(0) \cos(w_j t) + \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin(\frac{ql\pi}{n+1}) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{*q}(0) \sin(w_j t) \right] \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(\frac{l j \pi}{n+1}) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Comparaison avec le cas 1D.

L'équation donnant la position de la j -ième masse par rapport à sa position d'équilibre en fonction du temps est donné par l'équation :

$$w_{j\star}(t) = \sum_{l=1}^n \left[\sum_{q=1}^n \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} w_{\star q}(0) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{2(n+1)}\right) t\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \sum_{q=1}^n \sin\left(\frac{ql\pi}{n+1}\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \dot{w}_{\star q}(0) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{l\pi}{2(n+1)}\right) t\right) \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right]$$

et dans le rapport de 2015 on a :

$$x_i(t) = \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^n \left[\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} 4 \sin^2\left(\frac{q\pi}{2(n+1)}\right) t\right) \sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right) x_{s,0} \right]$$

Dans le projet 2015, les étudiants ont procédé à une orthonormalisation de la base des vecteurs propres ($w_{j\star}$ est dans une base orthonormée).

Il est intéressant de comparer nos résultats aux leurs car ils ont posé la vitesse initiale nulle. Nous avons nous posé l'origine à l'équilibre. Il suffit juste de traduire

En effet, ils ont considéré que les masses sont lâchées sans vitesse initiale, d'où $\forall q \in \{1..n\}, \dot{x}_{q,0} = 0$.

En outre, ils ont repris les constantes de l'expérimentation. Pour comparer nos résultats, nous avons posé l'origine à la position d'équilibre et avons pris nécessairement en compte le poids.

Dans les projets 2015 et 2020, on observe dans les deux cas une sinusoïde, de période 2 secondes mais d'amplitude différente.

Conclusion et perspectives

Pour conclure ce projet, faisons une petite synthèse du travail réalisé. Nous avons réussi à étudier le cas général du mouvement d'un système masses-ressorts en 2D, ce qui ne paraissait pas tâche facile avant d'entamer ce projet. Nous avons également pu réaliser une simulation du mouvement d'un système général soumis au poids. Si nous avions voulu continuer notre projet, nous aurions pu étudier d'autres cas tels que les frottements visqueux etc.

Nous avons conclu tous les quatre personnellement de la façon suivante :

Mathilde : En réalisant ce projet, j'ai pu voir des notions de STPI1 (présentes en P2) que je n'avais pas eu l'opportunité de voir lors de mon cycle préparatoire (en SIB). Grâce à mon groupe et à notre tuteur, j'ai pu découvrir les systèmes masse-ressort et les étudier de façon concrète et utile. Sans ce projet, je ne m'y serai peut être jamais intéressé et n'aurai jamais obtenu ces connaissances. Ainsi, cet E.C m'a énormément apporté.

Louise : Ce projet m'a beaucoup apporté notamment dans le domaine scientifique en me permettant de revoir plusieurs notions vues en STPI1 et STPI2. Il a été un travail agréable car le résultat est intéressant et concret. Cependant, le confinement a compliqué le travail en groupe.

Jérémy : Pour moi, approfondir les notions vues en EC p2 est un vrai plus à notre bagage. Ce projet a permis d'appliquer un bon nombre de connaissances et nous a aussi appris que la résolution mathématique était primordiale en physique. Certains points du rapport comme la simulation restent cependant un peu flous.

Abdullah : Ce projet fut le meilleur moyen de découvrir les systèmes masses-ressorts et mettre en application les connaissances apprises tout au long de notre cursus à l'INSA

Bibliographie

Sites utiles pour la description des systèmes masses-ressorts + explications : [1]

https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_masse-ressort

<http://www.physagreg.fr/fichests/physique-13-systeme-masse-ressort.pdf>

http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/vibrapropa/sexercer/chapb/b-04/cou2com_solution.htm

[http://cours-examens.org/images/An_2017_1/Etudes_superieures/Ondes/News/D2-2-VO-\[2\]-V_S-nddl.pdf](http://cours-examens.org/images/An_2017_1/Etudes_superieures/Ondes/News/D2-2-VO-[2]-V_S-nddl.pdf)

https://moodle.insa-rouen.fr/pluginfile.php/75927/mod_folder/content/0/Rapport_P6_2017_08.pdf?forcedownload=1

http://electroacoustique.univ-lemans.fr/cours/Grain2.2/co/grain_18.html

Sites concernant les amortissements liés au système : [2]

http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/syst_oscillants/apprendre/gpb.osc.fa.201.a2/content/access.htm#D7

<http://mchampion.fr/cours/S4%20-%20Oscillateurs%20amortis.pdf>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Amortissement_physique

<http://www.universalis-edu.com/ezproxy.normandie-univ.fr/encyclopedie/oscillateurs/>

<http://webetab.ac-bordeaux.fr/Etablissement/BDBorn/sections/postbac/prepasciences/physique/telech/docs20089/M42009b.pdf>

<https://cahier-de-prepa.fr/ats-pascal/download?id=66>

<http://psychosmose.free.fr/physics/ondes/Systèmes%20oscillants.pdf>

<http://plrostand.free.fr/download/OHL.pdf>

Livres utiles pour la description des systèmes masses-ressorts + explications : [3]

PCSI Physique. (2013). Paris, France : ellipse.

Sites utiles pour la description des systèmes masses-ressorts avec frottements :

http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M01_G04/co/Contenu_52.html

<http://www.physagreg.fr/mecanique-13-oscillateurs.php>

<http://www.physagreg.fr/mecanique/m13/M13-oscillateurs.pdf>

Sites utiles pour l'explicitation des valeurs propres : [4]

https://www.math.univ-toulouse.fr/~fdelebec/Site/Enseignement_files/valproplaplace.pdf