INSTITUT
NATIONAL
des SCIENCES
APPLIQUÉES

INSA ROUEN

Projet de Physique P6-3

STPI/P6-3/2008 – 06

Nom des étudiants

Chloé BEYNET-BARON
Elodie BIHEN
Marianne BONNEAU
Zhi Yao LER
Vanessa VERGES

Enseignant responsable du projet : Jérôme YON

EQUATION DU CHOC (BURGER) – ILLUSTRATION AU SENS DE LA DERIVEE HYDRODYNAMIQUE

À TAILLE
HUMAINE
À L'ECHELLE
DU MONDE

Cette page est laissée intentionnellement vierge.

Date de remise du rapport : 20/06/08

Référence du projet : ***STPI/P6-3/2008 – sujet 06***

Intitulé du projet : ***Equation du choc (Burger) – illustration du sens de la dérivée hydrodynamique.***

Type de projet : ***calcul et simulation.***

Objectifs du projet *(10 lignes maxi)* :

Le but de ce projet est d'étudier l'équation de la dérivée particulaire suivante :

EQ 1. $$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{U}).\vec{V} = \vec{a}$$

Puis de créer un dispositif pédagogique, le plus clair possible, pour permettre aux élèves étudiant la mécanique des fluides de mieux appréhender le sens physique de cette équation. Cette étude passera par une approche analytique de l'équation en fonction des conditions limites spatiales à l'instant initial (pour illustrer ou non le choc) mais aussi par une résolution numérique à l'aide d'un logiciel du domaine public.

Si existant, n° cahier de laboratoire associé : ***xxx***

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS, ACRONYMES

1. INTRODUCTION

Contexte du travail. Objectifs à atteindre pour le projet

L'équation de Burgers, appelée en France dérivée particulaire, a été découverte au XXème siècle par le physicien allemand Johannes Martinus BURGERS (1895-1981). Elle est utilisée en mécanique des fluides pour suivre le mouvement des particules. Plus précisément, dans certaines conditions limites, elle peut illustrer la notion de « choc ».

Cette équation permet de passer d'une description d'un champ de vecteurs vitesses (description eulérienne) à celle d'une seule particule (description lagrangienne).

Les objectifs de cette étude sont les suivants:

- Comprendre le sens physique de l'équation.
- Comprendre et illustrer par une approche analytique que cette équation peut illustrer la notion de « choc » en fonction du choix des conditions limites spatiales à l'instant initial.
- Trouver sur Internet un logiciel du domaine public permettant la résolution numérique d'une telle équation pour différentes conditions limites spatiales.
- Trouver un moyen « pédagogique » le plus clair possible pour expliquer en l'illustrant le sens physique de cette équation.

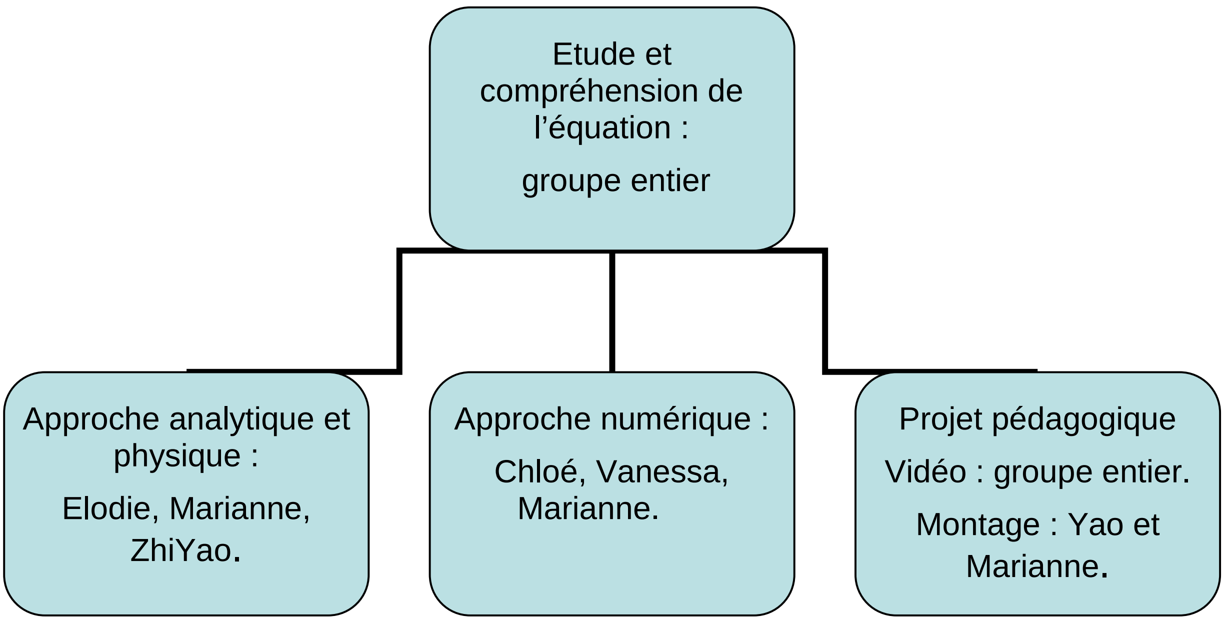
Notre plan va suivre l'évolution de notre projet durant les quatre mois d'étude. Nous allons tout d'abord décrire terme à terme cette équation ainsi que son sens physique. Puis, dans un second temps, nous étudierons analytiquement l'équation selon différents cas limites. Ensuite, nous formulerons une résolution numérique. Enfin, nous présenterons un dispositif pédagogique.

2. METHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Description de l'organisation adoptée pour le déroulement du travail

Notre groupe étant composé de cinq personnes, nous nous sommes d'abord tous penchés sur l'étude de l'équation et la compréhension de toutes les notions qui l'entourent : la vision Eulérienne et Lagrangienne, l'analogie à des situations concrètes comme celles de la rivière ou bien encore du trafic routier. Nous nous sommes ensuite lancés dans l'organisation de notre projet pédagogique. Nous nous sommes concertés sur la manière de présenter cette équation à d'autres étudiants. Nous avons arrêté notre choix sur une vidéo explicative type « c'est pas sorcier » où nous voulons développer le concept de choc et de détente pour illustrer le sens de la dérivée particulaire. Mais avant de passer à la réalisation de cette vidéo, notre méthodologie a été de modéliser numériquement des observations physiques. Ainsi après 2 ou 3 séances de travail en groupe, nous avons commencé à nous partager le travail à réaliser. Trois d'entre nous (Elodie, Marianne et Zhi Yao) ont travaillé sur l'application physique en cherchant des exemples concrets et en étudiant la notion de choc en fonction des différentes conditions limites spatiales à l'instant initial. Les deux autres (Chloé et Vanessa) se sont mis à la partie numérique du projet. En programmant en langage syllabe (logiciel du domaine public), leur but était de créer des petites applications servant à modéliser différents phénomènes liés à l'équation.

Organigramme des tâches réalisées et des étudiants concernés



.

3. TRAVAIL REALISE ET RESULTATS

3.1. Deux approches du problème possibles

Pour étudier l'équation de Burger, il nous faudra tout d'abord étudier les deux approches d'étude du mouvement d'un fluide en écoulement qui sont la description Lagrangienne et la description Eulérienne.

3.1.1. Approche Lagrangienne

Pour Lagrange (1736-1813), étudier le mouvement du fluide, c'est décrire le mouvement individuel de chaque particule du fluide. Soit une particule i. Le mouvement de la particule est alors défini par ses positions $X_i(t)$ connaissant celle à l'instant initial t_0. La vitesse est donc décrite par $V_i(t) = \frac{dX_i(t)}{dt}$ et est donc une fonction du temps.

Connaissant ensuite la trajectoire de chaque particule, il nous est alors possible de reconstituer le mouvement d'ensemble de ce fluide.

Pour illustrer cette approche Lagrangienne, utilisons l'exemple du trafic autoroutier. Lors d'un écoulement de véhicules sur une autoroute, le trafic (fluide) est décrit à chaque instant par l'ensemble des vitesses des véhicules (particules du fluide) qui le composent dont la position initiale $X_i(0)$ à l'instant t=0 a été fixée. Cet ensemble de vitesse est de la forme

EQ 2. $$V_i(t) = \frac{dX_i(t)}{dt} = V(X_i(t), t)$$

Ainsi, grâce à cet exemple nous comprenons que la vitesse de chaque particule ne dépend bien que du temps et des coordonnées initiales de la particule. Cependant cette description d'étude de chaque particule est quasiment impossible à réaliser.

3.1.2. Approche Eulérienne

Dans ce point de vue, Euler (1707-1783) cherche à décrire l'évolution du mouvement du fluide sans référence à une particule particulière.

La description Eulérienne d'un fluide permet de déterminer en chaque point donné de l'espace, les évolutions au cours du temps de certaines caractéristiques du fluide telles que sa vitesse, sa pression, sa température, etc.

L'ensemble des vitesses forme un champ de vecteurs $V(x, y, z, t) = V(M, t)$ dépendant à la fois de l'espace et du temps. Ici ces variables sont indépendantes.

Par exemple, la valeur $V(x, y, z, t)$ est la vitesse de la particule se trouvant au point $M(x, y, z)$,) à l'instant t_1 du même point mais à un instant différent t_2, la valeur de **V**, sera celle d'une autre particule passant en ce point à cet instant t_2.

Reprenons l’exemple du trafic autoroutier. Imaginons deux policiers observant la vitesse des véhicules au bord de l’autoroute. Ils peuvent alors décrire l’écoulement du trafic au cours du temps grâce à la connaissance de la vitesse des véhicules existant à l’endroit où ils sont postés. Ils se placent donc en formalisme Eulérien.

A la même date t, ils n’observent pas les mêmes véhicules et donc pas forcément la même vitesse. Cet exemple nous montre bien que les variables du temps et de l’espace sont indépendantes.

3.1.3. Introduction de l’équation de Burger

L'equation de Burger sert à l'étude du choc et est principalement utilisée en mécanique des fluides. Il est important de souligner qu'elle possède d'autres qualificatifs comme équation du choc ou aussi dérivée particulaire.

Le but de l'équation est de calculer une accélération eulérienne dans un champ lagrangien. Pour mieux comprendre cela, nous allons prendre un exemple concret: la circulation des voitures sur une route. Dans ce cas, les voitures représentent les particules. Le champ est représenté par le trafic, c'est-à-dire l'ensemble des voitures. Et V correspond à la vitesse d'une voiture et a à son accéleration.

Pour encore simplifier le problème, nous allons, dans un premier temps, considérer l'accélération comme nulle, c'est-à-dire que la vitesse de toutes les voitures est constante. Néanmoins il est important de préciser que cela ne signifie pas que toutes les voitures ont la même vitesse. Quand l'accélération est nulle, nous allons constater qu'il n'y a que trois possibilités.

1. Tout d'abord, dans le premier cas, nous sommes en présence d'un champ constant c'est-à-dire que la vitesse du champ est la même en tout point de celui-ci. De plus, ce champ est stationnaire, il ne dépend pas temps, et uniforme, il ne dépend pas de l'espace. De ce fait, si l'on considère uniquement deux voitures, nous constatons qu'elles roulent à la même vitesse et que la distance qui les sépare reste constante. Par conséquent, le choc entre elles est impossible. Si nous revenons à l'équation, nous constatons que tous les termes sont nuls: en effet, $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ est nulle car le champ est stationnaire et $(\vec{\nabla}\vec{U}).\vec{V}$ l'est également car le champ est uniforme.
2. Le deuxième cas, toujours concernant l'étude de deux voitures, consiste à considérer que ces dernières n'ont pas la même vitesse initiale. Plus précisément, la première roule plus vite que la seconde. Soulignons que le champ n'est pas alors plus stationnaire, ni uniforme. Nous constatons que la distance entre les voitures ne cesse d'augmenter. Le choc est une fois encore impossible: nous sommes dans le cas d'une détente. L'équation, quant à elle, n'est pas la même que dans le premier cas. En effet, $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ est négative car la première voiture roule plus vite. Comme l'accélération a été choisie comme nulle, le terme $(\vec{\nabla}\vec{U}).\vec{V}$ est lui positif pour compenser le caractère non permanent.

3. Enfin, le troisième cas se retrouve être l'opposé du second puisque c'est la seconde voiture qui roule plus vite que la première. De ce fait, nous pouvons en déduire que la distance, cette fois, ne fait que diminuer. La seconde voiture va donc rattraper la première jusqu'à l'impact entre les deux voitures: c'est la notion de choc. De même, pour

l'équation, c'est le contraire du deuxième cas. $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ est donc positive et pour compenser $(\vec{\nabla}\vec{U}).\vec{V}$ est négative.

3.2. Description et Explication de l'équation

3.2.1. Description illustrée terme à terme

Nous allons tout d'abord décrire chaque terme de cette équation. Puis nous nous appuierons sur un exemple pour illustrer son sens physique. L'exemple choisi est celui d'une rivière (ou plus généralement d'un fluide composé de particules).

En premier lieu, voici la signification de chaque lettre de l'expression. Le $\vec{U}$ est un champ de vecteurs et le $\vec{V}$ correspond à la vitesse d'une particule du champ à un instant *t* et à un endroit donné.

Ensuite, voici l'explicitation de chacun des termes. Le premier terme : $\frac{d\vec{U}}{dt}$ se nomme la dérivée particulaire, elle désigne ce que nous cherchons à déterminer, c'est-à-dire l'accélération de la particule de la rivière dans le référentiel absolu $\vec{a}$.

Le premier terme du second membre : $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ est appelé "caractère non permanent", il correspond au terme temporel. C'est la variation du champ de vecteurs en fonction du temps. Sur notre exemple, cela correspondrait à la variation de vitesse au cours du temps en un point fixe de l'espace. Il s'agit donc de trouver l'évolution du débit de la rivière au cours du temps.

Le second terme du second membre : $(\vec{\nabla}\vec{U}).\vec{V}$ est le "caractère non uniforme". A un instant donné *t*, c'est la variation du champ en fonction cette fois de l'espace, celle-ci est multipliée par la vitesse d'une particule bien précise et choisie. Pour la rivière, c'est l'accélération du point de vue de la particule du fait de son déplacement dans le champ de vitesses, c'est-à-dire savoir si la particule passe près d'un rapide ou non par exemple.

3.2.2. Analyse physique

Dans la description eulérienne, si on considère le champ de vecteurs $\vec{U}(x, y, z, t)$, on peut écrire sa dérivée comme suit:

EQ 3.
$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}dt$$

Pour pouvoir calculer la dérivée du champ par rapport au temps, on se ramène à une seule composante: $\vec{U}_i$ d'un des vecteurs du champ. En effet, il est plus facile de déterminer la dérivée d'une composante que du vecteur entier. D'où:

EQ 4. $$\frac{d\vec{U}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial x}.V_x + \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial y}.V_y + \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial z}.V_z + \frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t}$$

Donc on peut l'écrire sous la forme (avec *k* allant de 1 à 3 c'est-à-dire *1=x*, *2=y* et *3=z*):

EQ 5. $$\frac{dU_i}{dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}.V_k = \frac{\partial U_i}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{U}_i).\vec{V} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{V}).\vec{U}_i$$

On remarque que pour l'instant dans notre cas, la vitesse de la particule est égale à la vitesse du champ ($V_k = U_k$).Maintenant écrivons la dérivée du champ de vecteurs complète avec toutes ses composantes:

EQ 6. $$\frac{d\vec{U}}{dt} = \begin{cases} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial x}.V_x + \frac{\partial U_x}{\partial y}.V_y + \frac{\partial U_x}{\partial z}.V_z \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x}.V_x + \frac{\partial U_y}{\partial y}.V_y + \frac{\partial U_y}{\partial z}.V_z \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{\partial U_z}{\partial x}.V_x + \frac{\partial U_z}{\partial y}.V_y + \frac{\partial U_z}{\partial z}.V_z \end{cases}$$

Pour bien comprendre prenons un exemple: $\vec{U}(x,t) = Ax.\vec{u}_x$. Comme le champ ne dépend que de $\vec{u}_x$, il est évident que $\forall i, \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0$. De plus, le champ ne dépend que d'une seule coordonnée (ici *x*) donc on a :

EQ 7. $$\frac{\partial U_x}{\partial x}.V_x = \frac{\partial (Ax)}{\partial x}.V_x = A.V_x \Rightarrow \frac{dU_x}{dt} = A.V_x$$

A partir de cette équation, on peut obtenir la vitesse de la particule ainsi que sa trajectoire comme suit :

EQ 8. $$\int \frac{dU_x}{dt} = \int A.V_x \Leftrightarrow V_x = (cste\_1).e^{At} = \frac{dx_t}{dt} \Rightarrow x_t = \frac{cste\_1}{A} e^{At} + cste\_2$$

Maintenant nous nous servons des conditions initiales pour déterminer les constantes *A*, *cste_1* et *cste_2*. On considère qu'à *t=0*, *x* est en x_0=*1*. On obtient donc : $V_{x_0} = (cste\_1).e^0 = cste\_1 = A$. Enfin, on a l'équation de la trajectoire :

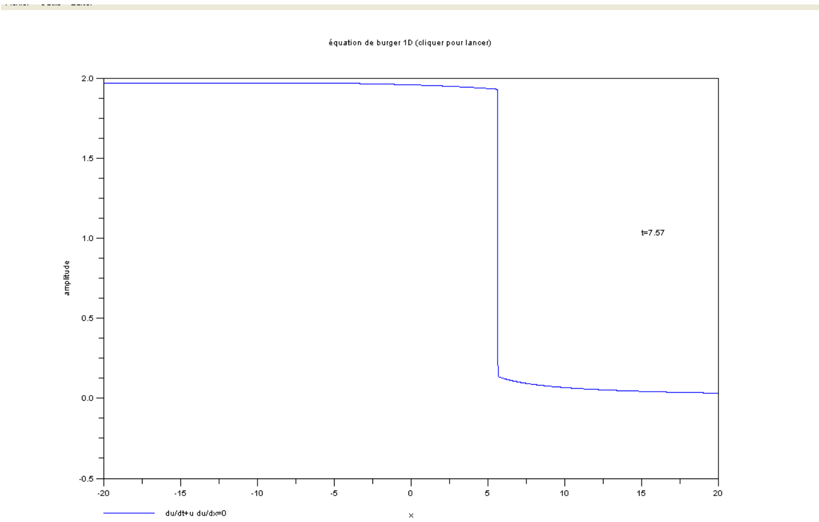
EQ 9. $$x_t = e^0 + cste\_2 \Leftrightarrow cste\_2 = 0$$

3.3. Analyse Numérique de l'équation

3.3.1. Logiciel utilisé

Nous avons utilisés le logiciel libre Scilab pour étudier l'équation dans le cas où $a \neq 0$. Ce logiciel nous a semblé adapté car nous avons au préalable trouvés une animation qui modélise l'équation et qui utilise ce logiciel (voir bibliographie pour le site).

Pour introduire le logiciel et son fonctionnement, nous allons reprendre un exemple avec l'accélération nulle. Grâce au programme n°1 (cf annexe), nous pouvons observer deux situations différentes selon l'équation que l'on donne à la vitesse. Ainsi si V = 1-



(2/%pi)*atan(x), on peut observer :

figure 1 : *exemple de choc avec l'accélération nulle*

Sur la figure 1, nous pouvons constater une asymptote verticale. Cette dernière modélise le phénomène de choc, en effet, elle représente une rupture du champ.

En revanche , si V = bool2s(x>0)+0.5, on part d'une droite verticale pour obtenir au bout d'un temps t :

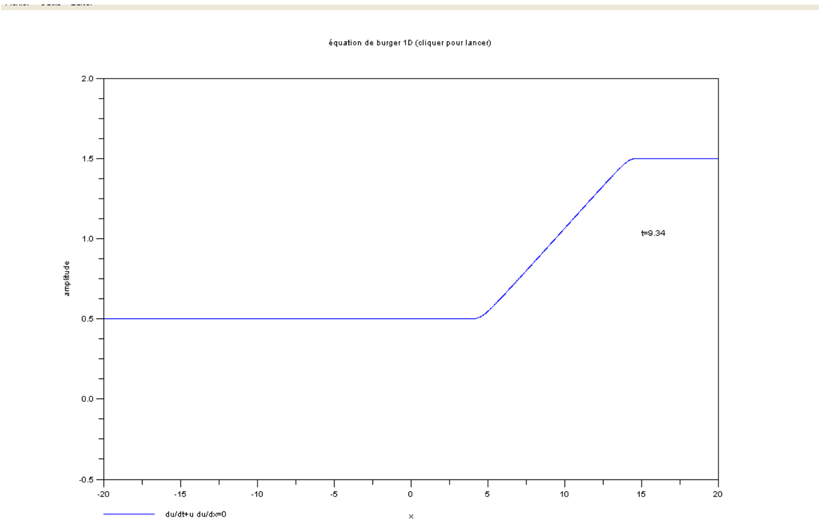


figure 2 : *exemple de détente avec une accélération nulle*

Nous observons ainsi, la détente d'un fluide, qui peut alors parfaitement s'écouler.

3.3.2. Modélisation du phénomène routier

Après avoir étudier les cas simples et faciles à visualiser où l'accélération de la particule est nulle, nous avons chercher à comprendre les cas où elle est différente de zéro. Pour cela, nous avons repris le cas concret de la circulation des voitures sur une route.

Si l'accélération n'est pas nulle c'est que le conducteur de la voiture réagit en fonction de son environnement, donc du champ (ici le trafic).

Nous avons donc choisi, de façon arbitraire, des conditions sur la conduite qu'il devait avoir. En effet, le conducteur étudié doit rouler sur une route où il est impossible de doubler et où la vitesse est limitée à 130km/h. De plus ce dernier se doit de respecter les distances de sécurité, variant en fonction de sa vitesse.

Nous allons, par conséquent, avoir un champ qui évolue, c'est-à-dire que le nombre de voitures qui entre dans le champ n'est pas nécessairement le même que le nombre de voitures qui en sort. Cet effet va être représenté par la variation de la densité de voitures (rho). L'expérience est menée sur 4000 mètres et la distance entre les voitures va évoluer en fonction de la densité.

Nous modélisons alors la réaction du conducteur qui doit adapter sa vitesse selon plusieurs paramètres, comme par exemple: si la voiture qui le précède est trop proche ou trop éloigné, la vitesse à laquelle il roule (excès ou non), etc ... .

Nous avons donc conclu qu'il n'y avait que trois cas possibles à modéliser, ce sont les suivants :

1. si la distance de sécurité est respectée mais que le conducteur peut accélérer sans dépasser 130km/h, il va le faire. Sinon il n'accélère pas.

2. si la distance de sécurité n'est pas respectée, alors le conducteur va décélérer pour retrouver cette distance.

3. enfin si la distance avec le véhicule de devant est supérieure à la distance de sécurité, le conducteur doit analyser sa vitesse. S'il est en dessous de 130km/h, il accélère jusqu'à atteindre cette vitesse. S'il est à 130km/h, il ne modifie pas son comportement. S'il est au-delà de 130km/h il décélère pour ne pas être en infraction.

L'expérience réalisée ici, doit montrer qu'il n'y a pas choc car le conducteur adapte con comportement aux variations du champ. Nous pouvons constater que cela est vérifié en prenant un exemple. Comme le programme actualise les calculs qu'il fait, nous avons pris plusieurs captures d'écran, ci-après, pour montrer l'évolution de la circulation.

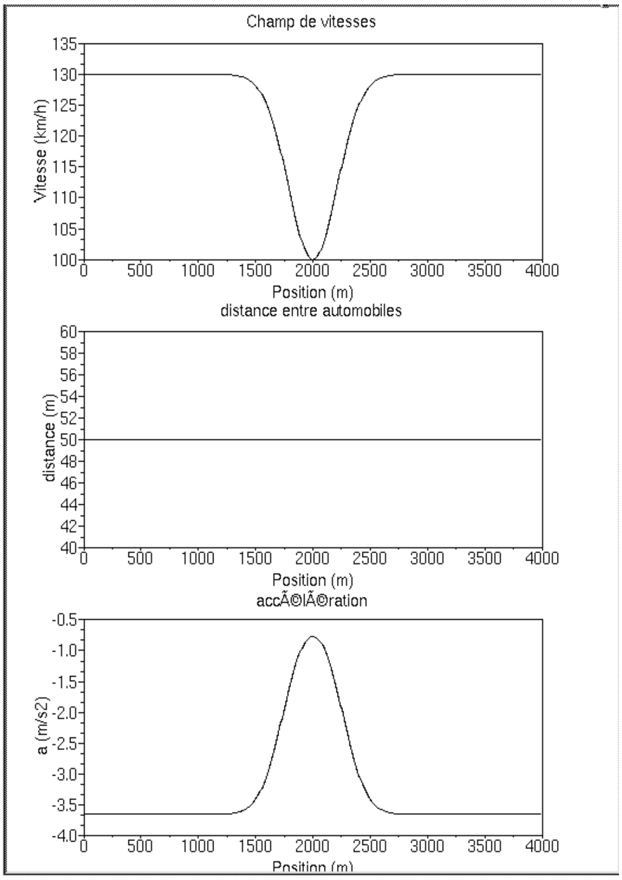


figure 3 :*Exemple avec l'accélération non nulle (instant quasi initial)*

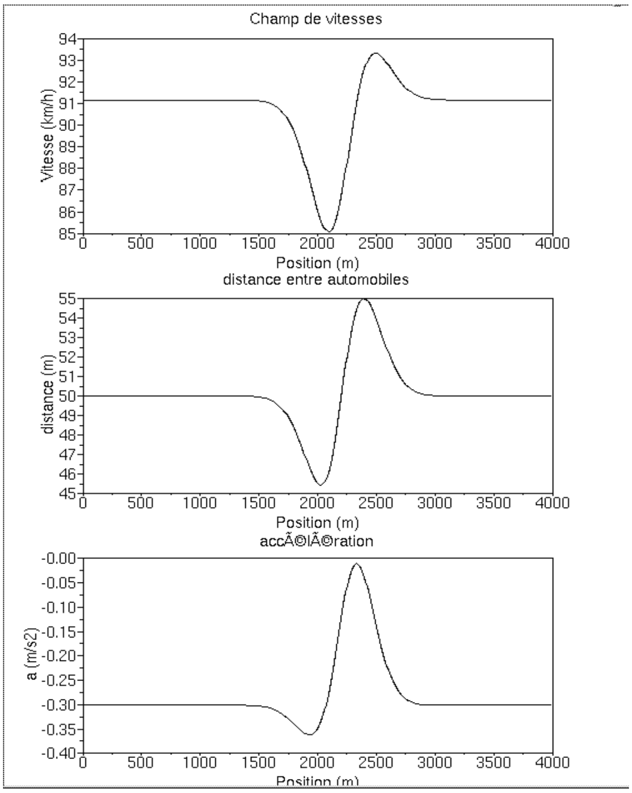


figure 4 :*Exemple avec l'accélération non nulle (instant t)*

Sur les différentes illustrations, nous constatons tout d'abord qu'il n'y pas de rupture verticale donc pas de choc, ce qui confirme notre hypothèse.

De plus, la corrélation entre la vitesse des voitures, la distance qui les sépare et l'accélération apparaît évidente. En effet, nous observons bien que lorsque la distance entre les voitures diminue, la vitesse et par conséquent, l'accélération diminuent également: ce qui est logique: lorsque la voiture qui vous précède freine, vous freinez également pour ne pas lui rentrer dedans. De même, lorsque la distance augmente, la vitesse et l'accélération font de même. Quand vous constater que la voiture qui se trouve devant vous est assez éloignée, vous vous permettez d'accélérer.

Enfin, comme nous l'avons déjà précisé, le champ évolue. Ici, pour la première image, nous avons 31999 voitures qui circulent alors que pour la seconde, nous en avons 32000. Certes, cette variation n'est pas très importante mais elle dénote tout de même bien d'une variation du champ, c'est-à-dire du trafic.

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Ce projet de physique nous a beaucoup appris, tant sur l'aspect physique que sur l'aspect pédagogique.

Sur le travail réalisé, ce projet nous a permis d'approcher de plus près la notion de dérivée particulaire, étudiée dans nos enseignements de physique. Les étudiants en thématiques Energétique et Propulsion de notre groupe ont d'ailleurs apprécié le sujet. Il leur a en effet permis d'aller plus loin dans leur approche de la mécanique des fluides que les cours qu'ils ont pu suivre.

De plus, même si ce projet était principalement axé sur la physique, nous ne pouvons nier qu'il a nécessité l'utilisation de nos connaissances mathématiques (indispensables pour un bon physicien) mais aussi en informatique. Nous avons tout d'abord dû chercher un logiciel du domaine public, syllabe, et en apprendre le langage. Inutile de dire que cela n'a pas été facile, mais heureusement nos connaissances en C et C++ nous ont permis d'avancer.

La dimension pédagogique du projet nous a particulièrement séduite. Devoir comprendre un problème physique pour devoir ensuite l'expliquer à d'autres étudiants, a été pour nous un élément de motivation supplémentaire. L'envie de laisser une trace de notre projet et savoir qu'il pourra être utile à d'autres dans le futur nous a encouragé d'autant plus. Il est vrai que la réalisation et le montage de la vidéo nous a demandé beaucoup de temps par rapport à un projet classique. Cependant cela n'a pas du tout été une contrainte pour nous. Au contraire, il nous a obligé à prendre des initiatives, demander des informations à d'autres personnes, etc…

Mais cette UV de projet nous a également enrichi personnellement.

Tout d'abord, il a été intéressant dans le sens où il nous a permis de nous pencher pendant plusieurs semaines sur un problème physique, ce dont nous n'avions pas l'habitude de faire jusqu'ici. D'autre part, ce projet a été l'occasion pour nous d'apprendre à mieux utiliser des outils physiques indispensables tels que le gradient, ou la dérivée particulaire.

Nous nous sommes impliqués dans la résolution de ce projet, de façon individuelle mais surtout collective. Et il est clair que ce projet mené durant tout un semestre nous a permis de mieux appréhender un travail scientifique en groupe. De plus, le projet nous a demandé des recherches d'informations à travers différentes sources, sans avoir à écouter un cours que l'on nous impose et auquel nous n'aurions pas de regard critique. Il a donc développé en nous une certaine autonomie indispensable dans le métier vers lequel nous nous dirigeons.

Pour conclure, il nous semble important de souligner que ce projet peut-être poursuivi. Tout d'abord, il serait utile, pour une meilleure compréhension de l'équation, de faire un programme qui trace les vecteurs qui compose le champ ainsi que le tracé de la particule étudiée. En outre, nous n'avons que débuter l'étude sur le phénomène routier. Nous avons, pour l'instant, proposer une modélisation du comportement humain, qui pourra être modifiée si nécessaire. Nous pensons également qu'il serait intéressant de tenter de simuler le phénomène de bouchon ou alors, l'incidence d'un accident (modification du champ en un point précis, à un moment donnée) sur la circulation des voitures. Finalement, ce projet pourrait être réalisé par deux groupes : les premiers se chargeraient de trouver un moyen pédagogique adapté, les seconds, auraient pour but d'étudier une application concrète comme le phénomène routier. Nous pensons que ceci ne peut que nous aider pour notre futur métier d'ingénieurs: en effet, les relations et le travail en groupe est une qualité indispensable pour pouvoir s'épanouir et réaliser un travail satisfaisant.

5. BIBLIOGRAPHIE

[1] Noms des auteurs, “Titre du livre”, *Editeur*, année.

[2] Noms des auteurs, “Titre de l’article”, *Titre du journal*, volume, pages, année.

[3] lien internet : http://mathias.bavay.free.fr/these/html/node181.html (valide à la date du 30/04/2008).

[4] lien internet : http://www.math-info.univ-paris5.fr/~gk/papers/cours_edp.pdf(valide à la date du 30/04/2008).

[5] lien internet : http://perso.univ-rennes1.fr/philippe.roux/scilab/edp/index.html (valide à la date du 30/04/2008).

[6] lien internet : http://d.krauss.free.fr/documents/Physique/Chocs/principe_simulateur_chocs.htm (valide à la date du 30/04/2008).

6. ANNEXES (NON OBLIGATOIRE)

6.1. Code du programme pour l'accélération nulle

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// résolution numérique d’une équation de Burger 1D
// du/dt+u du/dx=0   u=u(t,x)    u|[t=0]=u0
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
driver("X11");
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// discrétisation espace
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
X=20;// intervalle [-X,X]
dx=0.02;// pas en espace
K=2*(X/dx)+1;//nombre de points
x=[-X:dx:X]';// vecteur contenant les abcisses
dt=0.01;//pas de temps
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
// la donnée initiale u0
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
u=1-(2/%pi)*atan(x);fin=u(1);//choc
//u=bool2s(x>0)+0.5;fin=u(1);//détente
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//lancement affichage
//////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
Y=2;rect=[-X,-0.5,X,Y];
titlepage(["résolution numérique d EDP";" ";"équation de Burger 1D";" ";"du/dt+u du/dx=0  u0=1-(2/%pi)*arctan(x)"])//première page
xtitle("(cliquer dans la fenêtre pour lancer l animation)")
[c_i,c_x,c_y,c_w]=xclick();//récupère les coordonnées c’est à partir de là que va être calculé le point suivant
xbasc();//efface tout permet de voir une vraie évolution
xset("pixmap",1)//les graphiques sont dessinés sur un pixmap
xtitle("équation de burger 1D (cliquer pour lancer)","x","amplitude")//titre en haut
```

```
de la fenêtre
plot2d(x,u, 2,"111","du/dt+u du/dx=0",rect)//vecteur minimal pour que le graph soit tracé (et voila notre belle équation !!)
xset("wshow")//le graphique contenant la courbe de u est affiché et le système est en "pause"
[c_i,c_x,c_y,c_w]=xclick();//récupère les coordonnées
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//calcul récursif de l'évolution
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
for i=1:1000
rightu=[0;u(1:K-1)];//création de la variable rightu
// calcul de u au pas de temps suivant
u=u+((dt*u)./(dx)).*(rightu-u);
u(1)=fin;// condition au bord à droite
//affichage du résultat
xclea(-X,Y,2*X,Y+0.5)//efface le rectangle contenant la courbe
plot2d(x,u,2,"000")//dessin du graphique
xstring(15,1,"t="+string(i*dt));//affichage du temps
xset("wshow")//affichage de l'évolution en fonction du temps
end
xset("pixmap",0)//les graphiques sont dessinés directement à l'écran (graphique de surface les points n'étant pas effacer il n'y a pas d''effet de déplacement)
```

6.2. Code du programme de modélisation du phénomène routier

```
clear all
dist=4000;
Vmax=130/3.6;
dx=10;
L=[1:dx:dist]';
Nbp=length(L);
//Uinit=1-(2/%pi)*atan(L-dist*3/6)
Uinit=(1-exp(-((L-dist*3/6)/300)^2))*30/3.6+100/3.6; // à modifier
//Uinit=ones(L)*130/3.6;
rhoinit=1/50*ones(Uinit);
```

```
Xinit=[rhoinit;Uinit];


//Determine la loi de comportement de l'accélération de chaque voiture


function ax=CalculAcc(U,rho)
d=ones(rho)./rho; //distances entre les voitures
dsecu=0.6*U*3.6 //distances de sécurité
T=dx./U
//ax=(d-dsecu)./(T.^2)/100;//homogène car l'accélération dépend de la vitesse, de la distance entre les voitures et de la distance de sécurité.



for k=1:length(U),
  //si la distance de securite est respectee (même en cas de vitesse > Vmax !!!)
  if d(k)==dsecu(k) then if U(k)>Vmax then ax(k)=(Vmax-U(k))./(T(k))/100;
                        else   ax(k)=0; //Alors accélération nulle
                          end;
  //si la distance est plus petite que la distance de sécurité (quelquesoit la vitesse !)
  elseif d(k)<dsecu(k) then
    ax(k)=(d(k)-dsecu(k))./(T(k).^2)/100;    //on décélère + ou - en fonction de la distance
  else  //si la distance est + grande que la distance de securite
     if U(k)>Vmax then
       ax(k)=(Vmax-U(k))./(T(k))/100; //si V>Vmax on tend à revenir vers une distance de securite
      elseif U(k)==Vmax then //si V=Vmax on conserve sa vitesse
        ax(k)=0;
      else
        ax(k)=(U(k)-Vmax)./(T(k))/100;  //On considère que la voiture de devant est suffisamment loin et que l'on ne se soucis plus de la distance de sécurité
                                        //si la vitesse est + petite que Vmax on accelere jusqu'a retrouver une distance de securite
      end;
  end
end
//ax=zeros(U);
```

```
endfunction


function [dXdt] = VariationX(t,X)
  long=length(X);longrho=long/2;longU=long/2;
  //Extraction des données de densite et de vitesses
  rho=X(1:longrho,1);U=X(longrho+1:$,1);

  //Adapatation du champ de densite
  rhoU=U.*rho;
  dk = splin(L,rhoU);
  [rhoUbis, deltarhoU] = interp(L, L, rhoU, dk);

  //Variation du Champ de vitesses
  dk = splin(L,U);
  [Ubis, gradU] = interp(L, L, U, dk);
  //Calcul de la dérivée particulaire à cet instant
  ax=CalculAcc(U,rho);
  dXdt=[-deltarhoU;ax-gradU.*U];

endfunction


t0=0;
for t=t0:10:40
  x = ode("adams",Xinit, t0, t, 1E-7,1E-9,VariationX);
  rho=x(1:length(x)/2);
  U=x(length(x)/2+1:$);
  ax=CalculAcc(U,rho);
  clf
  subplot(3,1,1);
  plot2d(L,U*3.6);xtitle('Champ de vitesses','Position (m)','Vitesse (km/h)');
  subplot(3,1,2);
  plot2d(L,ones(rho)./rho);xtitle('distance entre automobiles','Position (m)','distance
(m)');
  subplot(3,1,2);
  plot2d(L,ones(rho)./rho);xtitle('distance entre automobiles','Position (m)','distance
(m)');
```

```
  subplot(3,1,3);
  plot2d(L,ax);xtitle('accélération','Position (m)','a (m/s2)');
  printf('Nb voitures = %d¥n',sum(rho)*dist);

  t0=t;
  Xinit=x;
end
```

6.3. Script de la vidéo du projet pédagogique

Salut Insaïens, Salut Insaïennes,

vous avez des soucis en P8? Pas de problème, nous sommes là pour les résoudre. Notre but est de vous expliquer l'équation, servant à l'étude du choc, principalement en mécanique des fluides, appelée équation de Burger ou aussi dérivée particulaire.

(écrire l'équation sur le tableau blanc)

où a est l'accélération d'une particule du fluide

U est le champ de vecteurs (vitesses)

V est la vitesse de la particule

(Ici, pour calculer l'accélération particulaire, U et V sont les mêmes c'est-à-dire que a=dV/dt=dV/dt + grad V. V alors que dU/dt=dU/dt+gradU.V.

formules à écrire au tableau)

Le but de l'équation est de passer d'un point de vue Eulérien à un point de vue Lagrangien. Mais vous allez me dire:

- « Qu'est-ce que c'est Euler et Lagrange ?»

Et bien, ce sont deux visions des choses différentes. La première, Euler, étudie le comportement du champ dans son ensemble, tandis que la seconde, Lagrange, suit l'évolution d'une particule dans le champ. C'est clair ou pas?

– « Non , pas trop.»

Prenons un exemple, celui des voitures. Parfois des gendarmes sont au bord de l'autoroute pour « observer » la vitesse des véhicules. Ils peuvent donc décrire l'écoulement du trafic au cours du temps grâce à l'endroit où ils sont positionnés. Ces gendarmes sont donc la vision eulérienne pour décrire le trafic: en effet, ils n'observent pas nécessairement la même vitesse du trafic en général.

Quand leur point de vue devient Lagrangien, c'est généralement mauvais signe! En effet, à la même date, les deux gendarmes n'observent pas les mêmes véhicules. Contrairement à l'eulérien, dans le lagrangien, les gendarmes se focalisent sur la trajectoire des véhicules: à un instant t, ils ne voient pas les mêmes voitures.

Bon prenons un exemple concret: la circulation des voitures sur une route. Dans ce cas, les voitures représentent les particules. Le champ est représenté par le trafic, c'est-à-dire l'ensemble des voitures. Et V correspond à la vitesse d'une voiture et a à son accéleration.

Pour simplifier le problème, l'accélération sera considérée comme nulle dans les 3 cas suivants. Donc la vitesse de toutes les voitures est constante mais chaque voiture garde sa propre vitesse, qui n'est pas forcément la même pour toutes les voitures.

Lorsque a=0, vous allez voir qu'il n'y a que trois possibilités.

Le premier cas consiste en un champ constant, c'est-à-dire que la vitesse est la même en tout point. Ce champ est stationnaire et uniforme, il ne dépend ni du temps, ni de l'espace. On constate donc que les deux voitures roulent à la même vitesse et que la distance qui les sépare reste constante. De ce fait, le choc entre celles-ci est impossible.

Revenons à l'équation: ici, dU/dt=0 (champ stationnaire) et gradU=dU/dx=0 (champ uniforme).

Maintenant, passons au deuxième cas. Il concerne 2 voitures n'ayant pas la même vitesse initiale. Plus précisément, la première roule plus vite que la seconde. Nous sommes toujours dans un champ stationnaire et uniforme donc leur vitesse ne varie pas, ni en fonction du temps, ni en fonction de l'espace. La distance entre les voitures qu'augmenter. De ce fait, le choc entre celles-ci est impossible: nous sommes dans le cas d'une détente.

– « Mais si la première voiture va moins vite que la seconde, qu'est-ce qui se passe? »

J'y viens. Et bien, c'est le contraire! Quand tout à l'heure la distance ne faisait qu'augmenter, maintenant cette distance ne fait que diminuer. Donc la seconde voiture rattrape la première jusqu'à l'impact entre les deux voitures. Il y a choc !!!

(*BOUM!*)

J'espère que maintenant cela te parait plus clair!