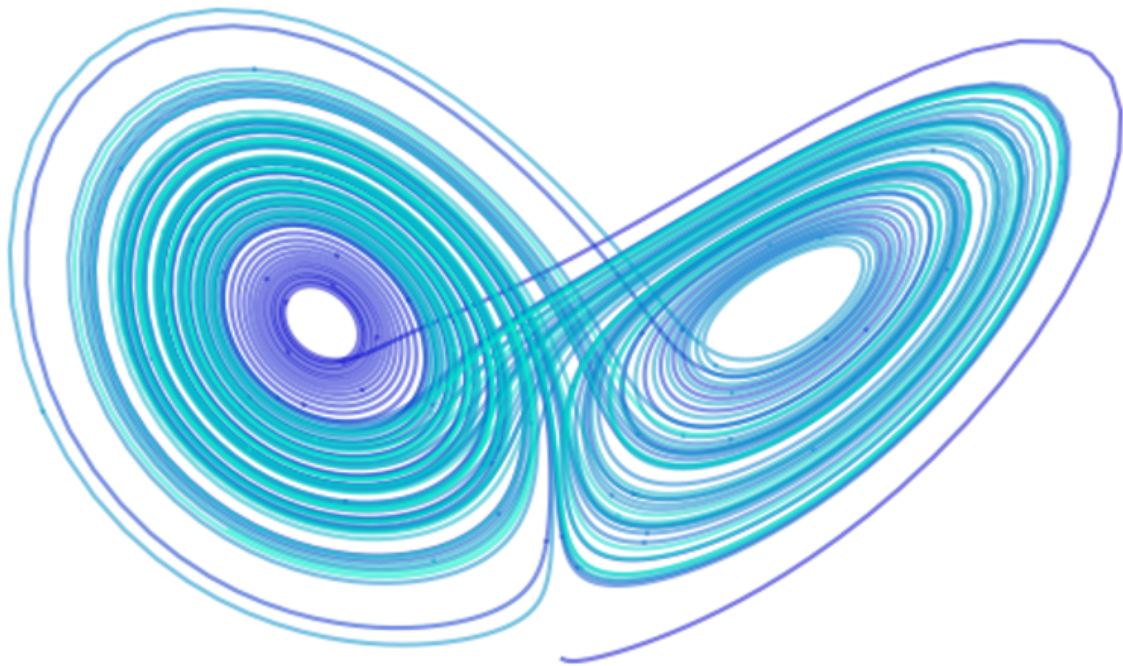


Systemes Physiques Chaotiques



Étudiants :

Miruna ANGHEL
Baptiste BOURGEAUX
Léopold MAILLARD

Emma THULLIEZ
Alexandru COSTRITA
Mohamed SEKKOURI - ALAOUI

Enseignant-responsable du projet :

Kevin BIOCHE

Date de remise du rapport : 17/06/2019

Référence du projet : STPI/P6/2019 – 033

Intitulé du projet : Systèmes Physiques Chaotiques

Type de projet : Bibliographie, Modélisation

Objectifs du projet :

Nos objectifs étaient de réaliser une étude bibliographique sur les systèmes physiques chaotiques et le système d'équations de Lorenz, de modéliser sous Python le système d'équations de Lorenz ainsi que le double pendule et analyser le caractère chaotique de ce dernier système par le biais d'une métrique.

Mots-clefs du projet : Chaos Dynamique, Attracteur de Lorenz, Convection de Rayleigh-Bénard

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 4 |
| 1 Méthodologie, organisation du travail | 5 |
| 2 Travail réalisé et résultats | 7 |
| 2.1 Généralités : définitions et applications | 7 |
| 2.1.1 Champs de la physique où l'on retrouve les systèmes physiques chaotiques | 8 |
| 2.2 Le phénomène de convection de Rayleigh Bénard | 10 |
| 2.2.1 Présentation du phénomène | 10 |
| 2.3 L'attracteur de Lorenz | 13 |
| 2.4 Modélisations | 15 |
| Conclusion et perspectives | 21 |
| A Code Attracteur de Lorenz | 22 |
| B Code Méthodes d'Intégration | 24 |
| C Code du Double Pendule | 26 |
| D Code de la métrique | 28 |

Introduction

Depuis l'Antiquité et jusqu'à nos jours, la physique a toujours été définie comme étant une science ayant pour but d'étudier et d'expliquer le monde dans lequel nous vivons mais aussi de mieux comprendre les systèmes qui nous entourent. Parmi les systèmes que l'on peut retrouver, il y a les systèmes dynamiques. Ces derniers désignent tous systèmes pouvant évoluer au cours du temps.

Il existe plusieurs sortes de systèmes dynamiques. L'une des principales branches de ces systèmes est celle des systèmes chaotiques. Ceux-ci ont la particularité d'être très sensibles aux conditions initiales dans lesquelles ils évoluent. De ce fait, et contrairement à la plupart des systèmes dynamiques, ils demeurent imprévisibles à long terme et donc indéterministes.

Ainsi, l'objectif de notre projet est d'étudier ces systèmes physiques chaotiques afin de mieux comprendre leur fonctionnement, de mettre de la lumière sur quelques notions sombres et confuses concernant ce sujet et de les modéliser par le biais d'outils mathématiques et informatiques.

Pour cela, nous allons dans un premier temps mieux définir les systèmes physiques chaotiques ainsi que quelques notions clés autour de ce sujet. Puis, nous nous intéresserons à la convection de Rayleigh Bénard, un système spécifique et très courant, ainsi que l'étude mathématique de ces systèmes chaotiques, en particulier les équations de Lorenz. L'exemple du double pendule sera le dernier à être abordé, étant une application très connue mais plus rare du chaos dynamique. Et enfin, nous allons consacrer une dernière partie à la modélisation informatique du modèle mathématique de Lorenz ainsi que le double pendule.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

Au début de notre projet de P6, nous avons consacré plusieurs séances à la documentation et à la recherche dans le but de nous familiariser avec le sujet et s'informer le plus possible sur le phénomène des systèmes chaotiques.

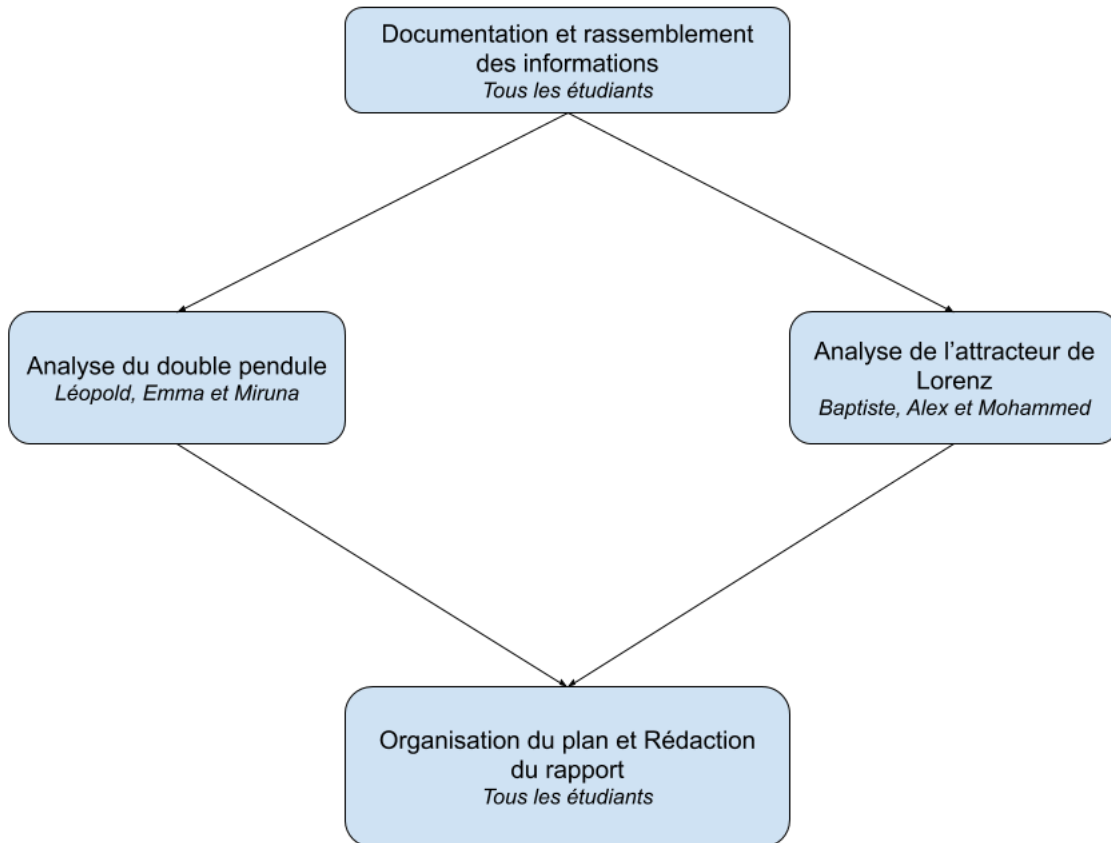
Nous avons mis en place durant ces séances plusieurs présentations Powerpoint afin de regrouper les informations de chacun et de faire le point sur l'avancée de nos recherches. Cela nous a permis de bien cerner le sujet et de mettre en place un plan regroupant les principaux points que nous allons aborder par la suite.

Puis, chacun a approfondi ses recherches sur une partie du sujet et les a expliquées aux autres membres du groupe.

Ensuite, nous avons essayé de travailler en deux groupes de trois . Chaque groupe avait pour objectif de réaliser un code informatique sur un exemple particulier des effets chaotique . Pour cela, chaque groupe a réalisé un protocole bien particulier et mis en place les moyens adéquats pour le réaliser .

Enfin nous nous sommes intéressés à la rédaction du rapport selon le plan que nous avons mis en place et qui a été validé par notre professeur . Concernant cette rédaction du rapport, la répartition s'est faite naturellement entre nous tous . Chacun de nous a choisi une partie qui l'intéressait et a travaillé dessus.

Voici ci-dessous l'organisation de notre travail tout au long de notre projet physique et la répartition entre les étudiants :



Chapitre 2

Travail réalisé et résultats

2.1 Généralités : définitions et applications

Comme énoncé précédemment, les systèmes physiques chaotiques sont caractérisés par leur grande sensibilité aux conditions initiales et par la difficulté à prévoir leur évolution dans le temps. Bien que peu connus du grand public, ces systèmes nous entourent au quotidien et sont associables à une expression plus populaire : l'effet papillon. Cependant, cette dernière est trop souvent mal interprétée.

L'effet papillon est une expression qui désigne le fait que certains phénomènes sont très sensibles aux conditions initiales. Le premier homme à avoir parlé d'effet papillon fut Edward Lorenz lors d'une conférence scientifique en 1972 :

« Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ? »

Cette métaphore de l'effet papillon est souvent comprise à tort. Effectivement, certains comprennent que c'est le comportement d'un papillon qui va déclencher ou non la formation d'une tornade. Or ce que Lorenz voulait dire c'est que le battement d'ailes d'un papillon a des petites conséquences sur celle-ci par exemple modifier le moment où arrivera une tornade par exemple. En aucun cas c'est un papillon qui déclenche une tornade. Lorenz s'intéressait plus généralement aux prévisions météorologiques notamment à l'aide des courants marins, des vents etc... On retrouve l'effet papillon dans les systèmes chaotiques. En effet, un système chaotique est un système physique pour lequel une petite variation des conditions initiales rend l'état final totalement différent. Cela rend ces systèmes imprévisibles à long terme.

Ainsi, il existe plusieurs champs de la physique que l'on peut définir comme des systèmes physiques chaotiques, très différents à première vue mais obéissant aux mêmes principes.

2.1.1 Champs de la physique où l'on retrouve les systèmes physiques chaotiques

L'activité cardiaque

Le flux du sang dans l'aorte est contrôlé par le système endocrinien (c'est à dire l'ensemble des organes qui génèrent la sécrétion d'hormones), le système nerveux qui contrôle nos émotions, la pression sanguine, etc. Il s'agit donc d'un système multivariables.

Les mathématiques nous disent que lorsque nous sommes en face d'un système d'au moins trois variables non linéaires et interdépendantes, le chaos surgit.

Prenons comme exemple la tension artérielle : l'hypertension est un effet du comportement chaotique du coeur, plus précisément le comportement turbulent du sang à l'intérieur de la cavité.

L'hypertension artérielle est le premier facteur de risque de l'accident vasculaire cérébral (AVC) en France, 30% des adultes en souffrent.¹

L'économie

On retrouve également l'effet papillon dans le domaine de la bourse et notamment dans les spéculations boursières. Les transactions de certains flux financiers peuvent avoir des conséquences énormes à cause de l'importance de ces échanges.

Nous pouvons pour le montrer prendre l'exemple du Crash de Wall Street en 1929. En effet, quelques ventes de bourses inattendues ont entraîné la Dépression de 1929; mais ce n'est qu'un facteur, et d'autres paramètres ont sûrement contribué au fait que le résultat soit si dévastateur. L'économie est un système fluctuant : elle passe de booms économiques aux crises, séparées par les récessions et les récupérations.²

Les prédictions météorologiques

On peut trouver des applications de la théorie du chaos dans la météorologie concernant la pression atmosphérique, qui est déterminée par la pression de l'air.

Ce sont les turbulences dans l'atmosphère qui rendent la prévision de la météo chaotique. La sensibilité aux conditions initiales ainsi que l'effet papillon sont observés dans les prédictions météorologiques. Des changements de pression minimes peuvent conduire à un état du climat totalement différent durant les journées qui suivent l'analyse du système. C'est ce qui rend la météo si difficile à prévoir.

"L'incertitude des paramètres de l'atmosphère peut conduire à un résultat imprévisible et/ou entièrement différent dans les prévisions météorologiques." Karla Jiménez Comrie,

1. Source : <https://tpetheorieduchaos.wordpress.com/2017/12/06/premier-article-de-blog/>
Marcel LESIEUR - "Turbulence"

<https://www.federationdesdiabetiques.org/information/risques/hypertension-diabete>

2. Source : <https://tpetheorieduchaos.wordpress.com/2017/12/06/premier-article-de-blog/>

journaliste scientifique.³

Cette étude météorologique nous amène à évoquer un sujet de nature semblable mais à bien plus petite échelle. Le système d'équations que Edward Lorenz a développé dans le cadre de ses études météorologiques pouvant être réduit et appliqué à une bien plus petite échelle, en voici une application précise et quotidienne dont on ne se doute pas.

3. Source : <https://www.prensa.com/salud-y-ciencia/meteorologia-forma-afrontar-cambios-planeta-0-4440306052.html>

2.2 Le phénomène de convection de Rayleigh Bénard

2.2.1 Présentation du phénomène

Le phénomène de convection de Rayleigh Bénard est une convection naturelle pouvant être observée dans un fluide. En effet, ici, le mouvement du fluide n'est généré que par ses différences de densité dues aux gradients de températures, c'est-à-dire la direction et l'intensité des différences de températures au sein du fluide. On l'oppose à la convection forcée provoquée artificiellement par une pompe, une turbine etc.

La convection de Rayleigh Bénard est caractérisée par l'apparition régulière de cellules de convection, nomées cellules de Bénard.



FIGURE 2.1 – Cellules de Convection de Bénard

Comment la convection apparaît-elle ?

Ici, la couche de fluide considérée est chauffée par le dessous (exemple sol/mer par le soleil). En recevant ainsi de la température, le fluide va perdre en densité et se dilater, en commençant par sa couche inférieure.⁴ On parle de dilatation thermique. Le fluide plus froid, et donc plus dense, va ainsi se déplacer pour le remplacer, reproduisant par la suite le phénomène. Ce mouvement régulier au sein du fluide est responsable des cellules de convection.⁵

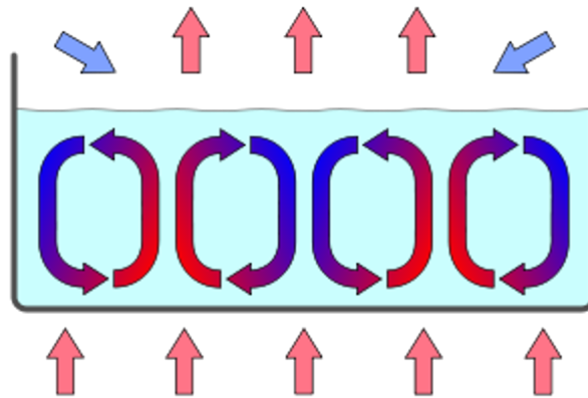


FIGURE 2.2 – Mouvement au sein du liquide

Le nombre de Rayleigh d'un fluide est associé à ce phénomène, il caractérise les transferts thermiques au sein du fluide. Ainsi, à partir d'un certain nombre critique, la simple conduction laisse place au phénomène de convection.

$$Ra_L = \frac{g\beta}{\nu\alpha}(T_b - T_u)L^3 \quad (2.1)$$

- T_b est la température en bas du système
- T_u est la température en haut du système
- L est la hauteur verticale
- ν est la viscosité cinématique du fluide, qui mesure sa capacité à s'opposer aux mouvements de sa masse
- α est la diffusivité du fluide, qui mesure sa capacité à transmettre la chaleur
- β est le coefficient de dilatation thermique volumique du fluide

Avec la différence de température entre les parties supérieures et inférieures du fluide, on atteint un nombre de Rayleigh critique (autour de 1700), à partir duquel on observe la convection.⁶

4. Source Illustration : <https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh>

5. Source : <http://physics.ucsd.edu/was-daedalus/convection/rb.html> (via web archive)

6. Source : <https://www.nuclear-power.net/nuclear-engineering/heat-transfer/introduction-to-heat-transfer/characteristic-numbers/what-is-rayleigh-number/>

Pourquoi parle-t-on d'un phénomène chaotique ?

Si le processus menant à l'apparition de ce phénomène est relativement simple, il est difficile de prédire la manière dont il va se manifester avec précision : il possède un caractère chaotique.

En effet :

- La rotation des cellules de convection est stable : une cellule de Bénard donnée conservera son sens de rotation tout au long de la convection. Cependant, toutes les cellules ne tournent pas dans le même sens et on ne peut pas à l'avance prédire ce sens.
- La forme des cellules de Bénard dépend grandement des conditions initiales.
- L'intensité, la complexité et le caractère chaotique du mouvement augmentent avec le nombre de Rayleigh, et donc avec la température.

Plus généralement, les perturbations microscopiques liées aux conditions initiales suffisent à créer des effets macroscopiques (les cellules de convections) difficiles à prévoir à l'avance.

Quel lien avec les équations de Lorenz ?

Lorenz a eu l'idée de modéliser ce phénomène de convection à l'aide de 3 variables afin de proposer un modèle météorologique simplifié.

Ainsi, après avoir étudié une application physique concrète, on va s'intéresser au modèle mathématique proposé alors par Lorenz.

2.3 L'attracteur de Lorenz

L'Attracteur de Lorenz est une structure fractale, invariante par changement d'échelle⁷ et correspondant au comportement à long terme de l'oscillateur de Lorenz.

“L'oscillateur de Lorenz” est tout simplement le nom désignant le système de trois équations d'Edward Lorenz, destinées à analyser les phénomènes météorologiques. C'est un système grandement simplifié, basé sur les équations de dérivées partielles de Navier-Stokes, rencontrées dans la mécanique des fluides. Ces dernières étant bien trop difficiles à résoudre numériquement pour les ordinateurs de l'époque de Lorenz, il a donc simplifié ces dernières afin de pouvoir obtenir des résultats numériques précis et ainsi tenter de prédire la météo.

$$\frac{dx}{dt} = \sigma[y(t) - x(t)] \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{dz}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \quad (2.4)$$

Où σ , ρ et β sont trois paramètres strictement positifs, fixés. σ est le nombre de Prandtl, ρ est le rapport du nombre de Ryleigh ?? par le nombre de Ryleigh critique.

Le modèle de Lorenz est un véritable exemple physique de systèmes dynamiques à comportement chaotique. Il est défini comme l'ensemble des trajectoires à long terme du système dynamique de Lorenz.

Ce système s'adapte donc très bien à la modélisation du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard, ce dernier correspondant aux phénomènes atmosphériques pour lesquels l'oscillateur de Lorenz a été créé en premier lieu.

L'attracteur de Lorenz illustre l'évolution en 3 dimensions du point caractérisé par l'oscillateur de Lorenz ce qui signifie que le point a pour coordonnées les 3 paramètres des équations de Lorenz. Pour mieux comprendre nous prenons un exemple : l'attracteur de Lorenz appliqué à la météo a pour axes la température de l'air, la vitesse du vent et la pression atmosphérique.⁸

7. Structure fractale = la trajectoire des points obtenus par le système d'équations de Lorenz reste la même indifféremment de l'échelle à laquelle on observe le système

8. Sources : <https://www.youtube.com/watch?v=YrOyRCD7M14>
<https://fr.wikipedia.org/wiki/Attracteur-de-Lorenz>

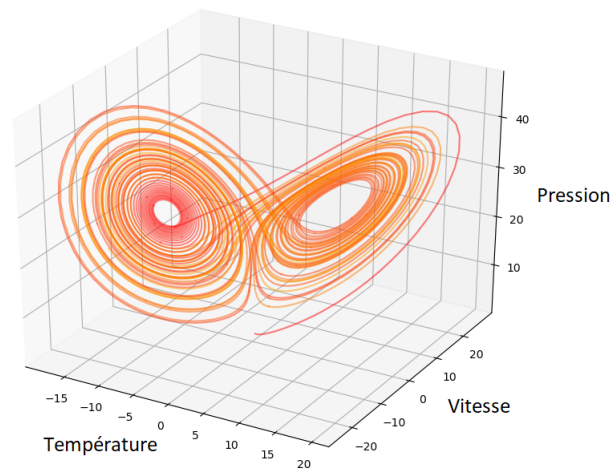


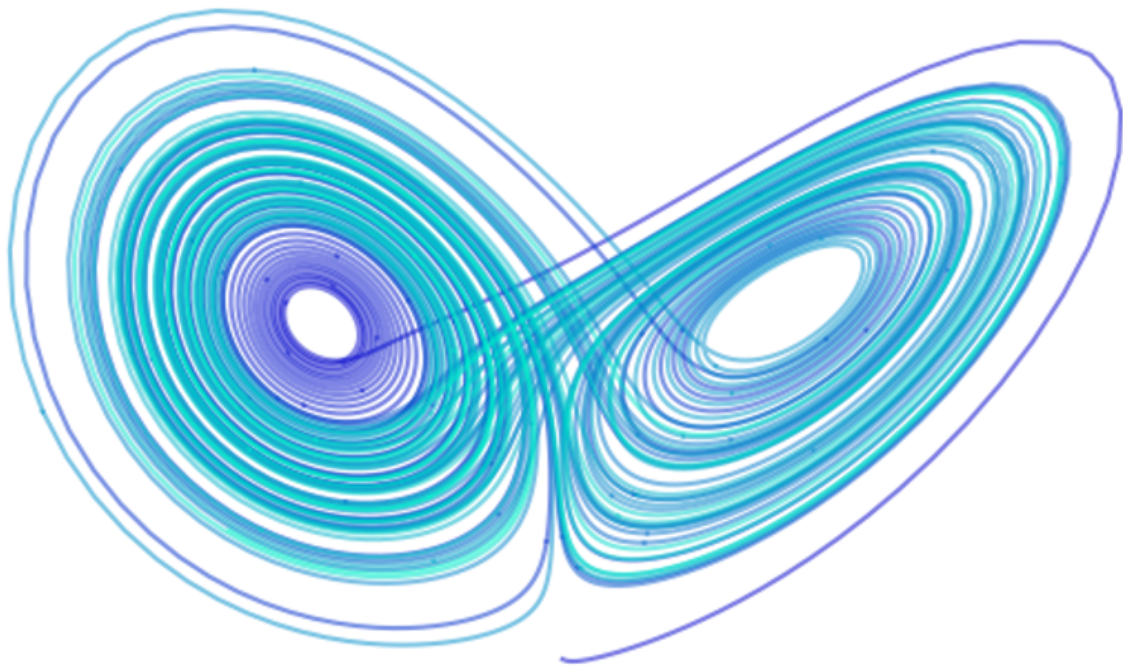
FIGURE 2.3 – Exemple d'attracteur de Lorenz dans le cas des mouvements atmosphériques

2.4 Modélisations

Notre projet portant également sur la modélisation des objets que nous avons étudié, nous avons créé des codes en Python dans le but de reproduire l'attracteur de Lorenz et d'observer la trajectoire d'un double pendule.

Le code représentant l'attracteur de Lorenz se trouve en Annexe A.

À l'aide de ce code, nous avons pu observer la façon dont est intégrée une fonction à l'aide de la bibliothèque Scipy. En particulier, nous avons étudié l'influence du pas d'intégration sur la solution du système. En théorie, nous devons toujours voir apparaître l'attracteur.



Nous avons ensuite étudié l'influence du pas d'intégration choisi sur la solution du système. Plus particulièrement, nous avons cherché à étudier s'il y avait une convergence de la position finale de la solution du système quand le pas d'intégration tend vers 0. Pour cela nous avons dû ajouter quelques lignes de code à notre programme. Vous retrouverez ce programme en Annexe B.

On commence par fixer la variable "taille" qui correspond aux nombres de valeurs que Δt (le pas d'intégration) va prendre. Puis on crée des tableaux qui contiendront les valeurs de Δt et des positions finales respectives.

A chaque tour de boucle "while" on enregistre les positions finales calculées, calcule un nouveau Δt , numsteps (nombre d'étapes d'intégration) pour le tour de boucle suivant. Le nombre d'étape d'intégration est multiplié par 10 à chaque tour de boucle c'est pourquoi on ne peut faire qu'une dizaine de tours de boucle au maximum.

Afin de pouvoir observer l'évolution des 3 variables de position finale X , Y et Z en même temps on crée un tableau qui contient la somme quadratique de X , Y et Z pour chaque Δt .

Puis on trace le graphe de cette somme quadratique en fonction de Δt . Δt tend très vite vers 0 donc on choisit une échelle semi-logarithmique en x pour sa représentation.

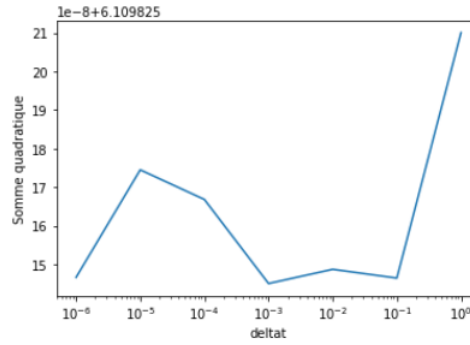
Ici c'est la durée d'intégration qui varie. On obtient alors les graphes suivants :

Constantes:

sigma = 10
rho = 5
beta = 8/3

Paramètres d'intégration:

start = 0
end = 10
deltat = 1

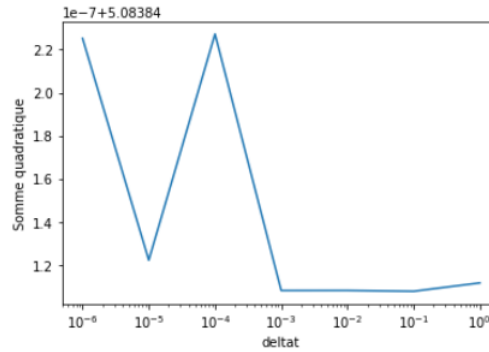


Constantes:

sigma = 10
rho = 5
beta = 8/3

Paramètres d'intégration:

start = 0
end = 10
deltat = 1

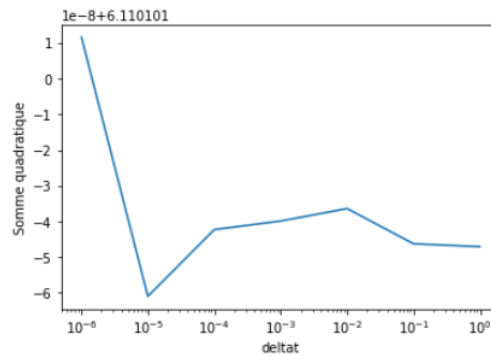


Constantes:

sigma = 10
rho = 5
beta = 8/3

Paramètres d'intégration:

start = 0
end = 10
deltat = 1

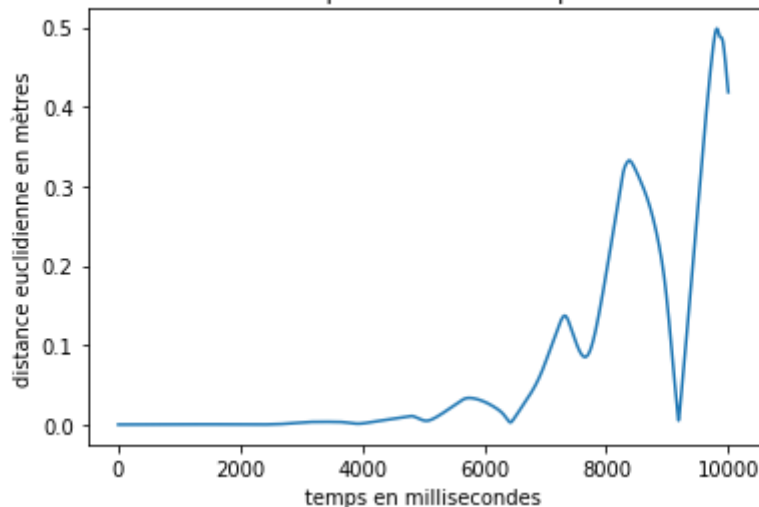


Par la suite, nous avons également cherché à réaliser la simulation du mouvement d'une double pendule. Ainsi, en indiquant les deux masses, les longueurs des tiges, les angles initiaux et les vitesses de rotation angulaires initiales, nous avons pu faire apparaître le double pendule grâce au code présent dans l'Annexe C. L'analyse de deux doubles pendules différents mais avec des conditions initiales très proches a été faite avec la métrique présente en Annexe D.⁹

Cette modélisation nous a alors permis de constater le caractère chaotique du double pendule en faisant légèrement varier les paramètres initiaux de nos simulations. Pour décider de ce caractère, nous avons choisi de représenter la distance entre deux simulations à l'aide de la distance associée à la norme 2 dans \mathbb{R}^4 .

Prenons par exemple deux pendules dont les masses et les longueurs sont toutes identiques. On a $m_1 = m_2 = m_1' = m_2' = 1 \text{ kg}$ et $l_1 = l_2 = l_1' = l_2' = 1 \text{ m}$. Les vitesses de rotations angulaires initiales sont nulles. Nous fixons l'angle de la deuxième tige à la normale à -10° , et faisons varier l'angle initiale de la première tige. Nous prenons $\theta_1 = 120^\circ$ et $\theta_2 = 119,99^\circ$. Dans le cas d'une expérience de laboratoire, ces deux angles sont très proches, et la plupart des appareils de mesure ne permettent pas de les différencier. Nous traçons alors la distance entre nos deux simulations et obtenons le graphique suivant :

Distance entre deux simulations proches du double pendule en fonction du temps

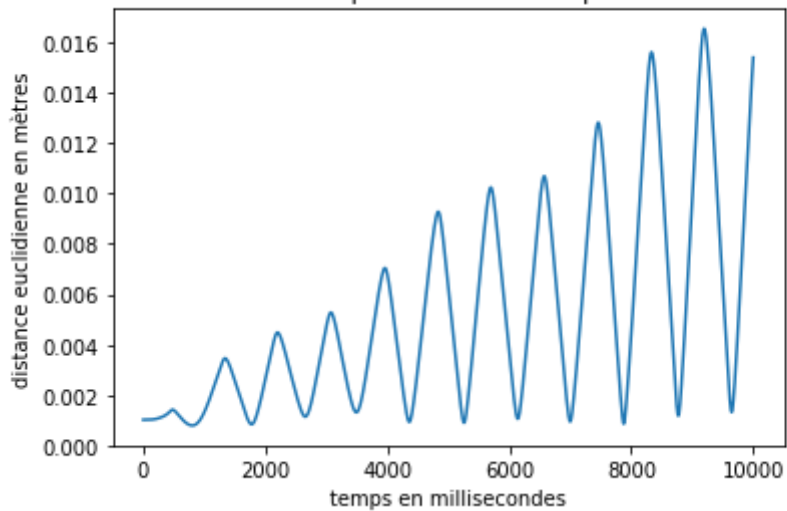


9. Source d'aide pour la partie affichage des codes : Double Pendule : <https://matplotlib.org/examples/animation/double-pendulum-animated.html>
 Attracteur de Lorenz : <https://scipython.com/blog/the-lorenz-attractor/>
 Documentations sur les bibliothèques consultées : Scipy, Numpy, Matplotlib

Nous remarquons qu'au bout de 7s, la courbe affiche un premier pic significatif, montrant qu'en prenant des conditions initiales très proches mais différentes, nous voyons très rapidement que les trajectoires s'éloignent : nous montrons bien que le double pendule est un système chaotique.

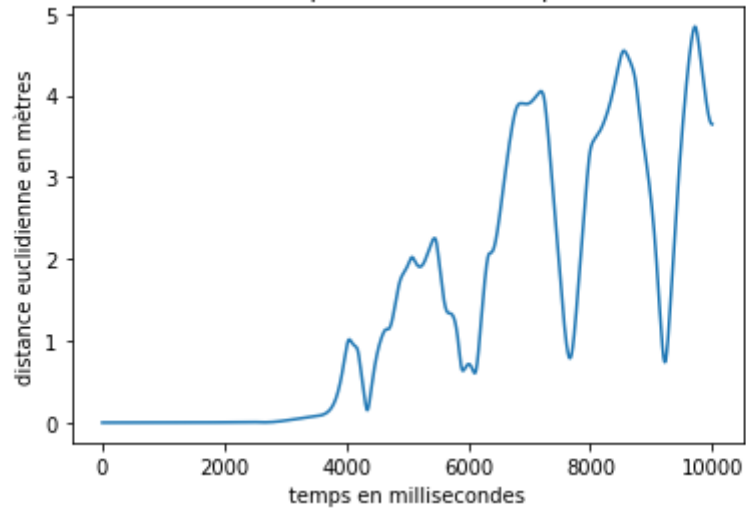
Ce code nous a également permis d'étudier l'influence de la longueur des tiges sur le caractère chaotique du pendule. Gardons maintenant $\theta_1 = \theta_1' = 120\text{deg}$, $\theta_2 = \theta_2' = -10\text{deg}$, $m_1 = m_2 = m_1' = m_2' = 1 \text{ kg}$. Nous fixons la longueur totale des tiges à 2 mètres. En faisant varier la longueur de la première tige, nous mesurons alors l'impact du ratio des deux tiges sur la trajectoire suivie par le pendule. Cette fois, prenons $l_1 = 0,5 \text{ m}$ et $l_1' = 0,5005 \text{ m}$ (précision au demi-millimètre). Nous obtenons le graphique suivant :

Distance entre deux simulations proches du double pendule en fonction du temps



Nous voyons qu'en modifiant ainsi la longueur des deux tiges, et en restant sur un ratio l_1/l_2 proche de $1/3$, les différences entre les deux simulations sont très minimes. Par contre, si nous prenons un ratio l_1/l_2 proche de 3 (en fixant cette fois $l_1 = 1,5$ m et $l_1' = 1,5005$ m), nous obtenons le résultat suivant :

Distance entre deux simulations proches du double pendule en fonction du temps



Conclusion et perspectives

Ce projet nous a permis de découvrir les systèmes physiques dynamiques et en particulier les systèmes chaotiques . Nous avons vu que ces derniers s'appliquent dans différents champs et domaines de la science et de la vie quotidienne. Nous avons ainsi levé le voile sur la notion d'effet papillon et pris connaissance des caractéristiques fascinantes de ces systèmes chaotiques.

Grâce à ce projet , nous avons découvert de nouveaux scientifiques comme Edward Lorenz et Rayleigh Bénard et nous nous sommes informés sur leur part de travail concernant les systèmes physiques chaotiques et les prédictions météorologiques ainsi que le lien qui les réunit. L'interprétation du modèle de Lorenz basé sur les équations mathématiques qu'il a mises en place nous a permis de remarquer l'apparition d'une structure fractale qu'on appelle «Attracteur de Lorenz».

Enfin nous avons approfondi nos connaissances sur les systèmes chaotiques et nos capacités en informatique en réalisant des simulations numériques sur le modèle de Lorenz et sur le double pendule. Nous avons ainsi pu mettre en avant expérimentalement l'effet chaotique de ces systèmes et son importance sur l'évolution de ceux-ci : grande sensibilité aux conditions initiales, comportement difficilement prévisible etc.

En étant une groupe multi-national, nous avons été obligés de nous adapter autant au niveau de l'organisation et du travail de groupe, que pour briser certaines barrières linguistiques. Finalement, nous avons tous appris un peu plus d'anglais, de russe ou de Python et c'était une bonne expérience qui nous servira certainement dans les années à venir, autant pour les projets INSA que pour notre vie d'ingénieurs.

Parmi les projets qui pourraient découler de notre travail, il serait possible de se concentrer plus sur certains systèmes ou points du chaos dynamique, le domaine étant incroyablement vaste.

En ce qui concerne l'avenir, nous ne savons pas ce qui va arriver . Au final tout le monde a une part de chaos en soi.

Annexe A

Code Attracteur de Lorenz

```

from __future__ import division
from scipy import *
from pylab import *
from scipy.integrate import odeint
5
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

sigma = 10
10 rho = 28
beta = 8/3

def deriv(syst,t):
    X = syst[0] #Variable 1 : x(t)
15    Y = syst[1] #Variable 2 : y(t)
    Z = syst[2] #Variable 3 : z(t)
    dX = sigma*(Y-X)
    dY = rho*X - Y - X*Z
    dZ = -beta*Z + X*Y
20    return [dX,dY,dZ]

start = 0
end = 100
numsteps = 10000
25 t = linspace(start,end,numsteps)
//Conditions initiales
X0 = 0
Y0 = 1
Z0 = 1.05
30 syst_CI = array([X0,Y0,Z0]) #Tableau des Conditions Initiales

sols = odeint(deriv,syst_CI,t)

X = sols[:,0]
35 Y = sols[:,1]
Z = sols[:,2]
print(X)

40 fig = plt.figure(figsize = (10,10))

```

```

ax = fig.gca(projection='3d')

nbseg = 100
c = np.linspace(0,1,numsteps)
45 for i in range(0,numsteps-nbseg,nbseg):
    ax.set_axis_on()
    ax.plot(X[i:i+nbseg+1], Y[i:i+nbseg+1], Z[i:i+nbseg+1], color=(1,c[i
        ],0), alpha=0.5)
    plt.pause(0.1)
50

plt.show()

```


Annexe B

Code Méthodes d'Intégration

```

from __future__ import division
from scipy import *
from pylab import *
from scipy.integrate import odeint
5
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
#initialisation des constantes
10 sigma = 10
rho = 5
beta = 8/3
def deriv(syst,t):
    X = syst[0] #Variable 1 : x(t)
    Y = syst[1] #Variable 2 : y(t)
    Z = syst[2] #Variable 3 : z(t)
    dX = sigma*(Y-X)
    dY = rho*X - Y - X*Z
    dZ = -beta*Z + X*Y
20 return [dX,dY,dZ]

start = 0 #debut du temps on prendra toujours 0
end = 20 #duree pendant laquelle on fait les mesures
deltat = 10 #periode sur laquelle on integre
25 numsteps =int( end / deltat) #on en deduit le nombre d'etapes d'
    integration

#final selon deltat
taille = 7
Xfinal = np.zeros(taille)
30 Yfinal = np.zeros(taille)
Zfinal = np.zeros(taille)
deltats = np.zeros(taille)
i=0
print(numsteps)
35 #La boucle while sert a faire tendre deltat vers 0 et recuperer les
    positions finales a chaque fois
while i <taille:
    print(numsteps)
    print(i)

```

```

    t = linspace(start, end, numsteps)
40 #Conditions initiales
    X0 = 1
    Y0 = 0
    Z0 = 0
    syst_CI = array([X0,Y0,Z0]) #Tableau des Conditions Initiales
45
    sols = odeint(deriv, syst_CI, t)
    X = sols[:,0]
    Y = sols[:,1]
    Z = sols[:,2]
50 Xfinal[i] =X[numsteps-1]
    Yfinal[i] =Y[numsteps-1]
    Zfinal[i] =Z[numsteps-1]
    i = i+1

55
    deltats[i-1]=deltat
    deltat = deltat / 10#On diminue deltat pour qu'il tende vers 0
    numsteps =numsteps*10 #On recalcule numsteps car deltat a change

60 sommequadratique = np.sqrt( Xfinal**2 + Yfinal**2 + Zfinal**2)
    plt.semilogx(deltats, sommequadratique)
    plt.ylabel('Somme quadratique')
    plt.xlabel('deltat')

65
    fig = plt.figure(figsize = (10,10))
    ax = fig.gca(projection='3d')

    nbseg = int(numsteps)-1
70
    c = np.linspace(0,1,numsteps)
    for i in range(0,numsteps-nbseg,nbseg):

        ax.plot(X[i:i+nbseg+1], Y[i:i+nbseg+1], Z[i:i+nbseg+1], color=(1,c[i
            ],0), alpha=0.5)
75
    plt.pause(0.1)

ax.set_axis_off()
plt.show()

```

Annexe C

Code du Double Pendule

```

import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
5 import matplotlib.animation as animation

LTOT = 2.0

10 l1 = 1.0
    l2 = LTOT - l1
    m1 = 1.0
    m2 = 1.0
    Mtot = m1 + m2
15 g = 9.81

def deriv(syst, t):
20     diff = syst[1] - syst[0]

    dx = np.zeros_like(syst)

    dx[0] = syst[2]
25     dx[1] = syst[3]

    dx[2] = m2 * np.cos(diff) * (g * np.sin(syst[1]) + l1 * (syst[2] ** 2) *
        np.sin(diff)) + m2 * l2 * (
            syst[3] ** 2) * np.sin(diff) - Mtot * g * np.sin(syst[0])
    dx[2] = dx[2] / (l1 * Mtot - m2 * l1 * (np.cos(diff) ** 2))
30     dx[3] = Mtot * (g * np.sin(syst[1]) + l1 * (syst[2] ** 2) * np.sin(diff))
        - Mtot * g * np.sin(syst[0]) * np.cos(
            diff) + m2 * l2 * np.sin(diff) * (syst[3] ** 2) * np.cos(diff)
    dx[3] = dx[3] / (m2 * l2 * (np.cos(diff) ** 2) - l2 * Mtot)

35     return dx

start = 0

```

```

end = 40
40 numsteps = 800
t = np.linspace(start, end, numsteps)
dt = end / numsteps

#Conditions initiales
45 omega1 = np.sqrt(g / l2) # vitesse angulaire 1
omega2 = 0.0 # vitesse angulaire 2
th1 = 120.0 # angle 1
th2 = -10.0 # angle 2

50 syst = np.radians([th1, th2, omega1, omega2])

sol = integrate.odeint(deriv, syst, t)

55 xM1 = l1 * np.sin(sol[:, 0])
yM1 = -l1 * np.cos(sol[:, 0])

xM2 = l2 * np.sin(sol[:, 1]) + xM1
yM2 = -l2 * np.cos(sol[:, 1]) + yM1

60 # Affichage
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, autoscale_on=False, xlim=(-3, 3), ylim=(-3, 3))
ax.grid()

65 line, = ax.plot([], [], 'x-k', lw=2)
time_template = 'time = %.1fs'
time_text = ax.text(0.05, 0.9, '', transform=ax.transAxes)

70 def init():
    line.set_data([], [])
    time_text.set_text('')
    return line, time_text

75

def animate(i):
    thisx = [0, xM1[i], xM2[i]]
    thisy = [0, yM1[i], yM2[i]]

80     line.set_data(thisx, thisy)
    time_text.set_text(time_template % (i * dt))
    return line, time_text

85 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, np.arange(1, len(sol)),
                               interval=25, blit=True, init_func=init)
plt.show()

```

Annexe D

Code de la métrique

```

import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
5 import matplotlib.pyplot as plt

# initialisation des constantes

10 def testdp(l1, th1, th2):

    LTOT = 2.0

    l2 = LTOT - l1
    m1 = 1.0
15 m2 = 1.0
    Mtot = m1 + m2
    g = 9.81

20 def deriv(syst, t):
    diff = syst[1] - syst[0]

    dx = np.zeros_like(syst)

25 dx[0] = syst[2]
    dx[1] = syst[3]

    dx[2] = m2 * np.cos(diff) * (g * np.sin(syst[1]) + l1 * (syst[2] ** 2)
        * np.sin(diff)) + m2 * l2 * (
        syst[3] ** 2) * np.sin(diff) - Mtot * g * np.sin(syst[0])
30 dx[2] = dx[2] / (l1 * Mtot - m2 * l1 * (np.cos(diff) ** 2))

    dx[3] = Mtot * (g * np.sin(syst[1]) + l1 * (syst[2] ** 2) * np.sin(
        diff)) - Mtot * g * np.sin(syst[0]) * np.cos(
        diff) + m2 * l2 * np.sin(diff) * (syst[3] ** 2) * np.cos(diff)
    dx[3] = dx[3] / (m2 * l2 * (np.cos(diff) ** 2) - l2 * Mtot)

35 return dx

```

```

start = 0
40 end = 5
numsteps = 800
t = np.linspace(start, end, numsteps)

# conditions initiales
45 omega1 = np.sqrt(g / l2) # vitesse angulaire 1
omega2 = 0.0 # vitesse angulaire 2

syst = np.radians([th1, th2, omega1, omega2])
50
sol = integrate.odeint(deriv, syst, t)

xM1 = l1 * np.sin(sol[:, 0])
yM1 = -l1 * np.cos(sol[:, 0])
55
xM2 = l2 * np.sin(sol[:, 1]) + xM1
yM2 = -l2 * np.cos(sol[:, 1]) + yM1

60 return xM1, xM2, yM1, yM2

t1 = testdp(1, 118, -10)
65 t2 = testdp(1, 120, -10)

f1 = np.sqrt((t1[0]-t2[0])**2 + (t1[1]-t2[1])**2 + (t1[2]-t2[2])**2 + (t1
70 [3]-t2[3])**2)

max1 = np.max(f1)

min1 = np.min(f1)
75
plt.plot(f1)

print(max1, min1)

```